BIBLIOTECA NAZIONALE VITT. EMANUELE
12
12 P
24

BIBLIOTECA NAZIONALE VITT. EMANUELE ROMA
55
4 C
13

Ex Bibliotheca
majori Coll. Rom.
Societ. Jesu

14-23 G 25

Datum numerum quem constat a duobus quadratis componi, in ipsos numeros quadratos distribuere.

NOVA
GEOMETRIÆ
CLAVIS
ALGEBRA.

CVIVS BENEFICIO APERITVR immenſus Matheſeos theſaurus, & reſoluuntur plurima problemata hactenus non ſoluta in ſerie multarum quantitatum continuè proportionalium.

SIMVLQVE TRADITVR METHODVS vniuerſalis, qua quilibet Marte proprio inuenire poterit innumera alia eiuſmodi.

Authore P. IAÇOBO DE BILLY, Compendienſi Societatis IESV.



Bib. Sec. Coll. Rom. Soc. J

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

PARISIIS,
Apud MICHAELEM SOLY, viâ Iacobeâ, ſub ſigno Phœnicis.

M. DC. XLIII.

Cum Priuilegio & Permiſſu Superiorum.

ILLVSTRISSIMO VIRO,
DOMINO
FRANCISCO SVBLET,
D. DE NOYERS,
BARONI DE DANGV,
Regi ab intimis Conſiliis
& Secretis.

VNDE felix imperij, belli paciſque conſulta petit arbitria; indidem (VIR ILLVSTRISSIME) exquiſitiſſimæ & reconditiori numerorum doctrinæ præſidium quærimus; audaci forſan auſpicio, ſed non iniquo, ſiquidem vt Principum atque Imperij, ſic numerorum ac ſummæ ad certiores calculos redigendæ ratio, perfectiſſimæ cuiuſdam munus eſt artis atque intelligentiæ. Præiuit nobis Gallia, vt quanti eſſes, ſuo beneficio æſtimaremus; dum ſupremum illa regij Principatus adminiſtrum ſibi recens

ã ij

BIBLIOTECA NAZ.
ROMA
VITTORIO EMANUELE

ademptum quæritur, te imprimis, cuius conſilio atque arbitratu temperetur ac floreat, ſaluum ac ſuperſtitem eſſe gaudet, vnumque depoſcit cuius nutu vt regis gratia, ſic publica ſalus innitatur. Nouit etiam nummerorum princeps Algebra cuius viri præſidium implorat, cum repoſcit tuum: dum enim perfectiſſimi rationem numeri ad legitimos abſolutiſſimoſque caculos reducit, omnes te iam impleuiſſe ſapientiæ numeros, rerumque momenta ſingula, accuratius adæquales ac bene conſtitutos ordines adduxiſſe te præſentit. Ambit illa virtutis tuæ ſplendore illuſtrari, ne obſoleſcat; elegit in te ſanctioris vitæ regulam, ne aberret à lege, accedit ad virum conſultiſſimum germana ſapientiæ conſors, nimirum à te cupit ornari qui cæteros aut beneuolentia tua illuſtres facis, aut probos pietate commendas. Fœneratum illi pulchre beneficium: ſe ſe tibi credit ignotam, tu Galliæ reddis illuſtrem: hæc tuo ſub nomine titulíſque prodit in lucem publicam, à quo Gallia laudem, viri ſapientes exemplum, Chriſtiana pietas venerationem mutuantur. Is es quem ambit oſtrum, quem regum gratia depoſcit, cuius è moribus vel ipſa virtus exempla ducit perfectæ probitatis, quique dum diuis

templa ponis, ipſe aris dignus videare. Nihil moror eam quam hactenus Regi Galliæque vniuerſæ benè approbaſti ciuilem & politicam publicis in rebus promouendis ſcientiam atque artem, qua perſpicaci mentis acie & hoſtium conſilia peruertere poßis, & oſtentatam antea Catonum prudentium obterere, ſi tantùm præceßiſſet tempore, quantùm merito antecellit. Tali freta præſidio timere nihil poteſt Gallia, ſperare debet & ſapienter omnia: nouit quippe ſe poſſe fortunam deficere, non virtutem aut ſapientiam; quæ quidem vel ipſis regibus amori ſit, terrori hoſtibus, omnibus admirationi, quæque gratulantes habeat poſteros, ipſos etiam huius imperij hoſtes vel æmulos certè vel præcones. Inſcribo igitur tibi (VIR ILLVSTRISSIME) admirabilem illam ac pene diuinam numerandi ſcientiam, & velut ex ſanctißimi templi tholo, voti reus ſuſpendo dicoque. Neque verò patrocinium alienum ambio ſine delectu, quamquam enim ſentio præter cœtera nomina quæ ſunt innumerabilia, vniuerſam illam quam profiteor IESV ſocietatem, beneuolentia non minus obſtrictam quam beneficiis deuinctam tuis, quæ cum tibi præ cœteris vni credidit amores ſuos, vnum

me ex omnibus obſequij erga te ſui atque obſeruantiæ vadem ipſa tranſmiſit. Accedit quoque illius viri qui te colit impenſius Reuerendi Patris Bartholomæi Iacquinotij Prouincialis mei amica hortatio & propenſa voluntas, qua tenuem hunc laboris ſtudiorumque fructum, qualiſcumque eſſet, tibi non ingratum fore ſignificauit; cumque tuis ille meritis exornandis imparem ſe eſſe ſentiret, huius officij partem in me non minus amoris quam obſeruantiæ ſociam coniunxit, vt quod vnus ipſe vix poſſet, id coniunctis ſuorum ſtudiis conſequeretur. Habe igitur quam rependimus exiguam pro tantis meritis gratiam, dumque rapit admirationem ſapientia, obſequium comitas, laudem munificentia, honorem æquitas, amorem in te omnium tuus in omnes amor beneficus ac ſingularis, hoc accipe quantulumcumque eſt virtutibus tuis & gloriæ erectum à nobis æternum ac perenne monimentum. Vale.

Dominationis tuæ,

Humillimus & obſequentiſſimus
ſeruus IACOBVS DE
BILLY, Societatis IESV.

LECTORI
BENEVOLO
SALVTEM.

EAdem eſt propemodum Algebræ conditio, & nobiliorum quarumdam plantarum quæ præſtantes fructus ſuos diu expectari iubent, ipſam morę diuturnitatem ſuauitatis incremento veluti fœnore quodam compenſaturæ. Ingens profecto eſt Algebræ vtilitas in omnem Mathematicarum partem, ſed ea cum leui volucrique ſtudio percipi non poſſit, occaſionem præbuit nonnullis, vt huic ſcientiæ vanas criminationes affingerent; Enimuerò ab ea tamquam ab ingeniorum tormento reuocant eos quos ad perdiſcendam Matheſim acriori conatu exarſiſſe comperiunt, nihil ex ipſa emolumenti ad alias ſcientias colligi commemorant, quod impenſo labori par eſſe poſſit, eius beneficio nihil effecturos denuntiant quod vulgaris Arithmeticæ ope non aſſequantur, quas adhibet præceptiones, conſtare exprobrant fallaciis ad ludibrium vexationemque ſtudioſorum, ſimilem

deniqᷓue iis terris, quæ cum ingenti curâ magniſque impenſis excultæ fuerint, immenſa inutilium herbarum copia, ſpem coloni defraudant.

Sed minimè, vt arbitror, audiendi ſunt cum exaggerata oratione extollunt aut maris incommoda faſtidioſi, aut belli pericula ignaui, aut mercaturæ fraudes incauti, aut ſcientiarum difficultates ſtupidi, aut etiam cum lucis & colorum contemnunt abiiciuntque delicias ac beneficia cæci: nec vt ſpero de Algebræ dignitate quidquam detrahent ſuis conuiciis (quicquid in eam dicendo fuerint debacchati) aut huius artis imperiti prorſus homines, aut ad eam perdiſcendam minus à naturâ appoſitè comparati, neque quiſquam erit, opinor, ità parum æquitatis retinens iudex, qui rudioris Algebriſtæ errores, ab eius quam profitetur ſcientię causâ diſcernendos eſſe non ſtatuat.

Habemus Diophantum Algebræ acerrimum propugnatorem qui ſuis Arithmeticorum libris oſtendit egregiè quouſque ingenij humani robur poſſit attolli: habemus Hypatiam celeberrimi Theonis filiam, quæ vt refert Suïdas, ſuperata ſexus ſui debilitate, doctiſſimos in prædictum authorem commentarios conſcripſit: habemus Cardanos, Stifelios, Bombellos, Nugnes, Xylandros, Steuinos, Albertos, Clauios, Ludolphos, Peletarios, qui miram mentis aciem in propugnanda illius dignitate exhibuerunt: habemus Franciſcum Vietam qui

excelſi

excelſi inſtar gigantis omnes alios vaſtis medita-tionum ſuarum paſſibus videtur ſuperaſſe: habemus Claudium Gaſparem Bachetum qui profundis in Diophantem elucubrationibus immortalem ſibi gloriam comparauit: habemus innumeros alios hac ætate Mathematicarum cultores qui Algebram ad præclara quæque & abſtruſa inuenta directam maximéque tutam viam eſſe demonſtrarunt.

Ego ſane, cum huic facultati multa debere me profitear, nolui tantam apud me veluti compreſſam retinere gratiam, ſed eam in publicum protuli, vt quod honeſtiſſimum referendæ gratiæ genus haberi ſolet, eam prędicando gratus eſſe viderer. Eſt igitur mihi animus toto hoc opere oſtendere quam ſit vtilis Algebra quantúmque conferat ad Geometriam, quæ inter cæteras Matheſeos partes facilè principem tenet locum: aggredior plurima problemata Geometrica, quorum ſolutio variis ambagibus & quaſi labyrinthęo quodam flexu iis perplexa apparet, qui directo Geometrarum ductu eam velint indagare; vbi tamen quis oblatum ſibi Ariadneum quoddam ab Algebra filum ſequi ſtatuit, non ægrè admodum ad optatum viæ exitum peruenit, & quod mirere omninò, de operationis bonitate certus eſt priuſquam illa demonſtratione probetur. Hanc methodum, cùm apud authores hactenus non occurriſſet, iudicaui dignam quæ luci daretur, ſperans fore vt multi re attentiùs

conſideratâ peſſimam contumeliæ notam arti noſtræ ab indoctis inuſtam abſtergant, eamque debito honore venerentur.

Atque vt totius operis ſpecimen quoddam præbeamus, dic age, quam tandem inires rationem, ſi quiſpiam poſtularet, vt data proportione interualli quadratorum medię & minoris ad ſummam quadratorum mediæ & maioris, inuenires tres lineas continuè proportionales? non dubito quin problema iſtud videretur difficile; nam quomodo venire tibi poſſet in mentem capiendam eſſe dimidiam differentiam terminorum rationis datæ, & ab huius quadrato tollendum rectangulum ſub iiſdem terminis; & iſtius reſidui radicem quadratam ſupradicto differentiæ dimidio additam vel detractam, exhibere maiorem extremam de tribus quæſitis, priore termino rationis exiſtente minore extrema? certe non ita facilè illud poſſis vel coniicere vel vi diſcurſus aſſequi quantumuis in Logiſtica Matheſeos fueris exercitatus; ſi tamen vtaris Algebrâ duce, nihil illic imperuium, nihil difficile apparebit, vt videbitur in quadrageſimâ nonâ Propoſitione Libri primi.

Similiter, ſi aliquis exoptaret vt data ſumma quatuor linearum continuè proportionalium & aggregato quadratorum ab extremis, exhiberes ſingulas quatuor, fortaſſis illud primâ fronte, imò & poſt multam inueſtigationem impoſſibile videretur: quomodo enim comminiſci poſſes aggre-

gatum ab extremis diuidendum eſſe per triplam ſummam quatuor linearum proportionalium, & huius quotientis quadrato addendum quotientem, qui fit diuidendo ſolidum rectangulum ex ſummâ omnium in differentiam quadrati ſummæ omnium à quadratis extremarum per idem triplum ſummæ omnium; & huius quotientis radicem quadratam ſupradicto priore quotiente multatam exhibere ſummam mediarum? quis inquam illud coniiciat? quis poſt coniecturam exequatur? quis adhibita coniectura & exequutione demonſtret? fateor, difficillimum eſt iſtud problema, & hactenus à nemine, quod ſciam, tentatum: ſi tamen Algebra in auxilium vocetur, ſtatim ex ipſa formabitur Canon, & ex Canone, ſponte naſcetur Effectio Geometrica, vt videbis in Propoſitione vigeſima ſeptima Libri ſecundi.

Simili ratione ſi quis deſideraret, vt data proportione quadratorum à tribus intermediis ex quinque lineis continuè proportionalibus ad quadrata extremarum, inuenires ſingulas, dic amabo, vnde inchoares? quo duce vtereris? quis tibi ſuggereret capiendum eſſe duplum quadratum prioris termini rationis datæ, illudque addendum cum rectangulo terminorum; ſummam hanc iungendam cum quadrato quod fit à dimidio poſterioris termini; iſtiuſque aggregati radicem quadratam ſupradicto additam dimidio, exhibere ſummam extremarum, priore termino rationis exiſtente media quinque

quæſitarum ? quis tandem illud certò concludat? non dubium quin magna deprehendatur in hoc problemate difficultas; verum ſi rem totam Algebricè confeceris, & operationem Algebricam penitius inſpexeris, deprehendes nullo negotio quibus gradibus ad Geometriam conſcendi poſſit, vt in Propoſitione vigeſima nona Libri tertii manifeſtum fiet.

Hoc idem potuiſſet innumeris aliis quam quibus vſi ſumus exemplis demonſtrari: tamen certos vltrò mihi pręſcripſi limites, vt extra illas propoſitiones non progrederer quæ in materia omnium nobiliſſima iucundiſſimaque verſantur, & in ſerie multarum quantitatum, continuè, vt vocant, proportionalium poſitæ ſunt; ex quibus ſi paucas exceperis, nouiter eas inuentas eſſe agnoſces, & ob difficultatem à nemine, nec ab ipſo quidem Franciſco Vieta tentatas: ex quo apparebit quàm inconſultè in Geometricis ſperent excellere qui Algebræ adminiculo ſeſe patiuntur eſſe deſtitutos, & quantam ſpem habere debeant ad Geometriæ apicem perueniendi, qui eo ſunt inſtructi.

Totum opus in tres libros partiti ſumus: primus eas complectitur quantitates quæ ſeriem trium proportionalium non excedunt, alter paulo vlterius ad quatuor vſque progreditur, tertius in quinque proportionalibus ſiſtet: præſcriptum etiam ab ipſa natura in corporum fabrica ſic tenuimus ordinem, vt in vnoquoque libro, ab imperfectio-

ribus ad perfectiora, à lineis ad plana, & à planis progrederemur ad ſolida quæ ex iſtis coaleſcunt: vt (quæ naturalis quædam conſecutio eſt) à partium cognitione ad totius notitiam commodè proueheremur. Demùm in qualibet propoſitione, inchoamus primùm ab operatione Algebrica quæ baſis inſtar erit, atque idcirco præcepta illius ſcientiæ quæ ad calcem totius operis attexuimus repetere oportebit: operationem ſequetur Canon vniuerſalis quo vti poterit Arithmeticus ſimplex ad ſoluendum problema propoſitum; & ex Canone formabimus Effectionem Geometricam, in qua duplicem adhibebimus demonſtrationem; vnam quidem qua oſtendemus Effectionem elici ex Canone, & ſingulas illius partes obſeruari; alteram verò qua rem propoſitam, independenter ab operatione Algebrica & Canone ex ipſis Geometriæ principiis demonſtramus. Corollaria & Appendices ſubinde adnectimus in quibus tùm varia theoremata, tùm alias res ſcitu neceſſarias adnotamus.

Cœterùm nemo iure conqueri poteſt quod ſæpius concludam æqualitatem vnius quantitatis cum alia, ex eo quod nec ſit maior nec minor, ſiquidem impoſſibile eſt vllam quantitatem eſſe alteri inæqualem quin vel illam ſuperet, vel ab ea ſuperetur, & proinde ex negatione maioritatis vel minoritatis rectè concluditur æqualitas. Adde hunc argumentandi modum frequentem eſſe

apud Euclidem in libro 12. Elementorum vbi oſtendit Conum eſſe tertiam partem Cylindri eamdem baſim cum ipſo habentis, quia non eſt maior nec minor tertia parte Cylindri; Conos & Cylindros ſub eadem altitudine exiſtentes, eſſe inter ſe vt baſes, quoniam nec maiorem nec minorem habent quam baſes proportionem; itemque ſimiles Conos & Cylindros eſſe in triplicata ratione diametrorum quæ in baſibus, quia nec ſunt in maiore nec in minore quam in ratione triplicatâ eiuſmodi diametrorum. Hunc poſtea ſequutus eſt Archimedes in libro de dimenſione circuli, vbi probat aream cuiuſlibet circuli æqualem eſſe triangulo rectangulo, cuius vnum quidem latus circa angulum rectum ſemidiametro circuli, alterum verò peripheriæ eiuſdem circuli eſt æquale, quia eiuſmodi triangulum non poteſt eſſe maius nec minus area circuli, & in libro de quadratura Parabolæ, demonſtrat illam eſſe ſeſquitertiam trianguli eamdem baſim & verticem eumdem cum ipſa habentis, quoniam nec maior nec minor eſſe poteſt. Fremat ergo quantum voluerit Ioſephus Scaliger & debacchetur in hanc ratiocinandi formam, nos eâ tamquam certâ & indubitatâ vtemur tantorum virorum imitatione.

Atque hæc quidem totius operis cauſam ordinem & methodum ſpectant de reliquo, quod Algebram appellaui Nouam Clauem, nolui ortus antiquitatem nobilitatemue denegare, cum hæc

ab annis, vt minimum, mille ſupra quadringentos ſexaginta, originis ſuæ caput & fontem arceſſat ad vſque Diophantum Alexandrinum, qui à Raphaele Bombello fertur vixiſſe ſub Imperatore Antonino, ab aliis etiam ante Chriſtum natum: ſed nouam dixi quod nemo hactenus exactè probarit quam latè in Geometricis illius pateret vſus: hoc quiſque poterit diuerſimode experiri aſſumendo difficillimas praxes in exemplum eaſque reſoluendo primùm Algebricè vt ad Geometriam faciat gradum. Ne ergo puta nos in problematis enodatis quaſi columnis quibuſdam herculeis induſtriæ tuæ metas appoſuiſſe; Clauem damus, non fines præſcribimus ædificio, neque poſtquam recluſerimus aditum, vltra ad huius artis penetralia ingredientes, vltro velut ductores ſequi nos pigebit.

FACVLTAS R. P. Prouincialis.

EGo Bartholomæus Iacquinotius Societatis Iesv in Prouincia Campaniæ Præpoſitus Prouincialis, opus quod inſcribitur, *Noua Geometriæ Clauis, Algebra*, iuxta Priuilegium eidem Societati à Regibus Chriſtianiſſimis Henrico III. 10. Maij, 1583. Henrico IV. 20 Decembris, 1606. & Ludouico decimo-tertio nunc regnante 14. Februarij 1611. conceſſum, quo Bibliopolis omnibus prohibetur ne libros ab hominibus noſtræ Societatis compoſitos, abſque Superiorum eius permiſſione imprimant, Permitto Michaeli Soly Bibliopolæ Pariſienſi, vt ad ſex primos annos imprimere ac liberè diuendere poſſit. Datum Barroduci, die 21. Octobris, anno 1642.

LEMMA-

LEMMATA
IN NOVAM GEOMETRIÆ CLAVIM.

SVperuacaneum mihi fuerat viſum condere eiuſmodi Lemmata; tùm quia per ſe ſe facilia ſunt, tùm quia ſparſim diuerſis in locis pleraque apud authores reperiuntur. Nihilominus tamen rogatus ab aliquibus, qui ea omnino neceſſaria eſſe iudicarunt, perſuaſi mihi vtcumque nihil me detracturum, ex totius operis maieſtate, ſi propter Tyrones, pauca præmitterem: & quoniam illa tantùm aſſumo in operationibus Algebricis quæ circa numeros verſantur, idcirco numerorum duntaxat faciam mentionem.

LEMMA I.

Si duorum numerorum inæqualium differentia addatur eorum ſummæ, fiet duplum maioris: ſi verò eorum ſummæ detrahatur, reſtabit duplum minoris.

SInt duo numeri inæquales, AB maior, & AD, minor eorumque differentia ſit CB. Dico primò ſi toti

DB, addatur ED, æqualis differentiæ CB, ſummam EB, fore duplam maioris AB, nam cum CB, ſit differentia AB & DA, erit AC, æqualis AD: igitur cum æqualibus AC & AD, addantur æquales CB & DE; erunt toti numeri AB & AE, æquales: igitur totus EB, ipſius A.B, duplus. Quod erat demonſtrandum.

E..D...A-
A...C..B

Dico deinde, ſi à ſummâ DB, tollatur differentia CB, reſiduum DC, forè duplum minoris AD. Quia enim AB & AE oſtenſi ſunt æquales, ſi ab illis tollantur æquales CB, DE, erunt & reliqui AC & DA, æquales. Igitur totus DC, ipſius AD, duplus erit. Quod erat demonſtrandum.

LEMMA II.

Si fuerint quotcumque numeri continuò creſcentes vel decreſcentes, ſumma differentiarum intermediarum æquabitur differentiæ extremorum.

2. 3. 4. 5. 6.
1. 1. 1. 1. 2/4

SInt tres numeri AB, BC, CG, continuò creſcentes, vel CG, BC, AB, continuò deſcreſcentes, ſitque DC, differentia AB & BC; ſimilitérque ſit FG, differentia BC & CG. Dico differentias DC & FG, æquari differentiæ extremorum AB & CG, quia enim DC, eſt differentia AB & BC, erit AB, æqualis BD. Item quia FG, eſt differentia BC & CG, erit BC, æqualis CF. Tollatur ergo ex CF, numerus CE, æqualis BD; erit EF, æqualis DC. Et proinde EG, eſt ſumma differentiarum: ſed quia CE, eſt æqualis BD, hoc eſt AB, erit etiam idem numerus EG, differentia extremorum. Ergo trium numerorum continuò creſcentium vel decreſcentium, differentia extremorum æqualis erit ſummæ differentiarum intermediarum: quod erat demonſtrandum.

A..B..D-
D.C..E.F-
F,..G

Sint iam quatuor numeri A,B,C,D, differentia extre-

morum A D, æquabitur differentiis primi & tertij, itémque tertij & quarti, per priorem demonſtrationem: ſed per eamdem, differentia primi & tertij æquatur differentiis primi & ſecundi, itémque ſecundi & tertij. Ergo differentia extremorum A D, æqualis eſt omnibus differentiis intermediis. Eodemque modo demonſtrabitur de quotcumque numeris. Igitur patet propoſitum. A.1.B.3.C.6. D.9.

LEMMA III.

Si numerus ſecetur in quotlibet partes: quadratum totius æquatur quadratis partium, & duplo planorum qui fiunt ex qualibet parte in quamlibet ex aliis.

HOc demonſtratur à Gaſpare Bacheto, l. 2. Poriſm. in Diophant. propoſ. 1. & ſequitur ex quartâ ſecundi quam Clauius probat in numeris ad propoſ. 14. libri noni. Cum enim quadratum totius A C, æquetur quadratis partium A B, B C, & duplo plani ex A B in B C. Si duobus illis numeris adiiciatur tertius C D, erit etiam quadratum A D, æquale quadratis A C & C D, plus duplo plani ex A C & C D, hoc eſt plus duplo planorum ex A B in C D, & B C in C D, igitur quadratum totius A D, æquatur quadratis partium A B, B C, C D, & duplo planorum ex A B in B C, ex A B in C D, & ex B C in C D. Similiter ſi numerus ſecetur in quatuor partes, idem oſtendetur aſſumendo quod demonſtratum eſt de ſectione in tres partes: & ſic in infinitum. Igitur ſi numerus ſecetur in quotlibet partes, quadratum totius æquabitur quadratis partium, & duplo planorum ex qualibet parte in quamlibet. Quod erat demonſtrandum. A..B...C. C...D

LEMMA IV.

Si fuerint duo numeri inæquales, differentia quadratorum ab illis ortorum, æquatur quadrato differentiæ illorum, & duplo plani ex minore in differentiam.

A. B..C...D

SInt duo numeri inæquales A B, B D, & differentia illorum C D. Dico differentiam quadratorum A B, B D, æquari quadrato C D, plus duplo plano ex minore A B, in differentiam G D. Nam quia C D, eſt differentia duorum A B. B D, erit A B, æqualis B C, & proinde duplum planum ex B C in C D, æquabitur duplo plano ex A B in C D. Sed quadratum B D, æquatur quadratis partium B C & C D, plus duplo plano ex B C, in C D. Igitur quadratum B D, æquatur etiam quadratis A B & C D, plus duplo plano ex A B in C D. Ergo differentia quadratorum A B & B D, eſt æqualis quadrato differentiæ C D, plus duplo plano ex A B, in C D. Quod erat demonſtrandum.

3. *Huius.*

LEMMA V.

Si fuerint duo numeri inæquales, planum ſub ſummâ in differentiam illorum, æquabitur interuallo quadratorum ab illis ortorum.

SInt duo numeri inæquales A B, B D, & illorum differentia C D. Dico planum ſub ſummâ A D, in differentiam C D, æquari interuallo quadratorum A B, & B D. Nam vt mox probatum eſt, interuallum quadratorum a duobus numeris A B & B D, ortorum, æquatur quadrato differentiæ C D, & duplo plani ex A B in C D. Igitur cum B C, ſit æqualis A B, erit quoque dif-

4. *Huius.*

A..B..C-C...D

ferentia quadratorum A B & B D, æqualis planis ex A B in C D, ex B C in C D, & ex C D, in C D, hoc eſt plano totius A D in C D. Quod erat demonſtrandum.

LEMMA VI.

Si fuerint quotlibet numeri continuè proportionales, planum ſub extremis æquatur plano ſub duobus quibuſlibet ab extremis æqualiter diſtantibus: atque etiam quadrato medij, ſi multitudo fuerit impar.

HOc demonſtratur à Bacheto l. 1. Poriſm. in Dioph. propoſ. 2. & fundatur tota demonſtratio in propoſitionibus 19. & 20. libri ſeptimi elementorum. Sint enim quotlibet numeri A, B, C, D, E, continuè proportionales. Quoniam eſt vt A ad B, ita D ad E, erit planum ex A in E, ſub extremis æquale plano ex B in D, ſub mediis. Similiter quoniam eſt vt B ad C, ita C ad D, erit planum ſub extremis B D, æquale quadrato medij C. Sed iam oſtenſum eſt planum ſub B D, æquari plano ſub A E. Ergo quadratum C, erit etiam æquale plano ſub A E. Igitur ſi fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.

A 3. B 6. C 12. D 24. E 48.

19. Septimi. 20. Septimi.

LEMMA VII.

Si fuerint quotlibet numeri continuè proportionales, multitudine impari, quadratum ſummæ extremorum vel quorumlibet duorum æqualiter ab extremis diſtantium, æquabitur quadratis extremorum, vel aliorum duorum, plus duplo quadrati medij.

ENimuerò ex Lemmate præcedenti planum ſub extremis vel ſub duobus quibuſlibet ab extremis æ-

6. Huius. qualiter diſtantibus æquatur quadrato medij: ſed ex alio 5. Huius. Lemmate ſuperiori quadratum ſummæ extremorum, vel aliorum duorum æquatur quadratis extremorum plus duplo plani ſub extremis; ergo cum planum illud ſit ęquale quadrato medij, erit quadratum ſummæ extremorum æquale quadratis extremorum plus duplo quadrati medij: eodémque modo diſcurrendum de aliis. Igitur patet propoſitum.

LEMMA VIII.

Si fuerint quotcumque numeri continuè proportionales multitudine impari, quadratum ſummæ eorum qui ſunt in locis imparibus æquatur quadratis ſingulorum, & quadrato ſummæ eorum qui ſunt in paribus locis.

SInt primùm tres numeri A,B,C, continuè proportionales, dico quadratum ſummæ A C, æquari quadratis ſingulorum A, B, C, plus quadrato B. Sequitur ex præcedenti Lemmate.

Sint deinde quinque numeri A,B,C,D,E. Dico quadratum ſummæ A, C, E, æquari quadratis ſingulorum A,B,C,D,E, & quadrato ſummæ B D, nam quadratum 5. Huius. ſummæ A,C, E, æquatur quadrato ſummæ A C, quadrato E, & duplo plano ex ſummâ A C in E: quadra- 3. Huius. tum vero A C, æquatur quadratis A & C, plus duplo 7. Huius. quadrato B, & planum ex ſummâ A C in E, æquatur qua- 20 Septimi. A 3. B 6 C 12 D. 24. E 48. dratis D, & C. Igitur quadratum ſummæ A,C,E, æquatur quadratis ſingulorum & quadratis B D, & duplo quadrato C. Sed quadratum ſummæ B D, æquale eſt qua- 7. Huius. dratis B D, & duplo quadrati C. Ergo quadratum ſummæ A,C,E, æquatur quadratis ſingulorum & quadrato ſummæ B D. Quod erat demonſtrandum.

LEMMA IX.

Si fuerint quotcumque numeri continuè proportionales multitudine impari, quadratum ſummæ omnium æquatur quadratis ſingulorum, plus duplo plano ex ſummâ omnium in ſummam eorum qui ſunt in locis paribus.

SInt primùm tres numeri continuè proportionales A,B,C: dico quadratum ſummę A,B,C, ęquari quadratis ſingulorum A,B,C, plus duplo plano ex ſummâ A,B,C, in B. Quadratum enim ſummę A,B,C, ęquatur quadratis A,B,C, & duplo planorum quę fiunt ex qualibet parte in quamlibet ex aliis, hoc eſt duplo planorum ex B in A, ex B in C, & ex A in C, hoc eſt quadrati B, igitur duplum plani ex B, in ſummam A,B,C, eſt ęquale duplo planorum quę fiunt ex qualibet parte in quamlibet ex aliis. Ergo quadratum ſummę A,B,C, ęquatur quadratis ſingulorum plus duplo plani ex ſummâ omnium A,B,C, in B. Quod erat demonſtrandum. A 1. B 2 C 4. D 8 E 16. 3. Huius. 6 Huius.

Sint iam quinque numeri A,B,C,D,E, dico quadratum ſummæ A,B,C,D,E, æquari quadratis ſingularum plus duplo plani ex ſummâ omnium in ſummam B D. Nam quadratum ſummæ omnium æquatur quadratis partium & duplo planorum ex qualibet parte in quamlibet ex aliis; hoc eſt duplo planorum ex A in B, ex A in C, ex A in D, ex A in E, ex B in C, ex B in D, ex B in E, ex C in D, ex C in E, ex D in E: ſed iiſdem omnibus æquatur duplum plani ex ſummâ omnium in ſummam B D, nam planum ex ſummâ omnium in B, æquale eſt plano ex A in B, ex quadrato B (hoc eſt plano ex A in C) ex B in C (hoc eſt ex A in D) ex B in D (hoc eſt ex A in E) & ex B in E: Similiter planum ex ſummâ omnium in D, æquatur planis ex D in E, ex quadrato D (hoc eſt 3. Huius. 6. Huius. 6. Huius.

plano ex C in E) ex D in C, ex D in B, & ex D in A (hoc eſt B in C) igitur quadratum ſummæ omnium æquatur quadratis ſingulorum plus duplo plano ex ſummâ omnium in ſummam eorum qui ſunt in locis paribus. Quod erat demonſtrandum.

LEMMA. X.

Si fuerint quotcumque numeri continuè proportionales multitudine pari, quadratum ſummæ omnium æquabitur quadratis ſingulorum, & duplo plani ex ſummâ omnium, dempto maiori in ſummam eorum qui ſunt in locis paribus, incheoando numerationem à minore extremo.

SInt primùm quatuor numeri continuè proportionales A, B, C, D, dico quadratum ſummę omnium æquari quadratis ſingulorum plus duplo plano ex ſummâ A 2 B 4 C 8. D 16. A, B, C, in ſummam B D. Nam quadratum ſummę omnium ęquatur quadratis ſingulorum plus duplo planorum 3. Huius. rum ex quolibet in quẽlibet ex aliis, hoc eſt duplo planorũ ex A in B, ex A in C, ex A in D, ex B in C, ex B in D, ex C, in D. Sed duplum illorum planorum æquale eſt duplo plano ex ſumma A, B, C, in ſummam B D. nam planum ex ſummâ A, B, C in B, ęquale eſt plano ex A in B, ex 6. Huius. quadrato B (hoc eſt plano ex A in C) ex B in C (hoc eſt ex A in D) ſimiliter planum ex ſummâ A, B, C in D, ęquatur planis ex A in D (hoc eſt B in C) ex B in D, ex C in D. Igitur quadratum ſummę A, B, C, D, ęquatur quadratis ſingulorum plus duplo plani ex ſummâ A, B, C, in ſummam B, D, quod erat demonſtrandum. Eodem modo procedet demonſtratio de ſex, octo, decem, &c. Numeris proportionalibus.

LEMMA XI.

LEMMA XI.

Si fuerint quotcumque numeri continuè proportionales, differentiæ illorum erunt in continuâ & eâdem cum numeris proportione.

SInt quatuor numeri A,B,C,D, continuè proportionales. Dico differentiam A & B eſſe ad differentiam B & C, ſicut differentia B & C ad differentiam C & D, & inſuper tres illas differentias eſſe in ratione numerorum: nam ſupponendo A eſſe maiorem extremum, cum ſit vt A ad B, ita B ad C, erit diuidendo vt differentia A & B ad B; ita differentia B & C ad C. Et permutando, vt differentia A & B ad differentiam B & C; ita B ad C. Similiter diuidendo & permutando, oſtendetur eſſe differentiam B & C ad differentiam C & D ſicut C ad D, hoc eſt B ad C. Ergo vt B ad C; ita differentiæ ſunt inter ſe. Proindéque ſunt in continuâ & eâdem cum numeris ratione. Quod erat demonſtrandum. A 2. B 4. C 8; D 16.

LEMMA XII.

Si fuerint tres numeri proportionales, differentia quadratorum ab extremis, æqualis erit quadrato differentiæ extremorum plus dupla quadratorum medij & minoris differentiæ.

SInt tres numeri proportionales A, B, C. Dico differentiam quadratorum A & C æqualem fore quadrato differentiæ A & C plus dupla quadratorum medij B & minoris C differentiæ: nam quia eſt vt A ad B; ita B ad C, erit vt differentia A & B ad differentiam B & C; ita B ad C. Et componendo vt differentia A & B plus differentia B & C, hoc eſt, vt differentia extremorum A 8 B 4. C 2; Lem. 11. huius. 1. Huius.

6. Huius. ad differentiam medij B & minoris C, ita B & C ad C. Igitur planum ſub differentia A & C in C æquatur plano ſub differentia B & C in ſummam B C. Ergo duplum planum ſub differentia A & C in C æquale erit duplo plano ſub differentia B & C in ſummam B C. Sed quadratum differentiæ A & C plus duplo plano ſub differentia A & C in C æquatur interuallo quadratorum A & C; ergo idem quadratum differentiæ A & C plus duplo plano ſub differentia B & C in ſummam B & C æquale erit differentiæ quadratorum ab extremis A & C. Atqui planum ſub differentia B & C in ſummam B & C æquatur differentiæ quadratorum B & C. Ergo differentia quadratorum ab extremis A & C eſt æqualis quadrato differentiæ extremorum plus dupla quadratorum medij & minoris differentia. Quod erat demonſtrandum.

4. Huius.

5. Huius.

LEMMA XIII.

Si fuerint tres numeri continuè proportionales planum ſub minori, & differentia extremorum æquabitur differentiæ quadratorum mediis minoris.

Sit maior extremus A B & C B minor. Dico planum A, C, B, æquari differentiæ quadratorum medij & minoris. Nam quia ſunt tres numeri continuè proportionales quorum extremi ſunt A B & C B, erit planum ſub A B in C B æquale quadrato medij, ſed planum ex A B in C B æquatur plano ex A C in C B & quadrato C B. Igitur quadratum medij eſt æquale plano ex A C in C B & quadrato C B; at ſi inde tollas quadratum minoris C B, remanebit planum ex A C in C B. Ergo differentia quadratorum medij & minoris æqualis eſt plano ex minore C B in differentiam extremorum A C. Quod erat demonſtrandum.

A..C.B

6. Huius.

LEMMA XIV.

Si fuerint tres numeri proportionales, planum ſub maiori in differentiam extremorum æquatur interuallo quadratorum medij & maioris.

SIt ex tribus numeris proportionalibus A B maior & C D minor. Dico planum ſub A B in A C æquari interuallo quadratorum medij & maioris, nam planum ex maiore A B in minorem C B erit æquale quadrato medij: ſed quadratum A B eſt æquale planis ex A B in C B, & ex A B in A C, igitur ſi ex quadrato maioris A B tollas quadratum medij, reſtabit planum ex A B in A C. Ergo differentia quadratorum medij & maioris æquatur plano ex maiore A B in differentiam extremorum A C. Quod erat demonſtrandum.

A.. C. B
6. Huius.

LEMMA XV.

Si fuerint tres numeri proportionales, differentia quadratorum medij & maioris æquatur quadrato differentiæ extremorum, & differentiæ quadratorum medij & minoris.

SIt A B maior & C B minor vt ſuprà. Dico differentiam quadratorum medij & maioris æquari quadrato differentiæ extremorum A C plus differentia quadratorum medij & minoris. Nam planum ſub maiore A B & differentia extremorum A C æquatur differentiæ quadratorum medij & maioris. Sed planum ſub A B in A C eſt æquale quadrato A C & plano ex A C in C B. Planum autem ex A C in C B æquatur interuallo quadratorum medii & minoris. Igitur interuallum quadratorum maioris & medij eſt æquale quadrato differentiæ

A... C. B
14. Huius.
13. Huius.

extremorum plus differentia quadratorum medij & minoris. Quod erat demonſtrandum.

LEMMA XVI.

Si fuerint tres numeri proportionales, & ex differentia quadratorum ab extremis tollatur quadratum differentię extremorum, remanebit duplum differentiæ quadratorum medij & minoris.

Sequitur ex Lemmate duodecimo huius, in quo demonſtrauimus differentiam quadratorum ab extremis æquari quadrato differentiæ extremorum plus dupla quadratorum medij & minoris differentia.

LEMMA XVII.

Si fuerint tres numeri proportionales, & ex differentia quadratorum medij & maioris tollatur differentia quadratorum minoris & medij, reſtabit quadratum differentiæ extremorum.

Sequitur ex Lemmate, decimo quinto huius, in quo demonſtrauimus quadratum differentię extremorum plus differentia quadratorum minoris & medii eſſe æquale interuallo quadratorum medii & maioris.

LEMMA XVIII.

Si fuerint quatuor numeri continuè proportionales, ſumma mediorum eſt medio loco proportionalis inter ſummam primi & ſecundi, & ſummam tertij & quarti.

Sint quatuor numeri A,B,C,D, continuè proportiona-

les. Dico ſummam B C eſſe medio loco proportionalem inter ſummam A B & ſummam C D. Cum enim ſit vt A ad B; ita B ad C, erit componendo vt A B ad B; ita B C ad C. Et permutando, vt A B ad B C; ita B ad C. Similiter cum ſit vt B ad C; ita C ad D, erit componendo vt B C ad C; ita C D ad D: & permutando vt B C ad C D; ita C ad D. Sed vt C ad D; ita B ad C, ergo erit vt A B ad B C; ita B C ad C D. Quod erat demonſtrandum. A 2. B 4. C 8. D 16.

LEMMA. XIX.

Si ſumma quatuor numerorum continuè proportionalium ſecetur in duas partes quarum planum æquetur quadrato ſummæ mediorum: illæ partes erunt ſumma primi & ſecundi, itémque ſumma tertij & quarti.

Sit numerus A ſumma quatuor continuè proportionalium, diuiſus in duas partes B & C quarum planum D æquetur quadrato ſummæ mediorum E. Dico B fore ſummam primi & ſecundi, & C ſummam tertij & quarti. Sit enim, ſumma primi & ſecundi F, ſumma vero tertii & quarti G. Ergo eſt vt F ad E; ita E ad G. Igitur planum ex F in G æquabitur D. Sed eidem D æquatur planum ex B in C. Ergo planum B in C eſt æquale plano F in G. Et proinde vt B ad C, ita F ad G. Et componendo vt B C ad C; ita F G ad G. Et permutando vt B C ad F G, ita C ad G. Sed tam B C quam F G æquatur A, ergo C æquatur G. Similiter probabitur B æquari F. Igitur B eſt ſumma primi & ſecundi, C vero ſumma tertii & quarti. Quod erat demonſtrandum. A 15. B 3. C 12. D 36. F.... E 6. G. G.... 18. Huius. 6. Huius. 19. Septimi.

LEMMA XX.

Si fuerint quatuor numeri continuè proportionales, & differentia mediorum tollatur ex differentia extremorum, reſiduo diuiſo in duas partes quarum differentia mediorum ſit medio loco proportionalis: illæ duæ partes erunt differentia primi & ſecundi, itémque tertij & quarti ſigillatim.

SInt quatuor numeri continuè proportionales A, B, C, D. Sitque differentia extremorum E. Et differentia mediorum F. Tollatur F ex E & remaneat G diuidaturque G in duos quorum F ſit medius proportionalis. Dico duas illas partes ipſius G fore differentiam primi & ſecundi, itémque tertii & quarti ſigillatim. Nam cum A,B,C,D, ſint continuè proportionales & vt ſuppo-
A 2. B 4 C 8. nimus inæquales, continuò creſcunt vel decreſcunt, ergo
D 16. E 14. differentia extremorum E æquatur differentiis A & B, B
F 4. G 10. & C, C & D. Igitur quoniam ex E tollitur differentia
2. *Huius.*
11 *Huius.* mediorum F, reſiduum G eſt æquale differentiis A & B itémque C & D. Sed F eſt medius proportionalis inter differentias A & B, itémque C & D. Ergo ſi G diuidatur in duas partes inter quas F, ſit medio loco proportionalis, erunt illæ partes ſigillatim differentiæ primi & ſecun-
19 *Huius.* di, itémque tertii & quarti. Per ſimilem diſcurſum quo vſi ſumus in præcedenti propoſitione.

LEMMA XXI.

Si fuerint quatuor numeri continuè proportionales, ſumma quadratorum à ſingulis ad ſummam planorum ex primo in ſecundum, & tertio in quartum, erit vt ſumma omnium ad ſummam mediorum.

SInt quatuor numeri continuè proportionales ABCD.
Dico fore quadrata ſingulorum ad ſummam plano-
rum ex A in B & C in D; vt ſumma A,B,C,D, ad ſum- 6. *Huius.*
mam B C. Cum enim ſint continuè proportionales qua-
dratum B æquatur plano ex A in C. Ergo quadrata A A 1. B 4. C 8.
& B ſunt æqualia quadrato A & plano ex A in C, igitur D 16.
A multiplicans ſummam A C facit quadrata A & B. Item
A multiplicans B facit planum ex A in B. Ergo duo 17. *Septimi.*
producti habebunt inter ſe eamdem rationem quam
duo multiplicati. Igitur quadrata A B ad planum ex A
in B erunt vt A C ad B. Similiter oſtendetur quadra-
ta C D ad planum ex C in D, eſſe vt B D ad C. Sed
eſt vt A C ad B; ita B D ad C. Ergo vt A, B, C, D, 12. *Septimi.*
ad B C, ita quadrata A B ad planum ex A in B, vel
quadrata C D ad planum ex C in D. Igitur componen-
do plana, ſicut compoſiti ſunt numeri erunt quadrata ſin- 12. *Septimi.*
gulorum ad plana ex A in B & C in D, vt ſumma om-
nium numerorum, ad ſummam mediorum.

LEMMA XXII.

Si ex quadrato ſummæ quatuor numerorum continuè proportionalium tollantur quadrata ſingulorum, reſidui dimidium multa tum quadrato ſummæ mediorum ad quadrata ſingulorum eſt vt ſumma mediorum ad ſummam omnium.

SInt quatuor numeri continuè proportionales, A, B, C, D, & ex quadrato ſummæ omnium E tol-

A 1. B 2. C 4. D 8. E 225. F 85. G 140. H [illegible].

lantur quadrata ſingulorum F, ſitque reſiduum G, ex cuius dimidio tollatur quadratum ſummæ B C, & remaneat H. Dico H ad F, fore vt ſumma B C ad ſummam omnium. Nam quadratum ſummæ omnium E eſt æquale quadratis ſingulorum & duplo planorum ex A in B, ex A in C, ex A in D, ex B in C, ex B in D, ex C in D. Item planum ex A in C æquatur quadrato B, planum ex B in D æquatur quadrato C, & planum ex A in D æquatur plano ex B in C. Igitur reſidui G, dimidium erit æquale quadratis mediorum B & C plus duplo plani ſub mediis (hoc eſt quadrato ſummæ mediorum) & inſuper planis ex A in B, & C in D. Ergo ſi ex dimidio G tollatur quadratum ſummæ mediorum remanebit ſumma planorum, ex primo in ſecundum & tertio in quartum. Igitur vt E ad H: ita A,B,C,D, ad B C. Et inuertendo vt H ad F: ita B C ad A,B,C,D. Quod erat demonſtrandum.

(Margin: 3. Huius. — 3. Huius. — 11. Huius.)

LEMMA XXIII.

Si fuerint quatuor numeri proportionales, ſiue continuè, ſiue diſcretè, aggregatum quadratorum à ſingulis eſt æquale quadratis ſummæ extremorum, & interualli mediorum: itémque quadratis ſummæ mediorum & interualli extremorum.

Sit enim ex quatuor numeris proportionalibus A B, maior medius & B C medius minor, ergo quadratum A B æquatur quadratis A C, C B & duplo plano A,C,B. Igitur quadrata mediorum A B, B C æquantur quadrato A, duplo quadrato C B & duplo plano A,C,B. Sed duplum planum A,C,B, plus duplo quadrato C B, æquatur duplo plano ſub mediis A B & B C, ergo quadrata mediorum (imo & duorum quorumcumque numerorum) æqualia ſunt quadrato ipſorum differentiæ, plus

(Margin: 3. Huius. — A:..... C- C...B)

plus duplo plano ſub illis comprehenſo. Sed duplum planum ſub mediis æquatur duplo plano ſub extremis. Igitur quadratum differentiæ mediorum plus duplo plano ſub extremis plus quadratis extremorum eſt æquale quadratis ſingulorum: atqui quadratum ſummæ extremorum æquatur quadratis extremorum plus duplo plano ſub extremis, ergo quadratum ſummæ extremorum plus quadrato interualli mediorum æquatur quadratis ſingulorum. Similique plane diſcurſu probabitur quadratum ſummæ mediorum plus quadrato interualli extremorum æquari quadratis ſingulorum. Igitur ſi fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum. 19. ſeptimi. 3. Huius.

LEMMA XXIV.

Si fuerint quinque numeri continuè proportionales, planum ex medio in ſummam extremorum æquatur quadratis ſecundi & quarti.

Hoc iam probatum fuit in Lemmate 8. huius.

LEMMA XXV.

Si fuerint quinque numeri proportionales, erit vt ſumma eorum qui ſunt in locis imparibus ad medium, ita quadrata trium intermediorum ad medium.

Sint quinque numeri A B C D E continuè proportionales, dico eſſe vt A C E ad C; ita quadrata B C D, ad quadratum C. Eſt enim vt A ad C; ita quadratum B ad quadratum C. Item vt E ad C; ita quadratum D ad quadratum C. Ergo vt A E ad C; ita quadrata B D ad quadratum C & componendo vt A C E ad C; ita quadrata B C D ad quadratum C. Quod erat demonſtrandum 11. octaui.

LEMMA XXVI.

Si fuerint quinque numeri continuè proportionales, erit vt ſumma extremorum ad medium ita differentia quadratorum ab extremis ad differentiam quadratorum ſecundi & quarti.

SInt quinque numeri continuè proportionales A B C D E Dico fore vt differentia quadratorum A & E ad differentiam quadratorum B & D; ita A E ad C. Nam
24. Huius. planum ex A E in C æquatur quadratis B D ergo planum ex C in differentiam A & E æquabitur differentiæ quadratorum B & D. Sed planum ex ſummâ extremorum
5. Huius. in differentiam extremorum eſt æquale differentiæ quadratorum ab extremis. Ergo differentia extremorum multiplicans ſummam extremorum : & medium ſigillatim, facit differentiam quadratorum ab extremis, & differentiam quadratorum ſecundi & quarti. Igitur illæ duæ differentiæ quadratorum habebunt inter ſe eandem
17 ſeptimi. dem rationem quam numeri multiplicati. Et ita, erit vt ſumma extremorum ad medium; ita differentia quadratorum ab extremis ad differentiam quadratorum ſecundi & quarti. Quod erat demonſtrandum.

LEMMA XXVII.

Si fuerint quinque numeri continuè proportionales, erit vt quadrata ſecundi & quarti ad medium, ita differentia quadratorum ab extremis ad differentiam quadratorum ſecundi & quarti.

NAm in illâ ſerie eſt vt ſumma eorum qui ſunt in locis imparibus ad medium; ita quadrata trium
25. Huius. intermediorum ad quadratum medii. Ergo diuidendo vt ſumma extremorum ad medium; ita quadrata ſecun-

di & quarti ad quadratum medii. Sed vt ſumma extremorum ad medium; ita quoque differentia quadratorum ab extremis ad differentiam quadratorum ſecundi & quarti: ergo vt quadrata ſecundi & quarti ad quadratum medii; ita differentia quadratorum ab extremis ad differentiam quadratorum ſecundi & quarti. Quod erat demonſtrandum. *16 Huius.*

LEMMA XXVIII.

Si numerus quilibet ſecetur in duas partes, cubus totius æquatur cubis partium, & triplo ſolidi quod ſit ex toto numero in planum ſub partibus comprehenſum.

HOc theorema eſt fundamentum extractionis radicis cubicæ. Et demonſtratur à Bacheto l. 2. Poriſm. in Dioph. propoſ. 19. Facilèque poteſt oſtendi ex quarta ſecundi Euclidis, quæ demonſtratur à Clauio in numeris. l. 9. element. ad propoſ. 14.

LEMMA XXIX.

Duorum cuborum differentia æquatur cubo differentiæ laterum & triplo ſolidi quod ſit ex differentiâ laterum in planum ſub lateribus comprehenſum.

DEmonſtratur à Bacheto lib. 2. Poriſm. in Dioph. propoſit. 21. & ſequitur ex Lemmate 4. & 28. huius.

LEMMA XXX

Si fuerint tres numeri continuè proportionales ſolida ſub primo in aggregatum quadratorum ſecundi & tertij, ſub tertio in aggregatum quadratorum primi & ſecundi, ſub medio in aggregatum quadratorum ab extremis erunt inter ſe æqualia.

SInt tres numeri proportionales A, B, C, Dico ſoli-
da ex A in quadrata B & C, ex C in quadrata A & B,
A2.B4 C8. ex B in quadrata A & C fore æqualia: nam cum ſit vt A
11. octaui. ad B; ita B ad C erit vt A ad C. Ita quadratum A ad
quadratum B vel quadratum B ad quadratum C. Ergo
vt A ad C; ita quadrata A B ad quadrata B C. Ergo
12 ſept. ſolidum ſub extremis ex A in quadrata B C æquatur ſo-
19 ſept. lido ſub mediis ex C in quadrata A B. Ergo ſolidum ſub
primo in quadrata ſecundi & tertii æquatur ſolido ex ter-
tio in quadrata primi & ſecundi.

11. octaui. Similiter cum ſit vt primus ad tertium; ita quadratum
ſecundi ad quadratum tertii, erit componendo vt A &
C ad C; ita quadrata B & C ad quadratum C. Et per
conuerſionem rationis vt A C ad A; ita quadrata B C
ad quadratum B. Igitur ſolidum ſub extremis ex A C
in quadratum B, æquatur ſolido ſub mediis ex A in
19 ſep. quadrata B C. Sed hoc poſterius ſolidum iam eſt oſten-
ſum æquale ſolido ex C in quadrata A B. Igitur tria ſo-
lida ex A in quadrata B C, ex C in quadrata A B, ex A
C in quadratum B ſunt inter ſe æqualia. Quod eſt pro-
poſitum.

LEMMA XXXI.

Si fuerint quatuor numeri continuè proportionales, ſumma cuborum à mediis æqualis erit ſolido ſub ſummâ extremorum in planum ſub mediis vel extremis.

SInt quatuor numeri continuè proportionales A B C D Dico cubos B & C. Fore æquales ſolido ex ſummâ A D in planum ſub B in C vel A in D. Nam quia B multiplicans B & C producit quadratum B & planum ex B in C, erit vt quadratum B ad planum ex B in C; Ita B ad C, hoc eſt A ad B. Ergo productus ſub extre- *17. ſeptimi* tremis æquabitur ſolido ſub mediis, ſed productus ſub *19. ſept.* extremis eſt cubus B. Igitur cubus B eſt æqualis ſolido ex A in planum B C. Simili plane diſcurſu oſtendetur cubum C æquari ſolido ex D in planum B C. Hoc eſt *6. Huius* in planum A D. Ergo duo cubi B & C. æquabuntur ſolidis ex A in planum B C & ex D in planum B C igitur cubi B & C erunt æquales ſolido ex ſummâ extremorum A D in planum ſub mediis vel extremis. Quod erat demonſtrandum.

LEMMA XXXII.

Si fuerint quatuor numeri continuè proportionales, differentia cuborum à mediis æqualis eſt ſolido ſub differentia extremorum in planum ſub mediis vel extremis.

SInt quatuor numeri continuè proportionales A B C D ſitque differentia extremorum E, planum ſub mediis vel extremis F, & differentia cuborum à mediis *31. Huius.* G, Dico G æquari ſolido ſub E in F. nam ſumma cu- *A 2 B 4. C 8. D 16.* borum à mediis B, C, æquatur ſolido ex ſumma extre- *E 14. F 32. D448.*

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

morum A D in planum ſub mediis F. Sed ſumma ex-
1. Huius. tremorum A D æquatur differentiæ E & duplo mino-
ris A. Igitur ſumma cuborum à mediis B C æquatur
ſolido ex E plus duplo A in planum F. Sed vt proba-
31. Huius. tum eſt in præced. Solidum ſub A in planum F æqua-
tur cubo B. Igitur ſolidum ſub duplo A in F æqua-
bitur duplo cubo B. Et proinde ſumma cuborum à me-
diis æqualis eſt duplo cubo B plus ſolido ex E in F. Igi-
tur ſolidum ex E in F eſt differentia cuborum à mediis.
Quod erat demonſtrandum.

LEMMA XXXIII.

Si fuerint quatuor numeri continuè proportionales, cubus differentię extremorum plus triplâ cuborum à mediis differentia, æqualis eſt differentiæ cuborum ab extremis.

Facilis eſt demonſtratio huius theorematis ex præce-
dentibus, ſiquidem, differentia cuborum ab extre-
29. Huius. mis æquatur cubo differentiæ extremorum plus triplo
ſolidi ſub differentia extremorum in planum ſub extre-
mis; ſed ſolidum ſub differentia extremorum in planum
32. Huius. ſub mediis vel extremis æquatur differentiæ cuborum à
mediis; & ita triplum ſolidum ſub differentia extremo-
rum in planum ſub mediis vel extremis eſt æquale tri-
plæ cuborum à mediis differentiæ, ergo cubus diffe-
rentiæ extremorum plus tripla cuborum à mediis diffe-
rentia ęquatur differentiæ cuborum ab extremis. Quod
erat demonſtrandum.

LEMMA XXXIV.

Si fuerint quatuor numeri continuè proportionales, cubus ſummæ extremorum æquabitur cubis extremorum, plus triplo cuborum à mediis.

SEquitur hoc theorema ex præcedentibus; ſiquidem cubus ſummæ extremorum æqualis eſt cubis extremorum & triplo ſolidi ex ſumma extremorum in planum ſub extremis: *28 Huius.* At triplum illius ſolidi æquatur triplo cuborum à mediis: *31. Huius.* ergo cubus ſummæ extremorum æqualis eſt cubis extremorum plus triplo cuborum à mediis. Quod eſt propoſitum.

NOVÆ
CLAVIS
AD
GEOMETRIAM,
LIBER PRIMVS.

JN QVO PLVRIMA PROPONVNTVR Problemata hactenus non ſoluta, reſoluunturque tùm Algebricè, tùm Canonicè, tùm etiam Geometricè, in ſerie trium quantitatum continuè proportionalium.

PROPOSITIO I.

Data media quantitate ex tribus proportionalibus, & differentia extremarum, inuenire extremas.

ESTO datus numerus 4. pro medio ex tribus proportionalibus, & differentia extremorum data ſit 6. ponatur 1 R pro minore extremo, ergo maior
Lem. 6. erit 1 R + 6. Igitur quadratum medii 16. æquabitur producto ſub extremis 1 Q + 6 R & poſt debitam reductionem

nem 1 Q erit æquale 16-6 R & proinde valor vnius radicis eſt 2: nam dimidium numeri radicum eſt 3, cuius quadratum 9 additum numero abſoluto 16 facit ſummam 25: cuius radix quadrata 5 multata dimidio numeri radicum 3, relinquit 2 pro minore extremo quæſito.

Aliter ponatur 1 R pro maiori extremo. Ergo minor erit 1 R-6. Igitur quadratum medij dati 16 æquabitur producto ſub extremis 16-6 R. Et poſt debitam reductionem 1 Q æquale erit 16†6 R & proinde 1 R eſt 8. nam dimidium numeri radicum eſt 3; cuius quadratum 9 additum numero abſoluto 16, facit ſummam 25, cuius radix quadrata 5 addita dimidio numeri radicum, exhibet 8 pro maiore extremo.

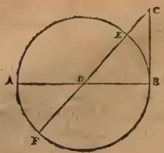
Semel moneo me, deinceps non repetiturum methodum extrahendi radices ex numeris compoſitis vel diminutis; ſed ſtatim inuentâ æquatione inter illos & vnum quadratum, concludam valorem radicis primò poſitæ. Hic igitur paululum ſiſte, mi Lector, & diligenter aduerte quomodo procreati ſint duo extremi, & videbis in praxi vtraque operationes certas & determinatas: nam quadratum dimidiæ differentiæ additum eſt cum quadrato medij proportionalis dati, & huius ſummæ radix quadrata in priori operatione multata eſt dimidio differentiæ vt inueniretur minor extremus, in poſteriori verò aucta eſt eodem dimidio vt inueniretur maior extremus. Et in qualibet alia operatione eiuſdem ſpeciei ſemper occurrent eiuſmodi multiplicationes, ſubſtractiones, additiones. Quare inde ad ſolutionem problematis propoſiti formabitur iſte.

Canon vniuerſalis.

CApe dimidium differentiæ datæ, & eius quadrato adde quadratum medij proportionalis dati: huius enim ſummæ radix quadrata, multata & aucta dimidio

datæ differentiæ, exhibebit minorem & maiorem extremum.

Hinc Effectio Geometrica.



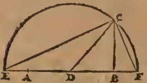
SIt data ex tribus lineis continuè proportionalibus media B C, & differentia extremarum A B. Coniungantur illæ ad angulos rectos & diuiſa A B bifariam in D, ducatur D C. Tum centro D, interuallo D B deſcribatur circulus ſecans C D productam in punctis E & F.

Manifeſtum eſt totum illud opus Geometricum effectum eſſe ex præuio Canone, ſicut Canon ex præuia operatione, nam quadratum dimidiæ differentiæ D B additur quadrato mediæ B C, & fit quadratum D C, cuius radix quadrata, ſiue latus, eſt linea D C, quæ multata dimidio differentiæ datæ D E relinquit E C, aucta vero eodem dimidio facit C F. *47 primi.*

Dico autem F C, & C E fore extremas quæſitas: nam quia B C ducitur ab extremitate diametri ad angulos rectos, cadet extra circulum eritque tangens, ac proinde eius quadratum æquabitur rectangulo F C E. Igitur tres illæ F C, C B, E C, erunt continuè proportionales: extremarum autem F C, E C, differentia eſt F E, hoc eſt ipſi æqualis A B. Ergo data differentia extremarum A B & media B C. Inuentæ ſunt extremæ F C. E C. Quod erat faciendum & demonſtrandum. *16 tertii. 36 tertii. 17. ſexti. 15. definit. primi.*

Aliter paulo elici poteſt effectio Geometrica ex eodem Canone, hoc modo. Duæ lineæ datæ A B & B C coniungantur vt prius ad angulos rectos & diuiſa A B

biſariam in D, ducatur D C. Tum centro D, interuallo D C, fiat ſemicirculus ſecans productam A B in punctis E F.



Manifeſtum eſt obſeruari rurſus ſingulas Canonis partes, ſiquidem quadratum D B additur B C quadrato, & fit quadratum D C, hoc eſt E D, qua aucta dimidio differentiæ datæ fit E B, multata vero eadem D C hoc eſt D F eodem dimidio D B, relinquitur B F.

Dico autem E B, B F fore extremas quæſitas. Ductis enim E C, C F fiet triangulum E C F, rectangulum *31. tertij.* quia angulus E C F eſt in ſemicirculo & proinde rectus: *8. ſexti.* Ergo quoniam demittitur C D perpendicularis ad baſim E F, Fient triangula E B C & C B F ſimilia. Igitur *4. ſexti.* eſt vt E B ad B C; ita B C ad B F. Eſt autem extremarum E B, B F, differentia A B, quia E A eſt æqualis B F eo quod vtraque remaneat tollendo æquales A D & D B ex æqualibus E D, D F. Igitur data media B C, & differentia extremarum A B, inuentæ ſunt extremæ E B & *primi.* B F. Quod erat propoſitum.

PROPOSITIO II.

Data media ex tribus quantitatibus proportionalibus, & ſumma extremarum, diſtinguere extremas.

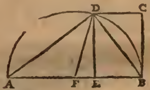
ESto datus numerus 4 pro medio proportionali ex tribus & 10 pro ſumma extremorum. Ponatur vnus

extremus R. igitur alter erit 10-1 R. Horum productus eſt 10 R-1 Q, qui proinde æquabitur 16, quadrato medij
Lem. 6. dati. Et poſt debitam reductionem erit 1 Q æquale 10 R-16. Igitur 1 R eſt 2 vel 8: ſiquidem numeri diminuti in quibus abſolutus adficitur ſigno - habent duplicem radicem vt docuimus in præceptis Algebræ.

Hinc Canon.

CApe dimidium ſummæ datæ, & ex eius dimidij quadrato tolle quadratum medij proportionalis: huius enim reſidui radix quadrata, addita & detracta ſupradicto dimidio exhibebit extremos ſigillatim.

Hinc Effectio Geometrica.



SIt data ſumma extremarum A B & media B C. Coniungantur illæ ad angulos rectos, & facto ſupra A B ſemicirculo ducatur C D parallela B A, donec occurrat peripheriæ in puncto D (ſi non poſſet occurrere, problema foret impoſſibile vt patet ex 17. ſexti, & 5. ſecundi elementorum) ex quo puncto D, linea D E perpendiculariter demittatur ad A B.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes, ſiquidem ducta D F ad centrum ſemicirculi C, erit æqualis dimidio ſummæ A B, & ex eius quadrato
47. primi. tollitur quadratum D E remanetque F E quadratum, cuius latus ſiue radix eſt linea F E, quæ addita & detracta ſemidiametro exhibet A E & E B.

Dico autem A E, EB fore extremas quæſitas. Quo-
28 primi. niam enim B C & E D ſunt eidem A B perpendiculares, erunt inter ſe parallelæ: & quia illæ eædem ſunt inter
33. primi. parallelas B E, C D, erunt inter ſe æquales. Atqui iam

probatum eſt in propoſ. præced. lineam E D eſſe mediam proportionalem inter AE & EB, patetque illud ex libro ſexto Element. Igitur data ſumma extremarum A B ex tribus proportionalibus, & media B C, diſtinximus extremas A E, E B. Quod erat faciendum & demonſtrandum. *8. ſexti.* *13. ſexti.*

PROPOSITIO III.

Data prima quantitate ex tribus proportionalibus & aggregato ſecundæ & tertiæ, diſtinguere ſingulas.

ESto datus numerus 2. primus ex tribus proportionalibus & aggregatum reliquorum ſit 12. ponatur pro medio 1 R. Erit ergo tertius 12-1 R. Ergo quadratum medij 1 Q æquabitur producto ſub extremis 24-2 R. *Lem. 6.* Igitur 1 R ſiue medius eſt 4. eruntque ſinguli 2. 4. 8.

Hinc Canon.

CApe dimidium primi dati, & eius quadratum iunge cum producto ſub primo in ſummam reliquorum datam; huius enim aggregati radix quadrata multata dimidio primi exhibebit medium. Vnde tertius non latebit.

Hinc Effectio Geometrica.



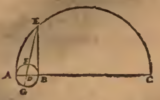
SIt linea A B prima ex tribus proportionalibus, ſiue maior extrema, ſiue minor. Et B C compoſita ex duabus reliquis. Ponantur illæ in directum, & ſupra totam A C deſcribatur ſemicirculus, & ex puncto

B erigatur perpendicularis B E. Tum diuiſa A B bifariam in D, centro D, interuallo D E, fiat alter ſemicirculus ſecans priorem in E, & lineam C A productam in punctis G & F.

Manifeſtum eſt in hac praxi obſeruatas eſſe ſingulas Canonis noſtri partes, ſiquidem quadratum B E, quod
8. ſexti. eſt æquale rectangulo A B C iungitur quadrato D B, &
17. ſexti.
47 primi. fit quadratum D E, à cuius latere D E hoc eſt DG, ſublata D B. Relinquitur B G.

Dico autem B G fore mediam quæſitam & conſequen-
8 ſexti. ter G C tertiam. Quadratum enim B E æquatur tum re-
17. ſexti. ctangulo A B C, tum rectangulo F B G. Siquidem E B demittitur perpendiculariter ex puncto E quod eſt com-
1. Axiom. primi. mune vtrique peripheriæ: igitur illa duo rectangula A
16 ſexti. BC & F B G ſunt inter ſe æqualia; & proinde erit reciprocè vt linea C B ad G B; ita F B ad A B. Et diuidendo, vt C G ad GB; ita FA ad A B. Atqui F A æqualis eſt B G, propterea quod ſublatis duabus æqualibus A D & D B ex duabus æqualibus D F, & D G remanent F A & BG. Igitur eſt vt C G ad GB; ita BG ad A B. Datâ ergo prima A B ex tribus proportionalibus à ſumma reliquarum B C. Diſtinximus ſingulas. Quod erat faciendum.

Aliter poteſt ex eodem Canone elici effectio Geometrica hoc modo. Fiant omnia vt pri⁹ niſi quod loco poſterioris ſemicirculi, deſcribi debet cẽtro D interuallo DB circulus integer ſecans productam E D in pũctis F G.



Manifeſtum eſt vt prius obſeruari ſingulas Canonis partes.

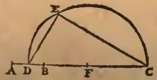
Dico autem F E fore mediam quæſitam. Nam cum

B E ſit perpendicularis ad extremitatem diametri erit tangens. Ergo quadratum B E æquabitur rectangulo G E F. Sed idem quadratum B E æquale eſt rectangulo A B C. Igitur rectangula G E F & A B C ſunt inter ſe æqualia. Ergo erit reciprocè vt B C ad F E; ita G E ad F G. Et diuidendo vt B C multata F E ad F E; ita F E ad F G hoc eſt A B. Quod erat propoſitum.

16 tertij.
36. tertii.
8. ſexti.
17. ſexti.
16. ſexti.

Appendix.

POteſt hoc idem problema ſic ſolui. Data ex prima A B & ſumma reliquarum B C. Diuidatur A B bifariam in D & ſupra D B fiat ſemicirculus in quo inſcribatur C E æqualis B C, connectaturque E D, cui æqualis ſumatur D F.



Dico B F fore mediã & F C tertiã. Hæc praxis facile demonſtrari poteſt, ſumiturq; iterum ex Algebra, ſiquidem ponatur alter extremus numerus 1 R ergo medius erit 12-1R. Fietque tandem 1 Q æquale 26 R-144. Vnde Canon. Ex quadrato ſummæ datæ & dimidii primi tamquam vnius tolle quadratum ſummæ datæ: reſidui radix quadrata tollatur ex ſumma data, & dimidio primi tamquam vno, reſtabitq; tertius numerus quæſitus.

PROPOSITIO IV.

Data minore extrema de tribus quantitatibus proportionalibus, & differentia reliquarum inuenire ſingulas.

ESto datus numerus 4 pro minore extremo, & 3 pro differentia reliquorum. Ponatur medius 1 R, ergo 1 R † 3 erit maior extremus. Et proinde quadratum medii 1 Q æquabitur producto ſub extremis 4 R † 12. Igitur 1 R ſiue medius eſt 6. ſingulique erunt 4. 6. 9.

Lem. 6.

Hinc Canon.

QVadratum quod fit à dimidio minoris extremi adde producto ſub minori & differentia data. Huius aggregati radix quadrata, ſupradicto addita dimidio exhibebit medium quæſitum. Vnde alter extremus non latebit.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt A B minor extrema, & differentia reliquarum duarum B C. Ponantur illæ in directum & ſupra totam A C fiat ſemicirculus, erectaque perpendiculari ex puncto B, diuidatur A B bifariam in E. Ex quo tamquam centro ad interuallum E D, fiat ſecundus ſemicirculus ſecans priorem in D & rectam A C in punctis F G.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes, ſiquidem ducta E D rectangulum A B C, hoc eſt quadratum B D, additur quadrato E B, & fit quadratum E D, cuius latus E D, ſiue F E additur E B dimidio minoris datæ, & fit F B.

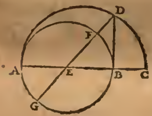
8. ſexti. 17. ſexti. 47. primi.

Dico



Dico autem F B fore mediam quæſitam: nam quadratum B D æquatur rectangulo A B C ex vna parte, itemque ex alia rectangulo F B G. Ergo illa duo rectangula inter ſe ſunt æqualia: & proinde eſt reciprocè vt B C ad B F ita B G ad B A & componendo vt C F ad B F; ita G A, hoc eſt B F ad A B. Quod erat faciendum & demonſtrandum. *16. ſexti.*

Aliter paulo res demonſtrabitur & efficietur in hunc modum. Peractis omnibus vt prius loco poſterioris ſemicirculi, fiat centro E interuallo E B circulus integer.



Manifeſtum eſt vt prius obſeruari ſingulas Canonis partes.

Dico autem G D fore mediam quæſitam, data A B prima & B C differentia reliquarum. Cum enim B D ſit perpendicularis ad extremitatem diametri, erit tangens. Ergo quadradratum B D æquatur rectangulo G D F. Sed illud idem quadratum B D æquale eſt rectangulo A B C. Ergo illa duo rectangula G D F & A B C ſunt æqualia & proinde, erit reciprocè vt B C ad G D; ita F D ad A B, hoc eſt, F G. Et componendo vt C B plus G D ad G D; ita G D ad G F, hoc eſt A B. Quod erat propoſitum. *16. tertii. 16. tertii. 8. ſexti 17. ſexti. 16. ſexti.*

Appendix.

POſſet aliis modis idem problema ſolui. Primò ponendo 1 R pro maiore vnde medius foret 1 R-3 & fit 1 Q æquale 10 R-9. Eſtque 1 R 9. Item ponendo 1 R

pro ſumma medij & maioris, ſic foret 1 R † 3 duplum
Lem. 1. maioris & 1 R-3 duplum minoris. Vnde fieret 1 Q æquale 14 R † 15 & 1 R æqualis 15. Et ex his omnibus noui Canones & nouæ effectiones Geometricæ orirentur.

Hic etiam adnotandum eſt conſultò me in priori figura appoſuiſſe differentiam reliquarum maiorem prima data, vt oſtenderem praxim cuiuſdam authoris alioquin de rebus Mathematicis benemeriti non eſſe vniuerſalem, in qua propoſitum inueſtigat, iubendo vt tollatur differentia ex prima data; quod fieri non poteſt quando eiuſmodi differentia eſt maior.

PROPOSITIO V.

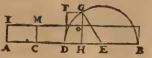
Data maiore extrema de tribus quantitatibus proportionalibus, & differentiæ reliquarum inuenire ſingulas.

Eſto datus maior numerus 9. Et differentia medii & minoris 2. Ponatur 1 R pro minore, ergo 1 R † 2. erit medius. Ergo productus ſub extremis 9 R, erit æqualis quadrato medii 1 Q † 4 † 4 R. Et ita 1 Q æquabitur 5 R-4. Vnde 1 R ſiue minor eſt 4 vel 1. Singulique 9. 6. 4. vel 9. 3. 1.
Lem. 6.

Hinc Canon.

DVplum differentiæ datæ tolle de maiore, reſiduique cape dimidium, ex cuius quadrato aufer quadratum differentiæ datæ, huius enim poſterioris relicti radix quadrata ſupradicto detracta vel addita dimidio exhibebit minorem. Vnde medius non latebit.

Hinc Effectio Geometrica.



SIt data maior A B. & differentia mediæ & minoris A C. Sumatur C D æqualis A C. Et ſupra reliquam D B fiat ſemicirculus cuius centrum E. Tum erecta D F perpendiculari & æquali C D, ducatur F G parallela A B, occurrens peripheriæ in puncto G, ex quo demittatur G H perpendicularis diametro D B.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis partes, ſi quidem A D, duplum differentiæ datæ, ſublata eſt ex maiore A B, & ex reſidui D B dimidio D E hoc eſt E G, tollitur quadratum G H, hoc eſt D F, hoc eſt D C, & remanet quadratum H E, cuius latus H E detractum ex D E relinquit D H. Additum vero eidem D E, hoc eſt E B, facit H B. 47 *primi.*

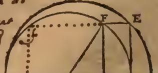
Dico autem primò, D H eſſe minorem extremam de tribus quæſitis: erecta enim A I perpendiculari ad A B & æquali D H perficiatur rectangulum I B. Notenturque linearum occurſus literis M L O. erit rectangulum D H B, hoc eſt O B æquale quadrato H G, hoc eſt D F, hoc eſt D C. Atque ita totum rectangulum I B æquatur quadrato C D, quadrato D H, & rectangulo I D, quod eſt æquale duplo rectangulo C D H. Sed iiſdem omnibus ſimul ſumptis æquatur quadratum C H. Ergo quadratum C H eſt æquale rectangulo ſub A B in A I hoc eſt D H. Igitur erit reciprocè vt A B ad C H; ita C H ad D H. Et proinde data maiore A B & differentia reliquarum A C, inuentæ ſunt ſingulæ proportionales A B, 4. *ſecun. li.* 17. *ſexti*

CH, D H. Quod erat demonſtrandum.

Dico deinde ſecundò iiſdem datis minorem extremam fore adhuc H D, iuxta poſteriorem Canonis partem: rectangulum enim A B H æquatur quadrato D H
3 *ſecundi.* & rectangulo A H B quod eſt æquale rectangulis ſub in-
1. *ſecundi.* ſecta H B & ſequentis A C, C D, D H. Et propterea rectangulum A B H æquabitur quadrato H D, quadrato C D (quod eſt æquale rectangulo D H B) & duplo rectanguli ſub C D in H B. Sed iiſdem omnibus ſimul ſumptis æquatur quadratum compoſitæ ex C D, H B.
4 *ſecundi.* Ergo quadratum compoſitæ ex C D, H B æquatur re-
17. *ſexti.* ctangulo A B H. Igitur reciprocè, erit vt A B ad C D plus H B; ita C D plus H B ad H B. Vbi vides iterum tres lineas proportionales, quarum maior eſt A B, & differentia reliquarum C D, hoc eſt A B. Quod erat propoſitum.

Appendix.

Poteſt idem problema ſic ſolui, ſit data maior A B & differentia reliquarum B C. Connectantur in directum & ſupra totam A C, itemque ſupra A B fiant duo ſemicirculi. Tum ex B erigatur perpendicularis B E vſque ad maiorem peripheriam, & ex puncto E ducatur E F parallela B A. demittaturque F G. Dico A G fore mediam. Cuius demonſtrationem relinquo induſtriæ & exercitio tyronis. Sumpta eſt praxis ex operatione Algebrica, in qua ponitur 1 R pro medio. Inde enim elicitur iſte Canon. Ex quadrato quod fit à dimidio maioris extremi tolle productum ſub eodem



maiori & differentia reliquorum: reſidui enim radix quadrata, addita ſupradicto dimidio exhibebit medium.

Alio modo poteſt poni 1 R pro ſumma reliquorum. Ergo duplum medij erit 1 R † 2 & duplum minoris 1 R - 2. Igitur medius eſt $\frac{1 R \dagger 2}{2}$ & minor $\frac{1 R - 2}{2}$ & ita productus ſub extremis $\frac{9 R - 18}{2}$ æquabitur quadrato medij $\frac{1 Q \dagger 4 \dagger 4 R}{4}$. Ergo 1 Q eſt æquale 14 R - 40 & ita 1 R eſt 10. Hinc poſſet iterum oriri Canon & effectio Geometrica. Quod indicaſſe ſatis erit.

PROPOSITIO VI.

Data differentia extremarum, & ſumma mediæ minoriſque extremæ, inuenire tres quantitates porportionales.

Esto datus numerus 5 pro differentia extremorum, & numerus 10 pro aggregato medij & minoris. Ponatur autem 1 R pro minori. Erit ergo 10 - 1 R medius & 1 R † 5 maior extremus. Igitur quadratum medij 100 † 1 Q - 20 R æquabitur producto ſub extremis 1 Q † 5 R & poſt debitam reductionē erit æquatio inter 25 R & 100. igitur 1 R ſiue minor eſt 4 eruntque ſinguli 4. 6. 9.

Hinc Canon.

Iunge duplum ſummæ datæ cum differentia & per hoc aggregatum diuide quadratum ſummæ datæ, orieturque minor extremus. Vnde reliqui non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

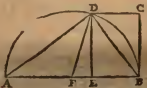
Sit data differentia extremarum A, ſumma vero mediæ & minoris B. Fiat autem vt A plus duplo B ad B;

extremus [illegible] igitur alter erit 10-1 R. Horum productus eſt 10 R-1 Q, qui proinde æquabitur 16, quadrato medij dati. Et poſt debitam reductionem erit 1 Q æquale 10 R-16. Igitur 1 R eſt 2 vel 8: ſiquidem numeri diminuti in quibus abſolutus adficitur ſigno - habent duplicem radicem vt docuimus in præceptis Algebræ. *Lem. 6.*

Hinc Canon.

Cape dimidium ſummæ datæ, & ex eius dimidij quadrato tolle quadratum medij proportionalis: huius enim reſidui radix quadrata, addita & detracta ſupradicto dimidio exhibebit extremos ſigillatim.

Hinc Effectio Geometrica.



Sit data ſumma extremarum A B & media B C. Coniungantur illæ ad angulos rectos, & facto ſupra A B ſemicirculo ducatur C D parallela B A, donec occurrat peripheriæ in puncto D (ſi non poſſet occurrere, problema foret impoſſibile vt patet ex 17. ſexti, & 5. ſecundi elementorum) ex quo puncto D, linea D E perpendiculariter demittatur ad A B.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes, ſiquidem ducta D F ad centrum ſemicirculi C, erit æqualis dimidio ſummæ A B, & ex eius quadrato tollitur quadratum D E remanetque F E quadratum, cuius latus ſiue radix eſt linea F E, quæ addita & detracta ſemidiametro exhibet A E & E B. *47. primi.*

Dico autem A E, EB fore extremas quæſitas. Quoniam enim B C & E D ſunt eidem A B perpendiculares, erunt inter ſe parallelæ: & quia illæ eædem ſunt inter parallelas B E, C D, erunt inter ſe æquales. Atqui iam *28 primi. 33. primi.*

probatum eſt in propoſ. præced. lineam E D eſſe mediam proportionalem inter AE & EB, patetque illud ex libro ſexto Element. Igitur data ſumma extremarum A B ex tribus proportionalibus, & media B C, diſtinximus extremas A E, E B. Quod erat faciendum & demonſtrandum. 8. *ſexti.* 13. *ſexti.*

PROPOSITIO III.

Data prima quantitate ex tribus proportionalibus & aggregato ſecundæ & tertiæ, diſtinguere ſingulas.

ESto datus numerus 2. primus ex tribus proportionalibus & aggregatum reliquorum ſit 12. ponatur pro medio 1 R. Erit ergo tertius 12-1 R. Ergo quadratum medij 1 Q æquabitur producto ſub extremis 24-2 R. Igitur 1 R ſiue medius eſt 4. eruntque ſinguli 2. 4. 8. *Lem. 6.*

Hinc Canon.

CApe dimidium primi dati, & eius quadratum iunge cum producto ſub primo in ſummam reliquorum datam; huius enim aggregati radix quadrata multata dimidio primi exhibebit medium. Vnde tertius non latebit.

Hinc Effectio Geometrica.



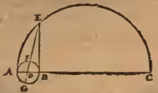
SIt linea A B prima ex tribus proportionalibus, ſiue maior extrema, ſiue minor. Et B C compoſita ex duabus reliquis. Ponantur illæ in directum, & ſupra totam A C deſcribatur ſemicirculus, & ex puncto

B erigatur perpendicularis B E. Tum diuiſa A B biſariam in D, centro D, interuallo DE, fiat alter ſemicirculus ſecans priorem in E, & lineam C A productam in punctis G & F.

Manifeſtum eſt in hac praxi obſeruatas eſſe ſingulas Canonis noſtri partes; ſiquidem quadratum B E, quod
8. ſexti. eſt æquale rectangulo A B C iungitur quadrato D B, &
17 ſexti. *47 primi.* fit quadratum D E, à cuius latere D E hoc eſt DG, ſublata DB. Relinquitur B G.

Dico autem B G fore mediam quæſitam & conſequen-
8 ſexti. ter G C tertiam. Quadratum enim B E æquatur tum re-
17. ſexti. ctangulo A B C, tum rectangulo F B G. Siquidem E B demittitur perpendiculariter ex puncto E quod eſt com-
1. Axiom. primi. mune vtrique peripheriæ: igitur illa duo rectangula A
16 ſexti. BC & F B G ſunt inter ſe æqualia; & proinde erit reciprocè vt linea C B ad G B; ita F B ad A B. Et diuidendo, vt C G ad GB; ita FA ad A B. Atqui F A æqualis eſt B G, propterea quod ſublatis duabus æqualibus A D & D B ex duabus æqualibus D F, & D G remanent F A & BG. Igitur eſt vt C G ad GB; ita BG ad AB. Datâ ergo prima A B ex tribus proportionalibus à ſumma reliquarum B C. Diſtinximus ſingulas. Quod erat faciendum.

Aliter poteſt ex eodem Canone elici effectio Geometrica hoc modo. Fiant omnia vt priꝰ niſi quod loco poſterioris ſemicirculi, deſcribi debet cẽtro D interuallo DB circulus integer ſecans productam E D in pũctis F G.



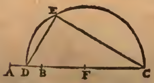
Manifeſtum eſt vt prius obſeruari ſingulas Canonis partes.

Dico autem F E fore mediam quæſitam. Nam cum

B E ſit perpendicularis ad extremitatem diametri erit tangens. Ergo quadratum B E æquabitur rectangulo G E F. Sed idem quadratum B E æquale eſt rectangulo A B C. Igitur rectangula G E F & A B C ſunt inter ſe æqualia. Ergo erit reciprocè vt B C ad F E; ita G E ad F G. Et diuidendo vt B C multata F E ad F E; ita F E ad F G hoc eſt A B. Quod erat propoſitum. *16 tertij.* *36. tertii.* *8. ſexti.* *17. ſexti.* *16 ſexti.*

Appendix.

POteſt hoc idem problema ſic ſolui. Data ex prima A B & ſumma reliquarum B C. Diuidatur A B bifariam in D & ſupra D B fiat ſemicirculus in quo inſcribatur C E æqualis B C, connectaturque E D, cui æqualis ſumatur D F.



Dico B F fore mediã & F C tertiã. Hæc praxis facile demonſtrari poteſt, ſumiturq; iterum ex Algebra, ſiquidem ponatur alter extremus numerus 1 R ergo medius erit 12-1R. Fietque tandem 1 Q æquale 26 R-144. Vnde Canon. Ex quadrato ſummæ datæ & dimidii primi tamquam vnius tolle quadratum ſummæ datæ: reſidui radix quadrata tollatur ex ſumma data, & dimidio primi tamquam vno, reſtabitq; tertius numerus quæſitus.

PROPOSITIO IV.

Data minore extrema de tribus quantitatibus proportionalibus, & differentia reliquarum inuenire ſingulas.

ESto datus numerus 4 pro minore extremo, & 3 pro differentia reliquorum. Ponatur medius 1 R, ergo 1 R † 3 erit maior extremus. Et proinde quadratum medii 1 Q æquabitur producto ſub extremis 4 R † 12. Igitur 1 R ſiue medius eſt 6. ſingulique erunt 4. 6. 9. *Lem. 6.*

Hinc Canon.

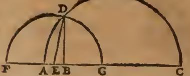
QVadratum quod fit à dimidio minoris extremi adde producto ſub minori & differentia data. Huius aggregati radix quadrata, ſupradicto addita dimidio exhibebit medium quæſitum. Vnde alter extremus non latebit.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt AB minor extrema, & differentia reliquarum duarum BC. Ponantur illæ in directum & ſupra totam AC fiat ſemicirculus, erectaque perpendiculari ex puncto B, diuidatur AB bifariam in E. Ex quo tamquam centro ad interuallum ED, fiat ſecundus ſemicirculus ſecans priorem in D & rectam AC in punctis FG.

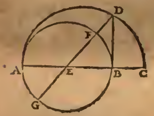
Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes, ſiquidem ducta ED rectangulum ABC, hoc *8. ſexti.*
eſt quadratum BD, additur quadrato EB, & fit quadra- *17. ſexti.*
tum ED, cuius latus ED, ſiue FE additur EB dimidio *47. primi.*
minoris datæ, & fit FB.

Dico



Dico autem F B fore mediam quæſitam: nam quadratum B D æquatur rectangulo A B C ex vna parte, itemque ex alia rectangulo F B G. Ergo illa duo rectangula inter ſe ſunt æqualia: & proinde eſt reciprocè vt B C ad B F ita B G ad B A & componendo vt C F ad B F; ita G A, hoc eſt B F ad A B. Quod erat faciendum & demonſtrandum. *16. ſexti.*

Aliter paulo res demonſtrabitur & efficietur in hunc modum. Peractis omnibus vt prius loco poſterioris ſemicirculi, fiat centro E interuallo E B circulus integer.



Manifeſtum eſt vt prius obſeruari ſingulas Canonis partes.

Dico autem G D fore mediam quæſitam, data A B prima & B C differentia reliquarum. Cum enim B D ſit perpendicularis ad extremitatem diametri, erit tangens. Ergo quadradratum B D æquatur rectangulo G D F. Sed illud idem quadratum B D æquale eſt rectangulo A B C. Ergo illa duo rectangula G D F & A B C ſunt æqualia & proinde, erit reciprocè vt B C ad G D; ita F D ad A B, hoc eſt, F G. Et componendo vt C B plus G D ad G D; ita G D ad G F, hoc eſt A B. Quod erat propoſitum. *16. tertii. 14. tertii. 8. ſexti. 17. ſexti. 16. ſexti.*

Appendix.

POſſet aliis modis idem problema ſolui. Primò ponendo 1 R pro maiore vnde medius foret 1 R-3 & fit 1 Q æquale 10 R-9. Eſtque 1 R 9. Item ponendo 1 R

pro ſumma medij & maioris, ſic foret 1 R + 3 duplum maioris & 1 R - 3 duplum minoris. Vnde fieret 1 Q æquale 14 R + 15 & 1 R æqualis 15. Et ex his omnibus noui Canones & nouæ effectiones Geometricæ orirentur. *Lem. 1.*

Hic etiam adnotandum eſt conſultò me in priori figura appoſuiſſe differentiam reliquarum maiorem prima data, vt oſtenderem praxim cuiuſdam authoris alioquin de rebus Mathematicis benemeriti non eſſe vniuerſalem, in qua propoſitum inueſtigat, iubendo vt tollatur differentia ex prima data; quod fieri non poteſt quando eiuſmodi differentia eſt maior.

PROPOSITIO V.

Data maiore extrema de tribus quantitatibus proportionalibus, & differentiæ reliquarum inuenire ſingulas.

ESto datus maior numerus 9. Et differentia medii & minoris 2. Ponatur 1 R pro minore, ergo 1 R + 2. erit medius. Ergo productus ſub extremis 9 R, erit æqualis quadrato medii 1 Q + 4 + 4 R. Et ita 1 Q æquabitur 5 R - 4. Vnde 1 R ſiue minor eſt 4 vel 1. Singulique 9. 6. 4. vel 9. 3. 1. *Lem. 6.*

Hinc Canon.

DVplum differentiæ datæ tolle de maiore, reſiduique cape dimidium, ex cuius quadrato aufer quadratum differentiæ datæ, huius enim poſterioris relicti radix quadrata ſupradicto detracta vel addita dimidio exhibebit minorem. Vnde medius non latebit.

Hinc Effectio Geometrica.



SIt data maior A B. & differentia mediæ & minoris A C. Sumatur C D æqualis A C. Et ſupra reliquam D B fiat ſemicirculus cuius centrum E. Tum erecta D F perpendiculari & æquali C D, ducatur F G parallela A B, occurrens peripheriæ in puncto G, ex quo demittatur G H perpendicularis diametro D B.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis partes, ſi quidem A D, duplum differentiæ datæ, ſublata eſt ex maiore A B, & ex reſidui D B dimidio D E hoc eſt E G, 47 primi.
tollitur quadratum G H, hoc eſt D F, hoc eſt D C, & remanet quadratum H E, cuius latus H E detractum ex D E relinquit D H. Additum vero eidem D E, hoc eſt E B, facit H B.

Dico autem primò, D H eſſe minorem extremam de tribus quæſitis: erecta enim A I perpendiculari ad A B & æquali D H perficiatur rectangulum I B. Notenturque linearum occurſus literis M L O. erit rectangulum D H B, hoc eſt O B æquale quadrato H G, hoc eſt D F, hoc eſt D C. Atque ita totum rectangulum I B æquatur quadrato C D, quadrato D H, & rectangulo I D, quod eſt æquale duplo rectangulo C D H. Sed iiſdem omnibus ſimul ſumptis æquatur quadratum C H. Ergo quadratum C H eſt æquale rectangulo ſub A B in A I hoc eſt D H. Igitur erit reciprocè vt A B ad C H; ita C H ad D H. Et proinde data maiore A B & differentia reliquarum A C, inuentæ ſunt ſingulæ proportionales A B,

4. ſecun. li.
17. ſexti

C H, D H. Quod erat demonſtrandum.

Dico deinde ſecundò iiſdem datis minorem extremam fore adhuc H D, iuxta poſteriorem Canonis partem: rectangulum enim A B H æquatur quadrato D H
3 ſecundi. & rectangulo A H B quod eſt æquale rectangulis ſub inſecta H B & ſequentis A C, C D, D H. Et propterea re-
1. ſecundi. ctangulum A B H æquabitur quadrato H D, quadrato C D (quod eſt æquale rectangulo D H B) & duplo rectanguli ſub C D in H B. Sed iiſdem omnibus ſimul ſumptis æquatur quadratum compoſitæ ex C D, H B.
4 ſecundi. Ergo quadratum compoſitæ ex C D, H B æquatur re-
17. ſexti. ctangulo A B H. Igitur reciprocè, erit vt A B ad C D plus H B; ita C D plus H B ad H B. Vbi vides iterum tres lineas proportionales, quarum maior eſt A B, & differentia reliquarum C D, hoc eſt A B. Quod erat propoſitum.

Appendix.



Poteſt idem problema ſic ſolui, ſit data maior A B & differentia reliquarum B C. Connectantur in directum & ſupra totam A C, itemque ſupra A B fiant duo ſemicirculi. Tum ex B erigatur perpendicularis B E vſque ad maiorem peripheriam, & ex puncto E ducatur E F parallela B A. demittaturque F G.

Dico A G fore mediam. Cuius demonſtrationem relinquo induſtriæ & exercitio tyronis. Sumpta eſt praxis ex operatione Algebrica, in qua ponitur 1 R pro medio. Inde enim elicitur iſte Canon. Ex quadrato quod fit à dimidio maioris extremi tolle productum ſub eodem

maiori & differentia reliquorum: reſidui enim radix quadrata, addita ſupradicto dimidio exhibebit medium.

Alio modo poteſt poni 1 R pro ſumma reliquorum. Ergo duplum medij erit 1 R † 2 & duplum minoris 1 R - 2. Igitur medius eſt $\frac{1 R \dagger 2}{2}$ & minor $\frac{1 R - 2}{2}$ & ita productus ſub extremis $\frac{9 R - 18}{2}$ æquabitur quadrato medij $\frac{1 Q \dagger 4 \dagger 4 R}{4}$. Ergo 1 Q eſt æquale 14 R - 40 & ita 1 R eſt 10. Hinc poſſet iterum oriri Canon & effectio Geometrica. Quod indicaſſe ſatis erit.

PROPOSITIO VI.

Data differentia extremarum, & ſumma mediæ minoriſque extremæ, inuenire tres quantitates porportionales.

ESto datus numerus 5 pro differentia extremorum, & numerus 10 pro aggregato medij & minoris. Ponatur autem 1 R pro minori. Erit ergo 10 - 1 R medius & 1 R † 5 maior extremus. Igitur quadratum medij 100 † 1 Q - 20 R æquabitur producto ſub extremis 1 Q † 5 R & poſt debitam reductionē erit æquatio inter 25 R & 100. igitur 1 R ſiue minor eſt 4 eruntque ſinguli 4. 6. 9.

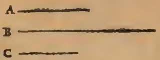
Hinc Canon.

IVnge duplum ſummæ datæ cum differentia & per hoc aggregatum diuide quadratum ſummæ datæ, orieturque minor extremus. Vnde reliqui non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data differentia extremarum A, ſumma vero mediæ & minoris B. Fiat autem vt A plus duplo B ad B;

ita B ad aliam quæ ſit C.



Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes; ſiquidem diuiſio quadrati per lineam abſoluitur Geometricè per inuentionem eiuſmodi tertiæ proportionalis, nam in omni diuiſione quotiens multiplicatus per diuiſorem producit quantitatem quæ diuiſa fuit; quod hic fieri certum eſt ex l. 6. Element.

Dico autem C fore minorem extremam quæſitam. Cum enim in ſerie trium proportionalium ſit vt maior ad mediam; ita media ad minorem, erit componendo, vt maior & media ad mediam; ita media & minor ad minorem. Et permutando, vt maior & media ad mediam & minorem, ſic media ad minorem. Et componendo, vt ſumma extremarum plus dupla media, hoc eſt, vt duplum mediæ & minoris plus differentia extremarum ad mediam & minorem; ita media & minor ad minorem: Sed A eſt differentia extremarum, B autem eſt ſumma mediæ & minoris, ergo vt A plus dupla B ad B, ita B ad minorem: ſed ex praxi eſt vt A plus duplo B ad B, ita B ad C. Ergo C eſt minor quæſita. Quod erat demonſtrandum.

Appendix.

Aliter quoque res tota perfici poteſt in hunc modum. Fiat vt duplum B plus A ad B, ita B plus A ad aliam lineam quæ ſit C. Dico lineam C fore mediam ex quæſitis. Sumitur iterum hæc praxis ex operatione Algebrica in qua iiſdem datis ponitur 1 R pro medio proportionali. ſic enim minor extremus eſt 10-R. Et maior 15-R vnde quadratum medij 1 Q æquatur producto ſub extremis 150-25 R † 1 Q. Igitur 1 R eſt 6. Inde elicitur iſte Canon. Iunge duplum ſummæ datæ cum differen-

tia, & per hoc aggregatum diuide productum ex ſumma data in eamdem ſummam plus differentia extremorum habebiſque medium ex quæſitis. Demonſtratio praxeos per ſeſe facilis relinquitur exercitationis gratiâ.

Corollarium.

EX his colligi poſſunt duo theoremata, quorum primum eſt: Si fuerint tres quantitates proportionales, quadratum ſummæ ex media & minori æquabitur plano ſub minore in differentiam extremarum plus dupla mediæ & minoris ſumma. Secundum eſt, in eadem ſerie trium proportionalium, planum ſub media in duplum mediæ & minoris plus differentia extremarum, æquabitur plano ex ſumma mediæ & minoris in differentiam extremarum plus ſumma minoris & mediæ.

Primum eſt Canon

Secundum eſt Canon

PROPOSITIO VII.

Data differentia extremarum, & ſumma mediæ & maioris, inuenire tres quantitates proportionales.

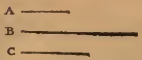
Eadem eſt cum ſuperiori

POſſet facile ſolui hoc problema ex præcedenti, nam tollendo differentiam extremorum de ſumma maioris & mediæ, relinquitur ſumma mediæ & minoris. Immediatè tamen & abſque eiuſmodi reductione ſic ſoluetur. Eſto numerus 5 pro differentia extremorum, & 15 pro ſumma maioris & medii. Ponatur autem 1 R pro maiori extremo. Erit ergo 15-1 R medius, & 1 R-5 minor extremus. Igitur quadratum medii 225 † 1 Q-30 R æquabitur producto ſub extremis 1 Q-5 R & poſt debitam reductionem, erit æquatio inter 225 & 25 R. *Lem. 6.*
Ergo 1 R ſiue maior extremus eſt 9 ſinguliqueerunt 9. 6. 4.

Hinc Canon.

TOlle differentiam extremorum à dupla maioris & medii ſumma, & per hoc reſiduum diuide quadratum ſummæ datæ; habebiſque maiorem extremum. Vnde ſinguli non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.



SIt data differentia extremarum A ſumma vero maioris & mediæ B. Fiat vt duplum B minus A ad B, ita B ad aliam lineam quæ ſit C.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis partes, ſiquidem vt iam adnotatum eſt, diuiſio quadrati per lineam fit Geometricè per eiuſmodi inuentionem tertiæ proportionalis.

Dico autem lineam C fore maiorem extremam quæſitam, cum enim in ſerie trium proportionalium ſit vt minor ad mediam, ita media ad maiorem, erit componendo, vt minor & media ad mediam, ita media & maior ad maiorem & permutando, vt minor & media ad mediam & maiorem; ſic media ad maiorem. Et componendo, vt ſumma extremarum plus dupla media, hoc eſt vt duplum maioris & mediæ minus differentia extremarum ad mediam & maiorem; ſic media & maior ad maiorem. Sed A eſt differentia extremarum, B vero eſt ſumma maioris & mediæ, ergo erit vt duplum B minus A ad B, ita B ad maiorem. Sed factum eſt vt dupla B minus. A ad B, ita B ad C. Igitur C eſt maior quæſita. Quod erat demonſtrandum.

Appendix.

Appendix.

ALio quoque modo res tota ſic perfici poteſt iiſdem datis. Fiat vt dupla B minus A, ad B; ita B minus A ad aliam quæ ſit C. Dico lineam C fore mediam ex quæſitis. Sumitur hæc praxis ex operatione Algebrica, in qua iiſdem datis, ponitur 1 R pro medio: ſic enim maior erit 15-1 R. Et minor 10-1 R. Et proinde quadratum medii 1 Q æquatur producto ſub extremis 150 † 1 Q-25 R. & ita 1 R eſt *6*. Illinc enim formatur iſte Canon. Tolle differentiam extremorum à dupla maioris & medii ſumma, & per hoc reſiduum diuide productum ex ſumma data in eamdem ſummam multatam differentia extremarum habebiſque medium ex quæſitis. Demonſtratio vt pote facilis relinquitur lectori ad exercitationem.

Corollarium.

SI fuerint tres quantitates proportionales, quadratum ſummæ ex maiori & media, æquabitur plano ex maiore in duplum maioris & mediæ multatum differentia extremarum. Item, in eadem ſerie, planum ex media in duplam ſummam maioris & mediæ multatam differentia extremarum, æquabitur plano ex ſumma mediæ & maioris in eamdem ſummam multatam differentia extremarum.

PROPOSITIO VIII.

Data ſumma extremarum de tribus quantitatibus proportionalibus, & aggregato planorum ex prima in ſecundam, ex ſecunda in tertiam, & ex tertia in primam diſtinguere ſingulas.

ESto datus numerus 13 pro ſumma extremorum & 114 pro aggregato planorum. Ponatur medius ex

quæſitis 1 R. Ergo multiplicando 13 per 1 R, habebis 13 R pro ſumma planorum ex primo in ſecundum & ex ſecundo in tertium. Quare ſi 13 R addas cum plano ex tertio in primum qui ſemper æquatur quadrato medij, habebis 13 R + 1 Q æqualia aggregato dato 114. Et proinde 1 Q æquatur 114-13 R. Igitur 1 R, ſiue medius, eſt 6. Eruntque ſinguli 9. 6. 4.

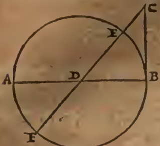
Hinc Canon.

QVadrato dimidiæ ſummæ extremorum adde aggregatum planorum; huius ſummæ radix quadrata multata dimidio ſummæ extremorum exhibebit medium. Vnde ſinguli non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data A B ſumma extremarum, linea vero B C poſſit ſummam rectangulorum ex prima in ſecundam ex ſecunda in tertiam & ex tertia in primam. Coniungantur illæ ad angulos rectos, & diuiſa A B bifariam in D, ducatur D C, fiatque circulus ſuper A B, ſecans C D productam in punctis E F.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici
47 primi. partes, ſiquidem quadratum B C additur quadrato D B & fit quadratum D C. Cuius latus D C multatum dimidio ipſius A B, hoc eſt D E, relinquit E C.



Dico autem lineam E C fore mediam ex quæſitis, nam cum B C ſit perpendicularis ad extremitatem diametri, erit tangens, ac proinde quadratum eius æquabitur rectangulo F C E. Sed rectangulum F C E æquale eſt rectangulo F E C & quadrato C E. Ergo rectan-

16 tertij. 36 tertii. 3. ſecundi.

gulum F E C, & quadratum E C, æquantur quadrato B C continenti ſummam rectangulorum datam; igitur ſi per ſecundam huius linea F E diuidatur in duas inter quas E C ſit medio loco proportionalis, erit rectangulum *1. ſecundi.* F E C æquale rectangulo ex prima in ſecundam & ex ſecunda in tertiam, cui addendo quadratum E C hoc eſt *17. ſexti.* rectangulum ex tertia in primam; inuentæ erunt tres lineæ proportionales, itaut tria rectangula contenta in quadrato B C æquentur rectangulo F E C, plus quadrato E C. Data ergo ſumma extremarum A B & linea B C potentetria illa rectangula diſtinximus tres proportionales. Quod erat propoſitum.

Aliter paulo ex eodem Canone procedi poteſt, ad effectionem Geometricam connexis A B & B C perpendiculariter & diuiſa A B bifariam in D, ductaque D C. Si enim centro D, interuallo D C fiat ſemicirculus ſecans A B productam in punctis E F. Habebis vt prius mediam B F. Quod poteſt duobus modis demonſtrari, primò quia illa B F erit æqualis E C primæ figuræ, ſiquidem ex duobus æqualibus tolluntur duo æqualia. Secundò quia rectangulum F B E æquale quadrato B C, æquabitur etiam rectangulo F B A plus quadrato F B. *8. ſexti.* *17. ſexti.* *1. ſecundi.*



Corollarium.

EX his collige duo Theoremata, quorum primum eſt. Si fuerint tres quantitates continuè proportionales, planum ſub ſumma omnium & media æquabitur aggregato planorum ex prima in ſecundam, ex ſecunda in tertiam, & ex tertia in primam. Secundum, in eadem ſerie, quadratum ſummæ omnium, aggregatum ex tribus planis ſupradictis, & quadratum mediæ, ſunt in con-

Res admodum patens

Satis patens ob supradicta theorem

tinua proportione. Ratio vtriuſque eſt quia in prima figura cum rectangulum F C E ſit æquale quadrato B C, erit reciprocè vt F C ad B C, ita B C ad E C. Et proinde vt quadratum F C ad quadratum B C; ita quadratum B C, ad quadratum E C. Quod ſimiliter patet in figura poſteriori.

Appendix.

Hinc patet quomodo ſolui poſſit illud problema. Dato aggregato trium ſupradictorum planorum & ſumma trium proportionalium quantitatum vel media, inuenire ſingulas. Nam ſi aggregatum planorum diuidatur per ſummam omnium habebitur in quotiente media: qua ablata de ſumma omnium, relinquetur ſumma extremarum: data autem ſumma extremarum & media, per 2 huius diſtinguuntur extremæ. Similiter ſi idem aggregatum diuidatur per mediam, orietur in quotiente ſumma omnium à qua ſi tollas mediam, relinquetur ſumma extremarum: vnde, vt prius, diſtingues ipſas extremas.

Geometricè totum illud opus efficietur in hunc modum, ſit data ſumma ~~extremarum~~ omnium A & B poſſit tria
11. *ſexti.* ſupradicta rectangula. Fiat vt A ad B; ita B ad C.
17. *ſexti.* Dico C fore mediam. Quia rectangulum A in C æquabitur quadrato B. Ergo per corollarium C erit media. Similiter ſi loco ſummæ omnium daretur media C, faciendum foret vt C ad B; ita B ad A & haberetur A ſumma omnium propter eamdem rationem.

PROPOSITIO IX.

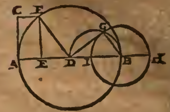
Data ſumma trium proportionalium, & aggregato planorum ex prima in ſecundam & ex ſecunda in tertiam, diſtinguere ſingulas.

ESto datus numerus 19 pro ſumma omnium & 78 pro aggregato planorum. Ponatur 1 R pro medio. Ergo 19-1 R erit ſumma extremorum, proindeque ſi multiplices 19-1 R per 1 R, fiet productus 19 R-1 Q æqualis aggregato dato 78. Ergo 1 Q æquatur 19 R-78. Et ita 1 R. ſiue medius eſt 6. Singulique erunt. 9. 6. 4. Et quia, poſita 1 R pro ſumma extremorum medius eſt 19-1 R oriunturque reliqua vt prius.

Hinc Canon.

EX quadrato dimidiæ omnium ſummæ, tolle aggregatum planorum, reſidui radix quadrata addita & detracta dimidio ſummæ omnium, exhibebit ſummam extremorum & medium ſigillatim. Vnde ſinguli non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.



SIt data linea A B pro ſumma omnium, & linea A C poſſit rectangula ſub prima in ſecundam & ſub ſecunda in tertiam. Coniungantur illæ ad angulos rectos, & ſupra A B, fiat ſemicirculus, cuius cētrum D. Tum ducta C E parallela A B occurrat peripheriæ in puncto E, ex quo demittatur perpendicularis E F.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici

partes, ſi quidem ducta linea E D, erit dimidium ipſius A B: ex cuius quadrato tollitur quadratum E F, hoc
47. primi. eſt C A, & reſtat quadratum F D, cuius latus E D additum & detractum dimidio ipſius A B exhibet F B & A F.

Dico autem F B fore ſummam extremarum & A F.
8. ſexti. mediam. Nam rectangulum A F B æquatur quadrato
17. ſexti. F E. Ergo ſi per ſecundam huius diuidatur F B in duas, inter quas A F ſit medio loco proportionalis. Habebuntur tres lineæ continuè proportionales quarum ſumma
2. ſecundi. æquabitur A B. & rectangula ex prima in ſecundam & ex ſecunda in tertiam erunt æqualia rectangulo A F B. hoc eſt quadrato A C. Quod erat demonſtrandum.

Aliter ex eodem Canone poteſt effectio abſolui hoc modo. Supra D B fiat ſemicirculus in quo inſcribatur D G æqualis A C, & nectatur G B. Tum centro B interuallo B G, fiat circulus.

47. primi. Manifeſtum eſt obſeruari rurſus integrum Canônem, quia ex quadrato D B tollitur quadratum D G, hoc eſt A C, & reſtat quadratum B G, hoc eſt B I, cuius latus B I, tollitur ex B D & relinquitur I D.

Dico autem I D fore mediam ex quæſitis & D H ſummam extremarum quod probatur duobus modis: Primò quia B G eſt æqualis F D; ergo I D æquatur A F, quæ iam oſtenſa eſt media ex quæſitis. F B autem æqua-
31. tertii. tur D H: & proinde D H eſt ſumma extremarum. Se-
16. tertii. cundò idem oſtenditur quia angulus D G H in ſemi-
36. tertii. circulus rectus eſt; ergo cum G B ſit ſemidiameter circuli erit D G tangens, & propterea quadratum D G æquabitur rectangulo H D I. Quare ſi D H per ſecundam huius ſecetur in duas, inter quas D I ſit media proportionalis habebuntur tres proportionales æquales A B. Et præterea rectangulum ex prima in ſecundam & ex ſecun-
1 ſecundi. da in tertiam æquabitur rectangulo H D I, hoc eſt quadrato tangentis D G, hoc eſt A C. Quod erat propoſitum.

Corollarium.

SI fuerint tres quantitates proportionales quadratum ſummæ extremarum, aggregatum planorum ex prima in ſecundam & ex ſecunda in tertiam, quadratumque mediæ erunt in continua proportione. Item in eadem ſerie, erit vt ſumma extremarum ad mediam; ſic quadratum ſummæ extremarum ad ſupradictum aggregatum; vel ſupradictum aggregatum ad quadratum mediç. Ratio vtriuſque clara eſt, quia tres illæ lineæ B F, F E, & F A. Itémque tres aliæ H D, D G, D I, ſunt oſtenſæ continuè proportionales.

PROPOSITIO X.

Data ſumma trium quantitatum continuè proportionalium, & aggregato quadratorum à ſingulis, diſtinguere ſingulas.

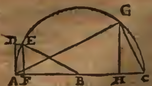
ESto data ſumma trium numerorum continuè proportionalium 14. Et aggregatum quadratorum à ſingulis 84. Ponatur autem 1 R pro medio, erit ergo ſumma extremorum 14-1 R. Et quoniam in ſerie trium proportionalium, quadratum ſummæ extremorum æquatur quadratis extremorum plus duplo medii quadrato; Lem. 3. Sequitur quod ſi ex quadrato ſummæ extremorum Lem. 1. 196 + 1 Q-28 R tollatur quadratum medij, quod eſt 1 Q, reſiduum 196 28 R æquale eſt dato quadratorum à ſingulis aggregato 84. & proinde poſt debitam reductionem & diuiſionem deprehendes 1 R ſiue medium, eſſe 4. Quo ſublato de ſumma omnium 14, relinquitur ſumma extromorum 10. Data autem ſumma extremorum 10. & medio 4. facilè diſcernuntur extremi per Propoſ. 2. huius. Eruntque ſinguli 2. 4. 8.

Hinc Canon.

EX quadrato ſummæ omnium tolle aggregatum quadratorum à ſingulis: reſiduum diuide per duplam omnium ſummam & habebis medium. Vel reſiduum diuide per ſummam omnium & habebis duplum medij ex tribus quæſitis. Vnde nec medius, nec reliqui ſigillatim latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data linea A B pro ſumma omnium, & A D potens quadrata à ſingulis. Ex puncto B tamquam centro, ad interuallum B A, deſcribatur ſemicirculus cuius diameter A B C. Et erigatur A D perpendicularis, & ducta D E parallela A B, donec occurrat peripheriæ in puncto E, demittatur E F perpendiculariter diametro A B. Tum inſcribatur C G æqualis F B & demittatur G H perpendicularis ad A C.



Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes, ſiquidem ducta B E erit ſemidiameter cuius quadratum erit æquale quadratis F B & E F: & ita quadratum F E hoc eſt A D quod æquatur quadratis ſingularum, tollitur de quadrato ſummæ omnium, & reſtat quadratum B F, hoc eſt C G. Cum autem ob æquiangulcitatem triangulorum A G C, G H C, tres illæ lineæ A C, C G, C H ſint continuè proportionales, erit quadratum mediæ C G æquale rectangulo ſub extremis A C H. Igitur quadratum C G diuiditur Geometricè per A C duplam omnium ſummam, & fit pro quotiente Geometrico, linea H C.

47. *primi.*
8. *ſexti.*
4. *ſexti.*
17. *ſexti.*

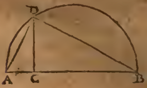
Dico autem lineam H C fore mediam ex quæſitis. ſi enim

Si enim intelligatur ſumma omnium A B ſecta in aliquo puncto taliter vt ex vna parte ſit media, & ex alia ſit ſumma extremarum, erit quadratum totius A B æquale quadrato ſummæ extremarum, quadrato mediæ, & duplo rectanguli ſub media in ſummam extremarum: atqui quadratum ſummæ extremarum æquatur quadratis extremarum plus duplo rectanguli ſub extremis, hoc eſt plus duplo quadrati mediæ. Igitur quadratum ſummæ omnium A B æquatur quadratis extremarum plus triplo mediæ quadrato plus duplo rectangulo ſub media in ſummam extremarum, & proinde ſi poſteriori iſti rectangulo duplo iungas duplum mediæ quadratum ex ſuperioribus ademptum, habebis quadratum ſummæ omnium A B æquari quadratis ſingularum plus duplo rectangulo ſub media in ſummam omnium A B.

4. ſecundi. *4. ſecundi.* *17. ſexti.*

Sed quadratum ſummæ omnium A B, hoc eſt B E æquatur quadrato E F continenti quadrata ſingularum, & quadrato F B. Ergo quadratum B F, hoc eſt C G, hoc eſt, (vt iam fuit probatum) rectangulum A C H eſt æquale duplo rectangulo, ſub media in ſummam omnium A B; ſiue, quod idem eſt, rectangulo ſub media in duplam omnium ſummam. Sed A C eſt dupla omnium ſumma; igitur H C eſt media. Quod erat demonſtrandum.

47. primi.



Aliter & breuius poteſt ex eodem Canone elici Effectio Geometrica hoc modo. Supra A B ſummam omnium fiat ſemicirculus in quo inſcribatur A D potens quadrata à ſingulis & demittatur D C perpendicularis ad diametrum.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis partes, ſiquidem de quadrato A B tollitur quadratum A D & relinquitur quadratum D B, hoc eſt rectangulum A B C. & proinde quadratum D B diuiſum per lineam A B, exhi-

47. primi. *8 ſexti.* *17. ſexti.*

bet pro quotiente Geometrico lineam CB. Dico autem lineam CB eſſe duplam mediæ ex tribus quæſitis. Demonſtratio eſt omnino eadem cum præcedente.

Si ergo media inuenta tollatur ex ſumma omnium, relinquetur ſumma extremarum. Data autem ſumma extremarum & media, diſtinguentur extremæ per Propoſ. 2. huius.

Corollarium.

SI fuerint tres quantitates proportionales, quadratum ſummæ omnium æquatur quadratis ſingularum & plano ſub ſumma omnium in duplum mediæ; vel, quod idem eſt ſub media in ſummam omnium duplam. Quod adnotaſſe operæ pretium erit.

PROPOSITIO XI.

Hoc idem problema alia ratione perficere.

IMitabimur aliquando Diophantum qui rem eamdem multis quęſtionibus abſoluit, præſertim quando dignitas alicuius problematis id poſtulabit. Eſto igitur data ſumma trium numerorum cõtinuè proportionalium 7. & aggregatum quadratorum à ſingulis 21. Ponatur ſumma extremorum 1 R. Ergo medius erit 7-1 R. & quoniam vt ſuprà dictum eſt, quadratum ſummæ extremorum multatum aggregato quadratorum à ſingulis æquatur quadrato medij, erit 1 Q-21. æquale quadrato medij 49 + 1 Q - 14 R. Et poſt debitam reductionem, erit æquatio inter 70 & 14 R. & proinde 1 R, ſiue ſumma extremorum eſt 5. Quo ſublato ex 7. remanet 2 pro medio. Data autem ſumma extremorum 5. & medio 2. Facile diſtinguuntur extremi per Propoſ. ſecundam huius. Eruntque ſinguli 1. 2. 4.

Lem. 3.
Lem. 6.

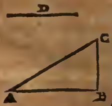
Hinc Canon.

QVadratum ſummæ omnium iunge cum aggregato quadratorum à ſingulis: ſummam confectam diuide per duplam omnium ſummam, & orietur aggregatum extremorum. Vel ſummam confectam diuide per ſummam omnium & orietur duplum aggregatum extremorum.

Hinc Effectio Geometrica.

ESto A B ſumma omnium, & B C poſſit quadrata ſingularum trium proportionalium. Coniungãtur illæ duæ lineæ ad angulos rectos, & nectatur A C. Tum duplo ipſius A B & ipſi A C inueniatur tertia proportionalis D.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes, ſiquidem quadratum ſummæ omnium A B additur quadrato B C, quod eſt æquale quadratis ſingularum, & fit quadratum A C, quod diuiditur per duplum A B, quia diuiſio illa Geometricè abſoluitur per inuentionem tertiæ proportionalis, vt iam explicatum eſt. 47. primi.



Dico autem lineam D fore ſummam extremarum. Nam quia ex corollario Propoſ. præced. quadratum ſummæ omnium A B, æquatur quadratis ſingularum & rectangulo ſub media in ſummam omnium duplam; erunt quadrata A B, B C æqualia duplo quadratorum à ſingulis & rectangulo ſub media in duplam omnium ſummam; ſed quadratum A C æquatur quadratis A B, B C, ergo quadratum A C æquatur duplo quadratorum à ſingulis & rectangulo ex media in duplam omnium ſummam A B. Sed A C eſt media proportionalis inter duplam A B & D. Ergo rectangulum ſub dupla A B in D, æquatur quadrato A C. 47. primi. 17. ſexti.

Et conſequenter idem rectangulum æquatur duplo quadratorum à ſingulis & rectangulo ſub media in duplam omnium ſummam A B.

Atqui rectangulum ſub dupla A B & ſumma extremarum, æquatur duplo quadrato ſummæ extremarum plus
3 ſecundi. duplo rectangulo ſub media in ſummam extremarum; duplum autem quadratum ſummæ extremarum æquatur
4 ſecundi. 17 ſexti. duplo quadratorum à ſingulis, & duplo mediæ quadrato. Igitur rectangulum ſub dupla A B & ſumma extremarum eſt æquale duplo quadratorum à ſingulis, plus duplo quadrato mediæ, plus duplo rectangulo mediæ in ſummam extremarum: hoc eſt duplo quadratorum à ſingulis plus rectangulo ſub media in duplam omnium ſummam. Et proinde rectangulum ſub dupla A B & D æquatur rectangulo ſub dupla A B & ſumma extremarum. Igitur D eſt ſumma extremarum. Quod erat demonſtrandum.

Similiter poſſet elici alia Effectio Geometrica faciendo vt A B ad A C ita A C ad aliud: Illud enim foret duplum ſummæ extremarum: cuius rei demonſtratio eſt omninò eadem cum præcedente.

Corollarium.

SI fuerint tres quantitates proportionales, quadrata ſingularum iuncta cum quadrato ſummæ omnium, æqualia ſunt plano ex ſumma extremarum in duplam omnium ſummam: vel ſub ſumma omnium in duplam ſummam extremarum.

PROPOSITIO XII.

Data ſumma trium quantitatum proportionalium & aggregato quadratorum ab extremis diſtinguere ſingulas.

Eſto datus numerus 7 pro ſumma omnium, & 17 pro aggregato quadratorum ab extremis. Ponatur autem 1 R pro medio, ergo ſumma extremorum erit 7-1 R, cuius quadratum 49 + 1 Q - 14 R continet quadrata extremorum plus duplo medii quadrato. Ergo ſi inde tollas duplum medii quadratum nempe 2 Q, reſtabit aggregatum quadratorum ab extremis 49-1 Q-14 R. Igitur erit æquatio inter 17. & 49-1 Q-14 R. Et proinde 1 Q æquale erit 32-14 R. Ergo 1 R, ſiue medius eſt 2. ſingulique erunt 1. 2. 4. *Lem. 5.* *Lem. 6.*

Hinc Canon.

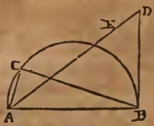
Ex quadrato ſummæ omnium tolle quadrata extremarum; reſiduum adde quadrato ſummæ omnium; huius enim aggregati radix quadrata, multata omnium ſumma, exhibebit medium proportionalem ex quęſitis. Vnde reliqui non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit A B ſumma trium linearum proportionalium, & A C poſſit quadrata ab extremis. Fiat ſemicirculus ſuper A B, in quo inſcribatur A C, & nectatur C B, cui æqualis B D erigatur perpendiculariter ad ipſam A B. Tum ducta D A, ſumatur A E æqualis ipſis A B.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis partes, ſiquidem ex quadrato ſummæ omnium A B ſublata ſunt quadrata extremarum contenta in quadrato A C, & re- *47. primi.*

manſit quadratum C B, hoc eſt B D, quod quadratum additum eſt cum quadrato ſummæ omnium A B, & fit quadratum A D, cuius latus A D multatur ſumma omnium A E & reſtat E D.



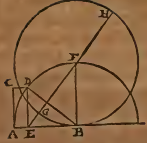
Dico autem E D fore mediam ex tribus quæſitis. Nam ex corollario Propoſ. 10. huius quadratum B C continebit rectangulum ſub media in duplam omnium ſummam, atque inſuper quadratum mediæ: ſed ex constructione B D eſt æqualis B C, ergo tantumdem continebit.

47 primi. Cum autem B D ſit perpendicularis ipſi A B, quadratum
4 ſecundi. A D continebit quadrata A B, B D.

Sed quadratum A D æquale eſt etiam quadratis partium A E, E D, & duplo rectanguli A E D. Ergo ſubductis vtrinque æqualibus quadratis A B, A E, remanebit quadratum B D æquale quadrato D E & duplo rectanguli D E A: cum ergo A E ſit ſumma omnium erit rectangulum ſub E D in duplam omnium ſummam plus quadrato E D æquale rectangulo ſub media in duplam omnium ſummam plus quadrato mediæ. Et proinde ipſa E D eſt media. Quod erat demonſtrandum.

Iam autem ſi E D tollatur ex A B ſumma omnium relinquetur ſumma extremarum. Ergo per Propoſ. 2. huius diſcernentur extremæ.

Poſſet ex eodem Canone alia elici Effectio Geometrica in hunc modum. Sit data ſumma omnium A B. & A C poſſit quadrata extremarum. Centro B, interuallo B A, deſcribatur ſemicirculus: connexaque A C perpendiculariter cum A B, ducatur C D parallela A B donec occurrat peripheriæ in puncto D ex quo demittatur D E perpendicularis ipſi A B. Tum ex centro B erecta



B F ad angulos rectos eidem diametro nectatur E F. Et centro F, interuallo F B, fiat circulus ſecans E F productam in punctis G H.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis partes ſiquidem ducta D B erit æqualis A B ſummæ omnium, & ex eius quadrato tollitur quadratum D E, hoc eſt C A, & reſiduum quadratum E B additur cum quadrato ſummæ omnium B E fitque quadratum E F, cuius latus multatum F G, relinquit E G. *47 primi.*

Dico autem E G fore mediam ex tribus quæſitis. Nam quadratum E B ex corollario ſupradicto æquabitur quadrato mediæ & rectangulo ex media in duplam omnium ſummam; Sed quia E B eſt perpendicularis ad extremitatem diametri tanget circulum: & proinde quadratum E B æquale erit rectangulo H E G; Hoc eſt rectangulo H G E & quadrato G E. Ergo rectangulum H G E plus quadrato G E, æquatur quadrato mediæ & rectangulo ex media in duplam omnium ſummam. Sed H G eſt dupla omnium ſumma, cum ſit dupla F B, hoc eſt A B, igitur G E eſt media. Quod erat demonſtrandum. *10. Propoſ. 16. tertii. 36. tertii. 3. ſecundi.*

Corollarium.

SI fuerint tres quantitates continuè proportionales quadratum compoſitę ex dupla omniũ ſumma & media, quadratum ſummæ omnium multatum quadratis extremarum; itémque quadratum mediæ erunt in continua proportione; item erit vt ſumma omnium dupla plus media ad mediam; ita quadratum compoſitæ ex dupla omnium ſumma & media ad quadratum ſummæ omnium multatum quadratis extremarum: vel quadratum ſummæ extremarum, multatum quadratis extrema-

rum ad quadratum mediæ. Cum enim oſtenſum ſit quadratum E B æquale rectangulo H E G; erit reciprocè vt
17.ſexti H E ad E B; ita E B ad E G. Et proinde illarum linearum
22 ſexti. quadrata erunt etiam proportionalia: & vt prima ad tertiam; ita erit quadratum primæ ad quadratum ſecundæ
20.ſexti. vel quadratum ſecundæ ad quadratum tertiæ.

PROPOSITIO XIII.

Hoc idem problema alio modo perficere.

ISdem datis 7. pro ſumma numerorum & 17 pro aggregato quadratorum. Ponatur 1 R pro ſumma extremorum. Ergo 7 - 1 R erit medius cuius quadratum duplum eſt 98 † 2 Q - 28 R, quo ſublato de quadrato ſummæ extremorum 1 Q, reſiduum 28 R - 1 Q - 98, æquabitur quadratorum ab extremis aggregato dato 17. propter Theorema in præcedenti Propoſ. traditum. Igitur 1 Q æquabitur 28 R - 115. & proinde 1 R, ſiue ſumma extremorum eſt 5. eruntque ſinguli 1. 2. 4.

Lem. 3. Lem. 6.

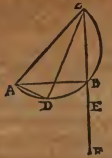
Hinc Canon.

EX quadrato ſummæ omnium duplæ tolle duplum quadratum ſummæ omnium, & præterea aggregatum quadratorum ab extremis. reſidui radix quadrata detracta ex dupla omnium ſumma, dabit ſummam extremorum. Vel breuiùs ex duplo quadrato ſummæ omnium tolle quadrata extremorum: reſidui radix detracta ex duplâ omnium ſummâ exhibebit ſummam extremorum.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt ſumma omnium A B & A D poſſit quadrata extremarum. Ducatur B C æqualis & perpendicularis ipſi A B, & nectatur A C, ſupra quam fiat ſemicirculus qui neceſſario

neceſſariò tranſibit per punctum B, quia angulus A B C eſt rectus. In eo ſemicirculo inſcribatur A D, & nectatur D C. Tum producatur C B donec B F æquetur B C, & ſumatur C E æqualis C D.



Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis partes, ſiquidem cum A B, B C æquales coniungantur ad angulos rectos, erit quadratum A C æquale duobus illis ſimul ſumptis, duplum alterutrius puta A B. Ex quadrato autem A C, tollitur quadratum A D æquale quadratis extremarum, & reſtat quadratum D C, hoc eſt C E, cuius radix quadrata C E tollitur ex dupla omnium ſumma C F, & remanet E F. 47. primi. 31. tertij 47 primi

Dico autem E F fore ſummam extremarum, nam quia ex corollario Propoſ. 10. Quadratum ſummæ trium proportionalium æquatur quadratis ſingularum, & duplo rectanguli ſub ſumma omnium in mediam, ſequitur duplum quadratum ſummæ omnium hoc eſt quadratum A B, B C, ſimul ſumpta, hoc eſt quadratum A C æquari duplo quadratorum à ſingulis & duplo rectangulo ex media in ſummam extremarum duplam. Ergo cum ex quadrato A C tollantur quadrata extremarum contenta in A D, erit reſiduum quadratum D C, hoc eſt C E æquale quadrato ſummæ omnium B C plus duplo rectangulo ex media in ſummam omnium plus quadrato mediæ. 47. primi

Sed quadratum C E æquatur quadratis partium C B, B E, & duplo rectanguli C B E. Igitur cum B C ſit ſumma omnium, erit duplum rectanguli C B E plus quadrato B E æquale duplo rectanguli ſub media in ſummam omnium plus quadrato mediæ, & proinde B E erit media. Ergo cum B F ſit ſumma omnium, erit E F ſumma extremarum. Quod erat demonſtrandum. 4. ſecundi.

Appendix.

HIc poſtularet ordo, vt ſolueremus iſtud problema data ſumma extremarum de tribus quantitatibus proportionalibus & aggregato quadratorum à ſingulis, inuenire ſingulas. Sed facile expeditur ex præcedentibus, ſiquidem cum quadratum ſummæ extremarum æquetur quadratis extremarum & duplo rectanguli ſub extremis, hoc eſt duplo mediæ quadrato, ſequitur quadratum ſummæ extremarum æquari quadratis ſingularum plus quadrato mediæ: quare ſi ex quadrato ſummæ extremarum tollatur aggregatum quadratorum à ſingulis, reſtabit quadratum mediæ. Hoc autem facile expedietur ex ſupradictis tum numericè, tum etiam Geometricè.

4. ſecundi. *4. ſexti.*

PROPOSITIO XIV.

Data differentia extremarum de tribus quantitatibus proportionalibus, & aggregato quadratorum à ſingulis inuenire ſingulas.

ESto datus numerus 3 pro differentiâ extremorum, & 21 pro aggregato quadratorum à ſingulis. Ponatur autem 1 R pro ſumma extremorum. Erit ergo 1 R † 3
Lem. 1. duplum maioris extremi, & 1 R - 3 duplum minoris extremi, & proinde extremi erunt $\frac{1 R \dagger}{2}$ & $\frac{1 \quad -3}{\cdot}$. Horum
Lem. 6. productus $\frac{Q - 9}{4}$ æquatur quadrato medij, ſed vt iam ſu-
Lem. 3. pra dictum eſt eidem quadrato medij æquatur quadra-
Lem. 6. tum ſummæ extremorum multatum aggregato quadratorum à ſingulis. Ergo $\frac{Q \cdot 9}{4}$ æquatur 1 Q 21. Igitur 1 Q eſt 25. & 1 R, ſiue ſumma extremorum eſt 5. Data autem ſumma extremorum 5 & differentia eorumdem 3

facile diſtinguuntur; extremi ſiquidem datorum ſumma 8 erit duplum maioris extremi, & datorum differentia 2 duplum minoris extremi. Ergo extremi erunt 4 & 1. Singuli quoque ordinati 4. 2. 1.

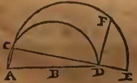
Hinc Canon.

EX quadruplo quadratorum à ſingulis aggregato, tolle quadratum differentiæ extremorum: reſidui triens eſt quadratum ſummæ extremorum. Vnde ſinguli non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data A B linea potens quadrata à ſingulis, & A C differentia extremarum. Sumatur B D, æqualis A B & ſupra A D fiat ſemicirculus in quo inſcribatur A C & connexa C D producatur donec D E ſit triens ipſius C D. Tum ſuprà totam C E fiat ſemicirculus, erigaturque D F perpendiculariter ad C E.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes, ſiquidem cum A D ſit dupla A B, eius quadratum erit quadruplũ quadrati AB. Ergo quadratum A D quadruplum erit quadratorum à ſingulis. Ex eo autem tollitur quadratum differentiæ A C, & reſtat quadratum C D. Cuius triens eſt rectangulum C D E, hoc eſt quadratum D F. *4 ſecundi. 20. ſexti.*



Dico autem lineam D F fore ſummam extremarum, nam cum A D ſit dupla A B, erit quadratum A D; hoc eſt, aggregatum quadratorum A C, C D quadruplum quadrati A B. Igitur quoniam A B poteſt quadrata ſingularum, erunt quadrata A C, C D ſimul ſumpta quadrupla quadratorum à ſingulis. Sed in ſerie trium linearum proportionalium, quadratum ſummæ extremarum *1. ſecundi. 8 ſexti. 17. ſexti. 47. primi. 4. ſecundi. 17 ſexti.*

æquatur quadratis extremarum plus duplo mediæ quadrato; ergo triplum quadratum ſummæ extremarum æquabitur triplo aggregato quadratorum à ſingulis plus triplo mediæ quadrato.

7 ſecundi. Sed quia duarum quarumlibet quantitatum quadrata æquantur duplo rectanguli ſub illis comprehenſi plus quadrato differentiæ ipſarum, erunt quadrata à ſingulis tribus lineis proportionalibus æqualia triplo mediæ quadrato plus quadrato differentiæ extremarum: & proinde triplum quadratum ſummæ extremarum plus quadrato differentiæ extremarum, æquabitur quadruplo quadratorum ab ſingulis aggregato. Igitur quadratum A C cum triplo quadrato ſummæ extremarum æquabitur quadrato A D, ſed quadratum A C cum quadrato C D æquatur quadrato A D. Ergo C D quadratum eſt æquale
8 ſexti. triplo quadrato ſummæ extremarum. Sed eſt, vt C D
17. ſexti. ad D E tertiam proportionalem; ita quadratum C D ad
20. ſexti. quadratum D F. Igitur quadratum C D triplum eſt quadrati D F. & proinde quadratum D F eſt æquale quadrato ſummæ extremarum, & ita linea D F eſt ſumma extremarum. Quod erat demonſtrandum.

Data autem ſumma extremarum D F & earumdem differentia A C. Duobus modis poſſunt inueniri ſingulæ primò per appendicem ſuperioris propoſitionis 15. Secundò quia D F plus A C eſt dupla maioris extremæ, & D F minus A C dupla minoris.

Corollarium.

SI fuerint tres quantitates proportionales, triplum quadratum ſummæ extremarum plus quadrato differentiæ extremarum æquabitur quadruplo quadratorum à ſingulis.

PROPOSITIO XV.

Idem problema alio modo ſoluere.

ESto datus idem numerus 3 pro differentia extremorum. Et 21. pro aggregato quadratorum à ſingulis. Ponatur 1 R pro minori. Ergo maior erit 1 R † 3. Horum productus 1 Q † 3 R æquatur quadrato medii. Igitur ſi hunc addas quadratis extremorũ 1 Q & 1 Q † 9 † 6 R, fiet ſumma 3 Q † 9 † 9 R æqualis aggregato dato 21. igitur 1 Q æquatur 4 - 3 R. Et ita 1 R eſt 1. *Lem. 6.*

Similiter poſitâ 1 R pro maiore erit minor 1 R - 3. Horum productus 1 Q - 3 R æquatur quadrato medii & proinde ſi illum addas quadratis extremorum 1 Q & 1 Q † 9 - 6 R, fiet ſumma 3 Q † 9 - 9 R æqualis aggregato dato 21. Igitur 1 Q æquatur 4 † 3 R. Et ita 1 R eſt 4. *Lem. 6.*

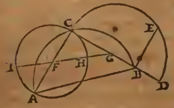
Hinc Canon.

EX quadratis ſingulorum tolle quadratum differentiæ datæ, reſidui trientem adde quadrato dimidiæ differentiæ extremorum; huius enim ſummæ radix quadrata, multata & aucta dimidio differentiæ extremorum, exhibebit extremos.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data A B potens quadrata ſingularum, & A C differentia extremarum. Supra A B fiat ſemicirculus in quo inſcribatur A C, & connexa C B producatur donec B D ſit triens C B. Tum facto ſupra C D ſemicirculo erigatur B E perpendicularis ad C D. Sumptaque C G æquali B E, diuidatur A C bifariam in F, & connexa F G producatur donec ſecet circulum ſupra A C factum in punctis H, I.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis partes, ſiquidem ex quadrato A B tollitur quadratum A C, & reſtat quadratum C B, cuius triens eſt quadratum B E, hoc eſt C G, vt ſuprà. Quadratum vero C B additur quadrato C F & fit quadratum F G, cuius latus F G multatum & auctum dimidio ipſius A C exhibet H G & I G.



Dico autem H G & I G fore extremas quæſitas. Cum enim demonſtratum ſit in Propoſ præced. quadratum A C cum triplo quadrato mediæ æquari quadratis ſingularum, cumque quadratum A C cum quadrato C B æquetur quadrato A B æquali quadratis ſingularum; erit quadratum C B triplum quadrati mediæ. Et proinde
16 tertij B E hoc eſt C G erit media. Atqui C G eſt perpendi-
36 tertii. cularis ad extremitatem diametri, & proinde tangens.
17. ſexti. Igitur quadratum C G æquale eſt rectangulo I G C. Ergo tres lineæ I G, G C, G H ſunt continuè proportionales, extremarum autem differentia eſt æqualis A C. Ergo data differentia extremarum A C & linea A B potente quadrata ſingularum inuentæ ſunt ſingulæ. Quod erat & faciendum & demonſtrandum.

PROPOSITIO XVI.

Data differentia extremarum & ſumma quadratorum maioris quantitatis & mediæ inuenire tres continuè proportionales.

Lem. 1. ESto data differentia 3. & ſumma 20. Ponatur 1 R pro aggregato extremorum. Ergo erit 1 R † 3 duplum maioris extremi. Et 1 R - 3 duplum minoris, &

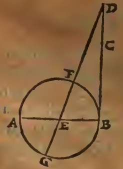
propterea extremi erunt $\frac{1R + 3}{2}$ & $\frac{1R - 3}{2}$ horum productus $\frac{1Q - 9}{4}$ æquatur quadrato medii. Igitur ſi illum iungas quadrato maioris extremi $\frac{1Q + 9 + 6R}{4}$ fiet ſumma $\frac{2Q + 6R}{4}$ æqualis ſummæ datæ 20. Et ita 1 Q æquabitur 40 - 3 R. Igitur 1 R, ſiue ſumma extremorum eſt 5. & ſinguli erunt 1. 2. 4. Lem. 6.

Hinc Canon.

QVadratum quod fit à dimidio differentiæ datæ, iunge cum duplo ſummæ quadratorum: huius aggregati radix quadrata ſupradicto multata dimidio, exhibet ſummam extremorum. Vnde ſinguli non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt differentia extremarum de tribus lineis proportionalibus A B. & linea B C potens quadrata maioris & mediæ. Sumatur B D poteſtate dupla ipſius B C: iungaturque cum A B ad angulos rectos. Tum diuiſa 47 primi. A B bifariam in E, ducatur E D, & centro E, interuallo E B, fiat circulus ſecans productam E D in punctis F G.



Manifeſtum eſt obſeruari diſtrictè omnes Canonis Algebrici partes, nam quadratum quod fit ab E B additur B D & fit quadratum E D, cuius latus E D multatum E F, exhibet F D. 47. primi.

Dico autem F D fore ſummam extremarum. nam rectangulum quod fit ex dupla maiori extrema in ſummam extremarum, æquatur duplo quadrato maioris, 1 ſecundi. 17. ſexti.

& duplo rectangulo extremarum hoc eſt duplo mediæ quadrato, ſed rectangulum quod fit ex dupla maiori in
1. *ſecundi.* ſummam extremarum æquatur rectangulo ſub differentia extremarum & ſumma extremarum, plus quadrato ſummæ extremarum. Ergo rectangulum ex differentia extremarum A B hoc eſt G F in ſummam extremarum plus quadrato ſummæ extremarum æquatur duplo quadratorum maioris & mediæ, hoc eſt quadrato B D. Atqui linea B D eſt perpendicularis ad extremitatem dia-
16. *tertii* metri, & proinde tangens. Ergo quadratum B D æqua-
36. *tertii.* bitur rectangulo G D F. Hoc eſt rectangulo G F D plus
3. *ſecundi.* quadrato F D. Ergo F D eſt ſumma extremarum. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

SI fuerint tres quantitates proportionales, quadratum ſummæ extremarum, duplum quadratorum mediæ & maioris, itemque quadruplum quadratum maioris ſunt in continua proportione. Nam cum quadratum B D ſit oſtenſum æquale rectangulo G D F, erunt
17 *ſexti.* lineæ & quadrata D F, D B, D G continuè proportio-
20 *ſexti.* nalia.

PROPOSITIO XVII.

Idem problema alio modo ſoluere.

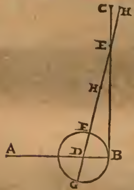
ESto datus idem numerus 3 pro differentia extremorum. & idem numerus 20 pro aggregato quadratorum. Ponatur maior extremus 1 R. Ergo 1 R - 3 erit minor. Et proinde eorum productus 1 Q - 3 R erit æ-
Ax. 6. qualis quadrato medii. Igitur, ſi illum addas cum quadrato maioris extremi, fiet ſumma 2 Q - 3 R æqualis aggregato quadratorum 20. Et ità 1 Q æquabitur $\frac{20 + 3 R}{2}$. Vnde 1 R ſiue maior extremus eſt 4. Singulique vt ſupra.
4. 2. 1. Hinc

Hinc Canon.

CApe quadrantem differentiæ extremorum & eius quadratum adde dimidio quadratorum maioris & medij; ſummæ huius radix quadrata ſupradicto addita quadranti exhibet maiorem extremum. Vnde ſinguli non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt A B differentia extremarum, & B C poſſit quadrata maioris & mediæ. Sumatur B D quadrans ipſius A B, & B E potens dimidium quadrati B C, ſit perpendicularis ipſi A B nectaturque D E. Tum centro D, interuallo D B fiat circulus ſecans E D productam in punctis F. G.



Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis partes, ſiquidem quadratum D B additur quadrato B E & fit quadratum D E cuius latus additum eidem quadranti exhibet G E.

Dico autem G E fore maiorem extremam quæſitam. Sit enim maior extrema, ſi fieri poteſt, inæqualis G E, & æqualis G H. Ergo quoniam ex Coroll. præced. quadruplum quadratum maioris, duplum quadratorum maioris & mediæ, itemque quadratum ſummæ extremarum ſunt continuè proportionalia; erunt etiam eorum quadrantes proportionales, eritque vt quadratum G H, ad quadratum B E; ita quadratum B E ad quadratum dimidiæ ſummæ extremarum H F. Igitur eorum latera erunt quoque proportionalia, eritque vt G H ad B E, ita B E ad 10. *ſexti.* 22 *ſexti.*
F H. Ergo rectangulum G H F æquatur quadrato B E. 17. *ſexti.*

16. tertii. Sed quoniam B E eſt perpendicularis ad extremitatem diametri, tangit circulum & proinde quadratum B E æ-
36. tertii. quatur rectangulo G E F. Igitur rectangulum G E F æquale erit rectangulo G H F pars toti, vel totum parti. Quod eſt abſurdum. Non ergo maior extrema poteſt eſſe inæqualis G E. Ergo erit ipſi æqualis. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XVIII.

Idem problema alia ratione perficere.

Iſdem datis 3. & 20. Ponatur 1 R pro minore, ergo maior erit 1 R † 3. Ergo eorum productus 1 Q † 3 R
Lem. 6. æquabitur quadrato medij. Quare ſi ille addatur quadrato maioris 1 Q † 9 † 6 R, fiet ſumma 2 Q † 9 † 9 R æqualis aggregato quadratorum dato 20. & proinde 1 Q erit æquale $\frac{11 - 9 R.}{2}$ Igitur 1 R ſiue minor eſt 1. Singulique vt ſuprà 1. 2. 4.

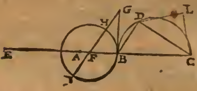
Hinc Canon.

Ex aggregato quadratorum dato tolle quadratum differentiæ reſiduique dimidium ſerua. Tum triplæ differentiæ cape quadrantem & eius quadrantis quadrato adde dimidium ſuprà ſeruatum: huius enim ſummæ radix quadrata ſupradicto multata quadrante exhibebit minorem quæſitum.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data A B differentia & B C potens quadrata maioris & mediæ. Supra B C fiat ſemicirculus in quo inſcribatur B D æqualis B A. & ſuprà connexam D C tamquam baſim fiat triangulum D L C iſos celes & rectangulum. Deinde ex puncto B excitetur B G perpen-

dicularis ad B C, & æqualis D L. Tum ſumatur B E tripla ipſius B A, & B F ſit quadrans totius B E. Et ex puncto F tanquam centro, ad interuallum F B, fiat circulus ſecans connexam & productam G F in punctis H, I.



Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis partes, ſiquidem ex quadrato B C tollitur quadratum B D, & remanet quadratum D C, cuius dimidium eſt quadratum D L, hoc eſt B G quod additur quadrato B F & fit quadratum F G; cuius latus multatum F B, hoc eſt F H, relinquit H G.

Dico autem H G fore minorem ex quæſitis, nam quia B G eſt perpendicularis ad extremitatem diametri tanget circulum, ergo rectangulum I G H æquabitur quadrato B G, hoc eſt D L. Igitur duplum rectangulum I G H æquale eſt quadrato D C. Et proinde duplum rectangulum I G H plus quadrato differentiæ B D, æquatur quadrato B C. Sed quia rectangulum I G H æquale eſt rectangulo I H G & quadrato H G; duplum rectangulum I G H, æquabitur rectangulo ſub E B tripla extremarum differentia in H G, plus duplo quadrato H G: Ergo quadratum B C æquale eſt quadrato differentiæ B D, plus duplo quadrato H G, plus rectangulo ſub E B tripla extremarum differentia in H G. *16. tertii.* *6. tertii.* *3. ſecun li.*

Sed quadratum maioris extremæ æquatur quadrato differentiæ extremarum, quadrato minoris, & duplo rectangulo ſub differentia extremarum in minorem: quadratum autem mediæ, hoc eſt rectangulum ſub extremis, æquatur quadrato minoris & rectangulo ſub differentia extremarum in minorem. Ergo quadratum B C, quod eſt æquale quadratis mediæ & maioris, æquatur quadrato differentiæ B D, plus duplo quadrato minoris, plus re- *4. ſecundi.*

ctangulo ex EB tripla extremarum differentia in minorem. Ergo cum idem quadratum BC iam oſtenſum ſit æquale quadrato BD, plus duplo quadrato HG, plus rectangulo ex EB in HG, erit HG minor. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XIX.

Data differentia extremarum & ſumma quadratorum minoris quantitatis & mediæ, inuenire tres continuè proportionales.

ESto differentia extremorum 5. & ſumma quadratorum minoris & medii 52. Ponatur 1 R pro ſumma
Lem. 1. extremorum. Erit ergo 1 R † 5 duplum maioris & 1 R - 5 duplum minoris. Et ita maior & minor erunt $\frac{1R + 5}{2}$
Lem. 6. & $\frac{1R - 5}{2}$ horum productus $\frac{Q - 25}{4}$ æquatur quadrato medii. Et proinde ſi iſte productus addatur quadrato minoris $\frac{1Q + 25 - 10R}{4}$ habebis æquationem inter ſummam confectam $\frac{2Q - 10R}{4}$ & 52. Igitur 1 Q erit æquale 104 † 5 R. Ergo 1 R, ſiue ſumma extremorum eſt 13. ſingulique ſunt 4. 6. 9.

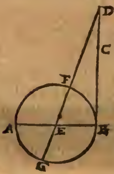
Hinc Canon.

QVadratum quod fit à dimidio differentiæ datæ iunge cum duplo quadratorum medii & minoris: huius aggregati radix quadrata ſupradicto addita dimidio exhibebit ſummam extremorum. Vnde ſinguli non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data A B pro differentia extremarum, & B C poſſit quadrata mediæ & minoris. Coniungantur illæ ad angulos rectos & ſumatur B D potens duplum quadrati B C. Et diuiſa A B bifariam in E, centro E interuallo E B fiat circulus ſecans D E connexam & productam in punctis F, G.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici



partes, ſiquidem quadratum dimidię extręmarum differentiæ E B additur duplo quadrato B C nempe quadrato B D, & fit quadratum D E cuius latus D E additum E G exhibet D G.

Dico autem lineam D G fore ſummam extremarum, nam rectangulum ſub ſumma extremarum in minorem æquatur quadrato minoris & rectangulo ſub extremis, hoc eſt quadrato mediæ. Ergo rectangulum ſub ſumma extremarum in duplam minorem æquabitur quadrato B D, quod eſt æquale duplo quadratorum mediæ & minoris aggregato. Sed rectangulum ſub ſumma extremarum in duplam minorem æquatur quadrato duplæ minoris & rectangulo ſub differentia extremarum G F, in duplam minorem. Ergo illa duo iterum æquantur quadrato B D. Linea autem B D eſt tangens & proinde eius quadratum æquatur rectangulo G D F, hoc eſt quadrato F D & rectangulo G F D. Igitur quadratum F D plus rectangulo ex G F in F D æquatur quadrato duplæ minoris plus rectangulo ex G F in duplam minorem. Ergo F D eſt dupla minor. Et proinde G D erit ſumma extremarum. Quod erat demonſtrandum.

3 *ſecundi.* 17 *ſexti.* 3 *ſecundi.* 36 *tertij.* 36 *tertii.* 3 *ſecundi.*

Corollarium.

SI fuerint tres quantitates proportionales, quadratum ſummæ extremarum, duplum quadratorum minoris & mediæ, itemque quadruplum quadratum minoris, erunt in continua proportione. Nam rectangulum, GDF oſtenſum eſt æquari quadrato BD. Ergo tum lineæ,
17. *ſexti.* 20. *ſexti.* tum quadrata GD, BD, FD erunt continuè proportionalia.

PROPOSITIO XX.

Idem problema alio modo perficere.

IIſdem datis 5. & 52. Ponatur 1 R pro minore. Ergo
Lem. 6. 1 R + 5 erit maior. Ergo eorũ productus 1 Q + 5 R æqualis erit quadrato medii. Igitur ſi ille addatur quadrato minoris 1 Q, fiet ſumma 2 Q + 5 R æqualis aggregato quadratorum 52. & ita 1 Q æquabitur $\frac{52 - 5 R}{2}$ eritque 1 R ſiue minor 4. & ſinguli 4. 6. 9.

Hinc Canon.

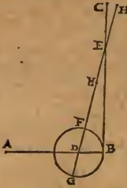
CApe quadrantem differentiæ datæ, & eius quadrato adde dimidium quadratorum minoris & medii: ſummæ huius radix quadrata multata ſupradicto quadrante exhibebit minorem extremum. Vnde reliqui non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

DAtis AB pro differentia extremarum & BC pro aggregato quadratorum, omnia efficiantur vt in Propoſ. 17. Manifeſtum eſt vt prius obſeruari integrum Canonem & tandem exhiberi FE.

Dico autem FE fore minorem extremam de tribus quæſitis. Sit enim, ſi fieri poteſt, minor extrema inæ-

qualis F E, & æqualis F H, ergo quoniam ex Corollario præcedente, quadruplum quadratum minoris, duplum quadratorum minoris & mediæ, itemque quadratum ſummæ extremarum, ſunt in continua proportione;



erunt etiam eorum quadrantes proportionales, & proinde vt quadratum F H ad quadratum B E; ita quadratum B E ad quadratum dimidiæ ſummæ extremarum G H. Ergo eorum latera FH, BE, GH, erunt quoque proportionalia. Igitur rectangulum ſub extremis G H F æquabitur quadrato mediæ B E. 20 *ſexti.* 22. *ſexti.* 17. *ſexti.*

Sed quia B E eſt perpendicularis ad extremitatem diametri tangit circulum: & proinde quadratum B E æquatur rectangulo G E F. Igitur rectangulum G E F eſt æquale rectangulo G H F. Pars toti, vel totum parti. Quod eſt abſurdum. Cum ergo minor extrema non poſſit eſſe inæqualis F E erit ipſi æqualis. Quod erat demonſtrandum. 16 *tertii.* 36. *tertii.*

Appendix.

POſſet etiam illud idem problema abſolui alio modo: ſi enim ponatur 1 R pro maiore extremo, inuenietur tandem iiſdem datis 1 Q æquale $\frac{27 \dagger 15 R}{2}$ vnde Canon. Aggregati quadratorum dati & quadrati differentiæ datæ cape interuallum, & huius interualli dimidium ſerua. Tum triplæ differentiæ cape quadrantem, & eius quadrantis quadrato adde dimidium ſupra ſeruatum: huius enim ſummæ radix quadrata ſupradicto addita quadranti exhibebit maiorem extremum. Hinc verò elici poteſt Effectio Geometrica non valde diſſimilis ei quæ eſt ad Propoſ. 18. Quod indicaſſe ſatis erit.

PROPOSITIO XXI.

Data vna extrema de tribus quantitatibus proportionalibus, & aggregato quadratorum à reliquis inuenire ſingulas.

SIt datus numerus 9 pro vno extremorum. Et 52 pro aggregato quadratorum à reliquis. Ponatur 1 R pro altero extremo. Ergo productus extremorum 9 R, æqualis erit quadrato medii: cui ſi addas quadratum extremi non dati fiet ſumma 9 R + 1 Q æqualis 52. & ita, 1 Q æquabitur 52 - 9 R. Ergo 1 R, ſiue alter extremus eſt 4. Singulique 9. 6. 4. Similiter ſi detur pro vno extremorum 4 & pro aggregato quadratorum 117. Ponatur 1 R pro altero extremo. Ergo 4 R erit productus extremorum, ſiue quadratum medii, quo addito cum 1 Q fiet ſumma 4 R + 1 Q æqualis 117. Igitur 117 - 4 R æquantur 1 Q, & ita 1 R, ſiue alter extremus eſt 9. ſingulique 4. 6. 9.

Lem. 6. *Lem. 6.*

Hinc Canon.

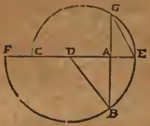
IVnge aggregatum datum cum quadrato quod fit à dimidio extremi dati: huius enim ſummæ radix quadrata eodem multata dimidio exhibebit alterum & extremum.

Hinc Effectio Geometrica.

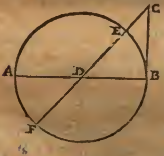
SIt data A B potens quadrata ſecundæ & tertiæ, A C vero ſit prima ex tribus lineis proportionalibus. Coniungantur illæ duæ lineæ ad angulos rectos: diuiſaque C A bifariam in D, ducatur D B. Et centro D, interuallo D B fiat ſemicirculus ſecans C A productam in punctis E F.

47. primi. Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis partes, ſiquidem

ſiquidem quadrato D A additur quadratum A B, & fit quadratum D B, hoc eſt D E ex cuius latere D E, ſi tollas D A, relinquitur A E.



Dico autem A E fore tertiam quæſitam. Fiat enim alter ſemicirculus ſupra C E & producta B A occurrat circumferentiæ in puncto G. ducta GE, erunt illæ tres C A,
A G, A E continuè propor- 8 ſexti.
tionales, prima autem illarum eſt linea data, quadrata vero aliarum duarum æquantur quadrato G E, hoc eſt
rectangulo C E A. Sed F C æqualis eſt A E. Igitur re- 47. primi.
ctangulum C E A æquatur rectangulo F A E, hoc eſt 8. ſexti. 17. ſexti.
quadrato A B; igitur quadratum G E eſt æquale quadrato 8. ſexti.
A B. Igitur inuentæ ſunt tres lineæ proportionales data 17. ſexti.
prima C A & A B potente quadrata reliquarum duarum A G & A E. Quod erat demonſtrandum.



Aliter ex eodem Canone abſoluetur problema hoc modo. Sit data A B vna extrema de tribus & B C potens quadrata reliquarum. Connectantur A B, B C ad angulos rectos & ſupra A B, fiat circulus cuius centrum D. connexaque CD ſecet circulum in punctis E F.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes, ſiquidem quadrato D B additur quadratum B C, & fit quadratum D C, cuius latus mulctatum D E relinquit E C.

Dico autem E C fore minorem ex quæſitis. Nam quia 16 tertij:
B C eſt perpendicularis ad extremitatem diametri tanget 36. tertii:
circulum, ergo quadratum B C æquatur rectangulo 3. ſecundi.

FCE, hoc eſt rectangulo F E C & quadrato E C. Et proinde ſi inueniatur media proportionalis inter F E & E C. Habebuntur tres quæſitæ cum conditionibus poſtulatis. Quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO XXII.

Idem problema alio modo perficere.

IIſdem datis 9 & 52. Ponatur pro ſumma extremorum 1 R. Ergo 1 R - 9 erit alter extremus & proinde ſi 1 R - 9 ducatur in 9, fiet productus 9 R - 81 æqualis quadrato medii. Igitur ſi quadratum ortum ab 1 R - 9
Lem. 6. nempe 1 Q † 81 - 18 R addas 9 R - 81, fiet ſumma 1 Q - 9 R æqualis 52. Ergo 1 Q æquatur 52 † 9 R & ita 1 R, ſiue ſumma extremorum, eſt 13. Ex qua ſi tollas extremum datum 9, reſtabit alter extremus 4, vt ſuprà. Eruntque ſinguli.

Hinc Canon.

IVnge quadratum dimidii extremi dati cum aggregato quadratorum. huius enim ſummæ radix quadrata eodem aucta dimidio exhibebit ſummam extremorum.

Hinc Effectio Geometrica.

DAtis iiſdem in figura poſteriore Propoſ. præced. efficiantur omnia vt eſt imperatum ibidem. Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis partes, & fieri F C. Dico autem F C fore ſummam extremarum. Demonſtratio eſt omnino eadem, cum enim probatum ſit E C fore vnam extremam altera exiſtente F E, patet ſummam extremarum futuram F C. Quod erat oſtendendum.

Idem oſtendi poteſt in figura priore eiuſdem Propoſitionis præcedentis.

Corollarium.

EX his collige duo theoremata quorum primum eſt: ſi fuerint tres quantitates proportionales, erit vt quadratum ſummæ extremarum ad quadrata ſecundæ & tertiæ; ita quadrata ſecundæ & tertiæ ad quadratum tertiæ. Ex quo ſequitur ſecundum: in eadem ſerie eſt vt ſumma extremarum ad tertiam; ita quadratum ſummæ extremarum ad quadrata ſecundæ & tertiæ, itemque quadrata ſecundæ & tertiæ ad quadratum tertiæ. Ratio vtriuſque eſt quia in poſteriore figura Propoſ. præced. tres lineæ F C. B C. C E. ſunt in continua proportione.

Appendix.

HIc poſtularet ordo vt ſolueremus iſtud problema. Data media & aggregato quadratorum ab extremis, inuenire tres quantitates proportionales. Sed hoc facile ſoluitur ſiquidem duplum quadratum mediæ datæ *17. ſexti.* plus quadratis extremarum æquatur quadrato ſummæ *4. ſecundi.* extremarum: quare ſi ſumatur duplum quadrati mediæ *47 primi.* datæ, & addatur quadratis extremarum, habebitur ſumma extremarum. Data autem ſumma extremarum & media diſcernuntur extremæ per 2. Propoſ. huius.

Similiter ex dictis ſolui facile poſſunt illa duo problemata ſequentia. Data vna extrema, & aggregato quadratorum à ſingulis inuenire tres quantitates proportionales. Item, data media & aggregato quadratorum à ſingulis inuenire tres quantitates proportionales.

PROPOSITIO XXIII.

Data differentia extremarum de tribus quantitatibus proportionalibus, & interuallo quadratorum mediæ & alterutrius extremæ inuenire ſingulas.

ESto numerus 6 pro differentia extremorum. Et 12 pro differentia quadratorum medij & minoris. Ponaturque 1 R pro ſumma extremorum. Erit Ergo 1 R † 6 duplum maioris. Et 1 R - 6 duplum minoris. Et proinde extremi erunt $\frac{1 R † 6}{2}$ & $\frac{1 R - 6}{2}$. Ergo quadra-
Lem. 1. tum minoris eſt $\frac{1 Q † 36 - 12 R.}{4}$ Et quia in ſerie trium pro-
Lem. 6. portionalium productus ſub extremis eſt æqualis quadrato medii, ſi ab hoc producto $\frac{1 Q - 36}{4}$ tollatur quadratum minoris $\frac{1 Q † 36 - 12 R,}{4}$ reſtabit numerus $\frac{12 R - 72}{4}$ æqualis interuallo quadratorum medii & minoris dato 12. Igitur eſt æquatio inter 12 R & 120 & proinde 1 R, ſiue ſumma extremorum eſt 10. Similiter ſi datum fuiſſet interuallum quadratorum maioris & medii 48, tollendum fuiſſet quadratum medij $\frac{1 Q - 36}{4}$ de quadrato maioris extremi $\frac{1 Q † 36 † 12 R}{4}$ & reſiduum $\frac{72 † 12 R}{4}$ æquaretur 48. Atque ita 120 æqualia forent 12 R: vnde 1 R, ſiue ſumma extremorum eſt 10. Et proinde ſinguli 2. 4. 8.

Hinc Canon.

QVadratum differentiæ extremorum adde duplo quadratorum medii & minoris interuallo: hoc enim aggregatum diuiſum per differentiam extremorum.

exhibebit ſummam extremorum.

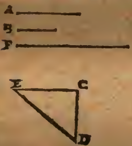
Vel

EX duplo quadratorum medii & maioris interuallo tolle quadratum differentiæ extremorum; hoc enim reſiduum diuiſum per differentiam extremorum exhibebit ſummam extremorum.

Hinc Effectio Geometrica.

ESto linea A. Differentia extremarum, linea vero B poſſit differentiam quadratorum mediæ & minoris. Sumatur diameter quadrati à linea B facti, quæ ſit C D & coniungatur ad angulos rectos cum E C æquali A nectaturque E D, tum duabus A & E D inueniatur tertia proportionalis F.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici 47 primi



partes, ſiquidem quadratum C D eſt duplum quadrati B, quia C D eſt diameter quadrati facti à B ex conſtructione: item quadratum C D additum quadrato E C hoc eſt A, facit quadratum E D. Quoniam autem A. E D. & F ſunt continuè proportionales, quadra- 17 ſexti.
tum mediæ E D diuiditur per primam A & fit F.

Dico autem lineam F fore ſummam extremarum. 4 ſecundi.
Quadratum enim maioris, extremæ æquatur quadrato minoris extremæ, plus quadrato differentiæ extremarum plus duplo rectanguli ſub differentia extremarum in minorem extremam. Sed rectangulum ſub extremis æquatur quadrato mediæ, vel quod idem eſt quadrato mi- 17 ſexti.
noris & rectangulo ſub differentia extremarum in mino- 3 ſecundi.
rem igitur rectangulum ſub differentia extremarum in minorem æquale eſt interuallo quadratorum mediæ & minoris. Et proinde quadratum differentiæ extremarum

plus duplo quadratorum mediæ & minoris interuallo æquatur differentiæ quadratorum ab extremis.

Cum ergo quadratum C D ſit duplum quadrati B & E C ſit differentia extremarum; erit aggregatum quadratorum EC, C D, hoc eſt quadratum E D, hoc eſt rectangulum ſub A. F. æquale differentiæ quadratorum ab extremis. Sed rectangulum ſub differentia extremarum A & ſumma extremarum æquatur quoque quadrato differentiæ extremarum & duplo rectanguli ſub differentia extremarum in minorem proindeque æquabitur differentiæ quadratorum ab extremis. Igitur rectangulum ſub A & F, æquale erit rectangulo ſub A & ſumma extremarum. Ergo F eſt ſumma extremarum. Quod erat demonſtrandum.

47 primi *17 ſexti.* *1 ſecundi.*

Similiter ex ſecundo Canone poteſt elici Effectio Geometrica in hunc modum. Sit data differentia extremarum A B. & A C poſſit interuallum quadratorum maioris & mediæ. Inueniatur A D, æqualis diametro quadrati facti ex A C. & ſupra A D, fiat ſemicirculus in quo inſcribatur differentia data A B. nectaturque B D. Tum duabus A B, B D inueniatur tertia proportionalis A E.



Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis partes, ſiquidem cum A D, ſit diameter quadrati A C, erit quadratum A D duplum interuallum quadratorum maioris & mediæ: ex quadrato autem A D tollitur quadratum A B, & remanet B D quadratum quod diuiditur per lineam A B, & fit A E, ſiquidem illæ tres A B, B D, A E, ſunt continue proportionales.

47 primi.

Dico autem A E fore ſummam extremarum. Nam rectangulum ſub maiori extrema in differentiam extremarum æquatur quadrato differentiæ extremarum & rectangulo ſub minori extrema in differentiam extrema-

3 ſecundi.

rum ; ergò duplum rectangulum ſub maiori extrema in differentiam extremarum, erit æquale duplo quadrato differentiæ extremarum plus rectangulo ſub dupla minore in differentiam extremarum. Ergo ſi inde tollatur quadratum differentiæ extremarum reſtabit rectangulus ſub ſumma extremarum in differentiam extremarum. *1. ſecundi*

Sed differentia quadratorum maioris & mediæ eſt æquale rectangulo ſub maiori in differentiam extremarum, igitur ſi ex eius duplo, hoc eſt ſi ex quadrato A D tollatur quadratum differentiæ extremarum A B, reſtabit quadratum B D æquale rectangulo ſub ſumma extremarum in differentiam extremarum A B. Eſt autem quadratum B D æquale rectangulo ſub A E in A B, quoniam ex conſtructione illę tres A E, BD, AB, ſunt continuè proportionales. Ergo A E eſt ſumma extremarum. Quod erat demonſtrandum. *4 ſecundi. 1. ſecundi. 17. ſexti. 47 primi. 17 ſexti.*

Corollarium.

HInc collige aliquot theoremata. Si fuerint tres quantitates proportionales, quadratum differentiæ extremarum plus duplo quadratorum mediæ & minoris interuallo, æquatur differentiæ quadratorum ab extremis. Item in eadem ſerie, duplum quadratorum mediæ & maioris interuallum multatum quadrato differentiæ extremarum æquatur eidem differentiæ quadratorum ab extremis. Item planum ſub ſumma extremarum in differentiam extremarum æquatur eidem differentiæ quadratorum ab extremis. Aliunde certum eſt differentiam quadratorum mediæ & minoris plus differentia quadratorum mediæ & maioris æquari eidem differentiæ quadratorum ab extremis. Vnde ſequitur quatuor illa antecedentia hic poſita eſſe inter ſe æqualia. Item hic quoque demonſtratum eſt planum ſub differentia extremarumn minorem æquari interual-

lo quadratorum mediæ & minoris; & planum ſub differentiâ extremarum in maiorem æquari interuallo quadratorum mediæ & maioris. Quę omnia adnotaſſe operæ pretium erit.

PROPOSITIO XXIV.

Idem problema longe faciliori modo exequi.

ESto numerus 6 pro differentia extremorum. Et 12 pro interuallo quadratorum medii & minoris. Ponatur 1 R pro minore. Ergo maior erit 1 R † 6. Et ita productus ſub extremis 1 Q † 6 R, æqualis erit quadrato medij. Ex hoc igitur ſi tollas quadratum minoris 1 Q, reſtabunt 6 R æquales interuallo dato 12. Igitur 1 R eſt 2. Singulique 2. 4. 8.

Lem. 6.

Similiter data eadem differentiâ extremorum 6. & interuallo quadratorum medii & maioris 48. Ponatur maior 1 R ergo 1 R - 6 erit minor. Igitur productus ſub extremis 1 Q - 6 R ęqualis erit quadrato medii. Et proinde ſi tollas 1 Q - 6 R ex quadrato maioris 1 Q, reſiduum 6 R erit æquale interuallo dato 48. Et proinde 1 R ſiue maior erit 8. ſingulique 8.4. 2.

Lem. 6.

Hinc Canon.

DIuide interuallum quadratorum medii & minoris per differentiam extremorum & habebis minorem: interuallum vero quadratorum medii & maioris diuide per eandem differentiam extremorum, & habebis maiorem.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data differentia extremarum A. linea verò B poſſit interuallum quadratorum alterius extremæ & mediæ. Duabus A & B inueniatur C tertia proportionalis.

Mani-

Manifeſtum eſt obſeruari integrum Canonem; ſic enim abſolui diuiſionem Geometricè iam docuimus ſupra.

Dico autem C fore alteram ex extremis: nam ex Corollario præcedenti rectangulum ſub differentia extremarum in minorem vel maiorem æquatur interuallo quadratorum mediæ & minoris, vel mediæ & maioris. Igitur quadratum B æquale eſt rectangulo ſub A in alterutram extremam, ſed A, B, C. ſunt continuè proportionales, ergo quadratum B, æquatur rectangulo ſub A in C. Igitur C eſt alterutra extrema. Quod erat oſtendendum. *17. ſexti.*

PROPOSITIO XXV.

Data ſumma extremarum & interuallo quadratorum mediæ & maioris extremæ, inuenire tres quantitates proportionales.

ESto datus numerus 10 pro ſumma numerorum, & 48 pro differentia quadratorum. Ponatur autem interuallum extremorum 1 R. Et quia ex Coroll. Propoſ. 23. Planum ex ſumma extremorum in differentiam extremorum æquatur duplo quadratorum medii & maioris interuallo minus quadrato differentiæ extremorum; multiplicando ſummam extremorum 10 per eorum differentiam 1 R habebis 10 R æquari duplo 48 minus 1 Q, hoc eſt 96 - 1 Q. Igitur 1 Q æquale eſt 96 - 10 R. Et proinde 1 R, ſiue differentia extremorum eſt 6. Singulique proportionales erunt 2. 4. 8.

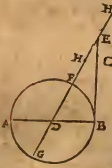
Aliter ponēdo 1 R iterum pro differentia extremorum erit 10 † 1 R duplum maioris & 10 1 R duplum minoris. Ergo extremi erunt $\frac{10 \dagger R}{2}$ & $\frac{10 - 1 R}{2}$. Horum productus *Lem 1.* eſt æqualis quadrato medii, quare ſi illæ productus *Lem. 6.* $\frac{100 - 1 Q}{4}$ tollatur de quadrato maioris extremi $\frac{100 \dagger 1 Q \; 20 R;}{4}$

reſiduum $\frac{1Q - 10R}{4}$ erit æquale differentiæ datæ 48. Et proinde 1 Q vt ſuprà æquabitur 96 - 10 R. & ita 1 R ſiue differentia eſt 6.

Hinc Canon.

QVadrato dimidiæ ſummæ extremorum adde duplum differentiæ quadratorum datæ: huius enim aggregati radix quadrata multata dimidio ſummæ extremorum exhibebit differentiam extremorum. Vnde ſinguli non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.



SIt A B ſumma extremarum de tribus lineis proportionalibus, & B C linea potens differentiam quadratorum mediæ & maioris. Super A B fiat circulus cuius centrum D. Et ſumpta B E poteſtate dupla ipſius B C, iungatur ad angulos rectos cum A B, nexaque & producta E D ſecet circuli peripheriam in punctis F G.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis partes, ſiquidem quadratum B E additur quadrato B D, & fit quadratum D E, cuius latus D E multatum D F, relinquit F E.

Dico autem F E fore differentiam extremarum. Sit enim, ſi fieri poteſt differentia extremarum inæqualis F E & æqualis F H (ſiue ſit minor ſiue maior) quoniam igitur ex Corollario Prop. 23. rectangulum G F H ſub ſumma & differentia extremarum æquatur quadrato B E minus quadrato F H, erit rectangulum G F H plus
3. ſecundi. quadrato F H æquale quadrato B E. Sed rectangulum G H F æquatur rectangulo G F H plus quadrato F H.

& proinde rectangulum G H F erit æquale quadrato B E.

Sed B E eſt perpendicularis ad extremitatem diametri, ergo erit tangens. Igitur rectangulum G E F æquatur quadrato B E. Ac proinde rectangulum G E F æquale erit rectangulo G H F pars toti, vel totum parti, quod eſt abſurdum. Non ergo differentia extremarum poteſt eſſe inæqualis F E. Ergo erit ipſi æqualis. Quod erat demonſtrandum. *16 tertii.* *36. tertii.*

Corollarium.

SI fuerint tres quantitates proportionales quadruplum quadratum maioris extremæ, duplum differentiæ quadratorum mediæ & maioris, itemque quadratum differentiæ extremarum erunt in continua proportione. Item in eadem ſerie, erit vt dupla ſumma maioris ad differentiam extremarum; ſic quadruplum quadratum maioris ad duplum differentiæ quadratorum mediæ & maioris; vel duplum differentiæ quadratorum mediæ & maioris ad quadratum differentiæ extremarum. Ratio vtriuſque eſt quia cum rectangulum G E F ſit æquale quadrato B E. Erunt lineę & quadrata G E. B E. F E continuè proportionalia. *17 ſexti.* *20 ſexti.*

PROPOSITIO XXVI.

Hoc idem problema alio modo abſoluere.

DAtis iiſdem 10 & 48. Ponatur 1 R pro maiore ergo quoniam ſumma extremorum eſt 10, erit minor 10 - 1 R, ac proinde productus extremorum, qui ſemper eſt æqualis quadrato medii eſt 10 R - 1 Q. Ergo ſi ex quadrato maioris 1 Q, ſuſtuleris 10 R - 1 Q, reſiduum 2 R - 10 R æquabitur differentiæ quadratorum datæ 48. Igitur 1 Q eſt æquale 24 † 5 R. Et ita 1 R ſiue maior *Lem 6.*

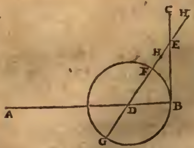
eſt 8. ſingulique 8. 4. 2.

Hinc Canon.

QVadrato quadrantis ſummæ extremorum adde dimidiam quadratorum m. dii & maioris differentiam : huius enim aggregati radix quadrata addita eidem quadranti exhibebit maiorem extremum. Vnde ſinguli non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data ſumma extremarum A B, & B C poſſit differentiam quadratorum mediæ & maioris. Sumatur B D quadrans ipſius A B, & B E potens dimidium quadrati B C, ſit perpendicularis ad A B, nectaturque D E. Tum centro D interuallo D B fiat circulus ſecans productam E D in punctis F G.



Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes, ſiquidem quadratum D B additur quadrato B E, & fit quadratum D E, cuius latus D E, additum D G, exhibet G E.

Dico autem GE fore maiorem ex quæſitis. Sit enim maior, ſi fieri poteſt, inæqualis G E & æqualis G H. Ergo quoniam maior continet minorem & differentiam extremarum, clarum eſt quod ſi ex maiore tollatur dimidia extremarum, ſumma relinquetur, dimidia extremarum differentia ; ergo cum ex maiore G H tollatur dimidia ſumma extremarum G F, erit F H dimidia extremarum differentia. Ac proinde ex Corollario Propoſ. 23. rectangulum G H F ſub maiore in dimidiam extremarum differentiam æqua-

bitur dimidio quadratorum mediæ & maioris interuallo, hoc eſt quadrato B E.

Sed B E eſt perpendicularis ad extremitatem diametri, & proinde tangens, igitur G E F æquabitur quadrato B E. Ergo rectangulum G E F erit æquale rectangulo G H F, pars toti, vel totum parti, quod eſt abſurdum. Ergo maior non poteſt eſſe inæqualis G E, ac propterea erit ipſi æqualis. Quod erat demonſtrandum. *16. tertii.* *36 tertii.*

Corollarium.

Si fuerint tres quantitates proportionales, quadruplum quadratum maioris, dupla quadratorum mediæ & maioris differentia, itemque quadratum differentiæ extremarum erunt in continua proportione. Nam cum rectangulum G E F ſit oſtenſum æquale quadrato B E, erit vt G E ad B E; ita BE ad EF. Et conſequenter trium illarum linearum G E, B E, E F quadrata erunt. Proportionalia, ergo & eorum quadrupla quod eſt hic propoſitum. Siquidem E F oſtenſa eſt æqualis dimidiæ extremarum differentiæ. Et hinc ſequitur forè vt dupla maior ad differentiam extremarum, ſic quadruplum quadratum maioris ad duplam quadratorum medæ & maioris differentiam; vel dupla quadratorum mediæ & maioris differentia ad quadratum differentiæ extremarum. *17. ſexti.* *20. ſexti.*

PROPOSITIO XXVII.

Data ſumma extremarum & differentia quadratorum mediæ & minoris inuenire tres quantitates proportionales.

Esto datus numerus 10 pro ſumma numerorum. Et 12 pro differentia quadratorum. Ponatur 1 R pro differentia extremorum, & quia in ſerie trium propor-

tionalium ex Corollario Propoſ. 23. Planum ſub ſumma extremorum in differentiam extremorum æquatur quadrato differentiæ extremorum plus duplo quadratorum medii & minoris interuallo, erit productus ex ſumma extremorum 10 in 1 R, nempe 10 R, æqualis quadrato differentiæ extremorum plus 24. Igitur quoniam 1 R eſt differentia extremorum, erit 1 Q † 24 æqualis 10 R. Ergo 1 R ſiue differentia extremorum eſt 6. ſingulique 2.4.8.

Aliter ponendo iterum 1 R pro differentia extremorum, erit 10 † 1 R duplum maioris. Et 10 - 1 R duplum *Lem. 1.*
minoris. Et proinde maior erit $\frac{10 \dagger 1 R}{2}$ & minor $\frac{10 - 1 R.}{2}$
Lem. 6. Quorum extremorum productus $\frac{100 - 1 Q}{4}$ æqualis eſt quadrato medii. Igitur ſi ex hoc quadrato medii $\frac{100 - 1 Q}{4}$
4. tollas quadratum minoris $\frac{100 \dagger 1 Q - 20 R}{4}$, reſiduum $\frac{20 R - 2 Q}{4}$ æquale erit differentiæ datæ 12. Et proinde 10 R - 24 æquabuntur 1 Q. Ergo 1 R ſiue differentia extremorum eſt 6. ſingulique iterum 2.4.8.

Hinc Canon.

EX quadrato dimidiæ ſummæ extremorum tolle duplam quadratorum medij & minoris differentiam: reſidui radix quadrata addita dimidiæ extremorum ſummæ exhibebit differentiam extremorum. Vnde ſinguli non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data ſumma extremarum A B, linea verò B C poſſit differentiam quadratorum à media & minore eorum. Coniungantur illæ lineæ ad angulos rectos. Et fiat ſemicirculus ſupra A B, tum ſumatur B D æqualis

diametro quadrati B C, ductaque D E parallela B A occurrat peripheriæ in puncto E. Ex quo demittatur E F perpendicularis ad A B.



Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis partes, ſiquidem diuiſa A B bifariam in puncto G, & ducta G E, quadratum E F, hoc eſt D B, duplum quadrati B C, tollitur ex quadrato E G & reſtat quadratum G F. Cuius latus G F additum A G exhibet A F.

Dico autem lineam A F fore differentiam extremarum, nam diuiſá F B bifariam in H, erectaque perpendiculari H I, erunt illæ tres lineæ A H, H I, H B, continuè proportionales. Ergo rectangulum A H B æquatur quadrato H I. Sed rectangulum A H B æquale eſt quadrato F H & rectangulo H F A. Igitur rectangulum H F A plus quadrato F H æquatur quadrato mediæ H I. & proinde differentia quadratorum mediæ H I. Et minoris H B, eſt rectangulum H F A. Sed quoniam F B diuiſa eſt bifariam in H, erit rectangulum A F B, hoc eſt quadratum FE ſiue B D duplum rectanguli A F H. Ergo cum quadratum B D quæ eſt diameter quadrati facti ex B C, ſit duplum quadrati B C, erit rectangulum A F H æquale quadrato B C.

8. *ſexti.* 4 *ſexti.* 17. *ſexti.* 1. *ſecundi.*

Sed A F eſt differentia extremarum A H, HB, & aliunde conſtat ex Corollario Propoſ. 23. rectangulum ſub minore in differentiam extremarum æquari interualló quadratorum mediæ & minoris. Ergo inuentæ ſunt tres lineæ continuè proportionales A H, H I, H B, quarum extremæ æquantur A B, itaut differentia quadratorum mediæ & minoris ſit æqualis quadrato B C. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

SI fuerint tres quantitates proportionales, quadruplum quadratum minoris extremæ, duplum differentiæ quadratorum minoris & mediæ, itémque quadratum differentiæ extremarum erunt in continua proportione. Item in eadem ſerie, eſt vt ſumma extremarum ad differentiam extremarum; ita quadratum ſummæ extremarum ad quadratum differentiæ extremarum plus duplo quadratorum mediæ & minoris interuallo. Item vt ſumma extremarum ad duplam minorem; ita quadratum ſummę extremarum ad quadruplum quadratum minoris plus duplo quadratorum mediæ & minoris interuallo.
8. ſexti. Hæc omnia ſequuntur ex eo quod tres lineæ B F, F E, F A.
4. ſexti. Itemque tres aliæ A B, A E, A F. Itemque tres aliæ AB, B E, B F ſint continuè proportionales.

PROPOSITIO XXVIII.

Hoc idem problema alio modo perficere.

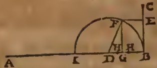
DAtis iiſdem 10 & 12. Ponatur minor extremus 1 R. Ergo alter extremus erit 10 - 1 R. Quorum productus 10 R - 1 Q æqualis eſt quadrato medii. Ergo ſi
Lem. 6. ex eo tollatur quadratum minoris 1 Q, reſiduum 10 R - 2 Q æquabitur differentiæ datæ 12. Igitur 1 Q eſt æquale 5 R - 6. Et proinde 1 R, ſiue minor eſt 2. ſingulique ſunt 2. 4. 8.

Hinc Canon.

EX quadrato quadrantis ſummæ extremorum tolle dimidium interualli dati: huius enim reſidui radix quadrata, ſupradicto detracta quadranti exhibebit minorem extremum. Vnde reliqui non latebunt.

Hinc

Hinc Effectio Geometrica.



SIt data ſumma extremarum AB, & linea BC poſſit differentiam quadratorum mediæ & minoris. Sumatur BD quadrans ipſius AB, & centro D interuallo DB fiat ſemicirculus. Tum inueniatur BE potens dimidium quadrati BC perpendicularis ad AB. Deinde ducatur EF parallela AB, donec occurrat peripheriæ in puncto F, ex quo demittatur FG perpendiculariter ad diametrum.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes, ſiquidem ex quadrato DF, quadrãtis ipſius AB, tollitur quadratum GF, hoc eſt BE quod eſt ſemiſſis quadrati BC. Et remanet quadratum DG, cuius latus DG ſublatum ex DB, exhibet GB.

Dico autem GB fore minorem extremam. Sit enim, ſi fieri poteſt, minor extrema inæqualis GB & æqualis BH. Ergo cum ex dimidia extremarum ſumma IB, tollatur minor BH, reſidua IH, æquabitur dimidiæ extremarum differentiæ. Igitur ex Corollario Propoſ. 23. rectangulum IHD ſub minore in dimidiam extremarum differentiam æquabitur dimidio quadratorum mediȩ & minoris interuallo, hoc eſt quadrato BE vel GF. Sed eidem quadrato GF eſt æquale rectangulum IGB. Igitur rectangulum IGB æquatur rectangulo IHB 8. ſexti.
quod eſt contra quintam ſecundi elementorum. Ergo .. ſexti. 17. ſexti.
minor extrema non poteſt eſſe inæqualis GB. Et proinde erit ipſi æqualis. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

POſſent ex præſenti Propoſitione elici eadem theoremata, quæ eliciumus ex præcedente, quia quæli-

libet quantitates ita ſe habent inter ſe, ſicut earum quadrantes. Quod indicaſſe ſatis erit.

PROPOSITIO XXIX.

Data minore extrema de tribus quantitatibus proportionalibus & differentia quadratorum à reliquis, inuenire reliquas.

ESto datus pro numerus 2 pro minore. Et 48 pro interuallo quadratorum. Ponatur 1 R pro maiore. Igitur ſi 2 multiplices in 1 R, fiet productus extremorum 2 R æqualis quadrato medii. Quare ſi tollas 2 R de quadrato maioris extremi 1 Q reſiduum 1 Q - 2 R æquabitur interuallo dato 48. Et proinde 1 Q eſt æquale 48 + 2 R. Igitur 1 R ſiue maior extremus eſt 8. ſingulique 2. 4. 8.

Lem. 6.

Aliter. Ponatur 1 R pro differentia extremorum. Igitur ex Corollario Propoſit. 23. 2 R erit interuallum quadratorum medii & minoris. Item ex eodem Corollario 48 - 1 Q æquabitur eidem differentiæ quadratorum medii & minoris. Igitur 2 R æquabuntur 48 - 1 Q. Et ita 1 Q erit æquale 48 - 2 R. Vnde 1 R, ſiue differentia extremorum eſt 6 ſingulique 2.4.8.

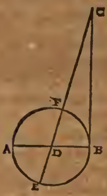
Hinc Canon.

QVadrato dimidii extremi dati adde interuallum quadratorum: huius enim ſummæ radix quadrata aucta & multata ſupradicto dimidio exhibebit maiorem extremum & differentiam extremorum.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data minor extrema A B, & B C poſſit differentiam quadratorum a reliquis. Diuidatur A B bifariam in D,

& centro D interuallo D B fiat circulus. Tum erecta B C perpendiculariter ad A B, ducta & protracta C D ſecet circuli peripheriam in punctis E, F.



Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis partes, ſiquidem quadratum D B additum quadrato B C, facit quadratum D C. Cuius latus D C auctumq; & multatum dimidio D B, exhibet C F & C E.

Dico autem C F eſſe maiorem extremam quæſitam & C E differentiam extremarum. Nam ſumpta G media proportionali inter C F & E F, erit rectangulum ſub maiori C F & differentia extremarum E C æquale interuallo quadratorum C F & G ex Corollario Propoſ. 23.

Sed quia B C perpendicularis eſt ad extremitatem diametri, tangit circulum. Et proinde rectangulum F C E æquatur quadrato B C. Igitur inuentæ ſunt tres lineæ proportionales F C, G, E F, quarum minor eſt data, vnà cum B C potente differentiam quadratorum à reliquis. Quod erat demonſtrandum. *16. tertii. 36 tertii.*

Corollarium.

SI fuerint tres quantitates proportionales, quadratum maioris, differentia quadratorum maioris & mediæ, itemque quadratum differentiæ extremarum erunt in continua proportione. Item vt maior ad differentiam extremarum; ſic quadratum maioris ad differentiam quadratorum maioris & mediæ, vel differentia quadratorum maioris & mediæ ad quadratum differentiæ extremarum. Ratio vtriuſque eſt quia cum rectangulum F C E æquale ſit quadrato B C, erit vt F C ad B C; ita B C ad E C. Igitur earum quadrata erunt quoque proportionalia. *17. ſexti. 20. ſexti.*

PROPOSITIO XXX.

Data maiore extrema de tribus quantitatibus proportionalibus, & differentia quadratorum à reliquis, inuenire reliquas.

ESto datus numerus 8 pro maiore & 12 pro differentia quadratorum. Ponatur minor 1 R. Ergo productus extremorum 8 R æqualis erit quadrato medii. Proindeque ſi ex 8 R tollas quadratum minoris, reſtabit 8 R - 1 Q æqualis 12. Igitur 1 Q æquabitur 8 R - 12. & ita 1 R, ſiue minor eſt 2. ſingulique 2.4.8. *Lem. 6.*

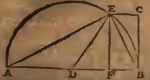
Aliter. Ponatur 1 R pro differentia extremorum, igitur ex Corollario Propoſ. 23. cum minor ſit 8 - 1 R, erit 8 R - 1 Q æqualis differentiæ datæ 12. vt ſuprà.

Hinc Canon.

EX quadrato dimidii extremi dati tolle differentiam quadratorum datam: huius enim reſidui radix quadrata ſupradicto detracta vel addita dimidio exhibebit minorem extremum vel differentiam extremorum.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data maior A B & B C potens differentiam quadratorum à reliquis. Coniungantur ad angulos rectos & ſuper A B fiat ſemicirculus cuius centrum D. Tum ducta C E parallela A B, occurrat peripheriæ in E, ex quo demittatur perpendiculariter E F.



Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes, ſiquidem ex quadrato D E tollitur quadratum

E F, hoc eſt B C, & relinquitur quadratum D F, cuius latus detractum ex D B relinquit F B, additum vero A D exhibet A F.

Dico autem F B fore minorem extremam, & A F differentiam extremarum. Nam ducta B E, erunt A B, B E, B F, continue proportionales, quadratum vero B E diſtat à quadrato F B, per quadratum F E, igitur inuentæ ſunt tres proportionales data maiore A B, & data B C hoc eſt F C, potente differentiam quadratorum à reliquis. Quod erat demonſtrandum. 8. ſexti. 4 ſexti. 47 primi

Corollarium.

SI fuerint tres quantitates continuè proportionales erit vt differentia extremarum ad minorem, ſic quadratum differentiæ extremarum ad interuallum quadratorum mediæ & minoris, vel interuallum quadratorum mediæ & minoris ad quadratum minoris. Item in eadem ſerie, quadratum differentiæ extremarum, differentia quadratorum mediæ & minoris, itemque quadratum minoris erunt in continua proportione. Ratio vtriuſque eſt quia tres lineæ A F, F E & F B ſunt continuè proportionales. Ergo & earum quadrata erunt proportionalia. 8. ſexti 4 ſexti. 20 ſexti.

Appendix.

HIc poſtularet ordo vt ſolueremus ſequentia problemata, Primum, data ſumma extremarum & interuallo quadratorum ab extremis inuenire tres quantitates proportionales. Secundum, data differentia extremarum, & eodem interuallo. Tertium, data differentia quadratorum à duabus prioribus, & differentia quadratorum à duabus poſterioribus. Sed facillima ſunt ex prædictis: primum quidem quia cum ex Corollario Propoſ. 23. planum ſub ſumma extremarum in differentiam extremarum æquetur interuallo quadratorum ab

extremis, diuiſo illo interuallo per ſummam extremarum orietur differentia extremarum. Secundum verò, quia propter eandem rationem diuiſo illo interuallo per differentiam extremarum orietur ſumma extremarum. Tertium autem, quia ex eodem Corollario ſi differentia minor tollatur ex maiore, relinquetur quadratum differentiæ extremarum per cuius radicem ſi diuidas ſummam duarum differentiarũ datarum, orietur ſumma extremarum. Quare iis expeditis ad alia iucundiora & difficiliora ſimul progredior.

PROPOSITIO XXXI.

Data proportione quadrati vnius extremæ ad quadrata reliquarum inuenire tres quantitates continuè proportionales.

NOn immoror in aſſignando, quando fieri poſſit, tum quia res eſt facilis, tum quia ex operatione Algebræ cognoſcetur. Eſto ergo data ratio quadrati quod fit à maiore ad quadrata reliquarum 16 ad 5. Ponatur 1 R pro minori, ſumaturque poſterior terminus proportionis 5 pro maiore. Igitur multiplicando 5. per
Lem. 6. 1 R, fiet productus ſub extremis 5 R æqualis quadrato medii. Proindeque 25 ad 5 R † 1 Q eſt in data ratione 16 ad 5. Ergo productus ſub extremis 125 æquatur producto ſub mediis, 80 R † 16 Q. Et ita 1 Q eſt æquale
Lem. 6. $\frac{125 \cdot 5R}{16}$. Vnde 1 R ſiue minor eſt $\frac{5}{4}$ ſumptus vero eſt poſterior terminus proportionis 5 pro maiore. Igitur 5. $\frac{5}{2}$. $\frac{5}{4}$. Erunt tres numeri quæſiti cum conditionibus poſtulatis.

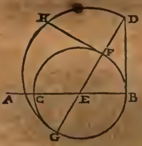
Detur nunc ratio minoris quadrati ad quadrata reliquarum 1 ad 20. Sumaturque poſterior terminus proportionis 20 pro minore & ponatur 1 R pro maiore. Ergo

erit 20 R productus ſub extremis æqualis quadrato medii. *Lem. 6.*
Igitur 400 ad 20 R + 1 Q erit in ratione data 1 ad 20. Et proinde productus ſub extremis 8000 æqualis erit producto ſub mediis 20 R + 1 Q. Et ita 1 Q æquale erit 8000 - 20 R. Vnde 1 R, ſiue maior, erit 80. Singulique 20. 40. 80. *Lem. 6.*

Hinc Canon.

CVbum poſterioris termini diuide per priorem terminum proportionis datæ, & quotientem adde quadrato quod fit à dimidio poſterioris termini: huius enim ſummæ radix quadrata multata eodem dimidio exhibebit vnum extremum, altero extremo exiſtente poſteriore termino proportionis. Vnde medius non latebit.

Hinc Effectio Geometrica.



SIt data ratio A B ad B C, oporteatque inuenire tres lineas continuè proportionales taliter vt quadratum vnius extremæ ad quadrata reliquarum ſit, vt A B ad B C. Fiat vt A B ad B C; ita quadratum B C ad quadratum B D. Ponaturque linea B D perpendicularis ad B C ſupra quam fiat circulus, cuius centrum E; tum connexa D E & producta ſecet circuli peripheriam in punctis F & G.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes, ſiquidem cum ſit A B ad B C, vt quadratum C B ad quadratum B D, erit ſolidum rectangulum ſub extremis ex quadrato B D in lineam A B æquale ſolido rectangulo ſub mediis hoc eſt cubo C B. Igitur cubus C B diuiditur per A B & fit quotiens Geometricus B D quadra- *34 vndec. el.*

tum, quo addito ad quadratum E B, fit quadratum E D, cuius latus multatum E F, exhibet F D.

Dico autem F D fore vnam extremam, altera exiſtente G F poſteriore termino proportionis datæ. Nam facto ſupra G D ſemicirculo, & erecta F H perpendiculari
16 tertij. ad G D, cum B D ſit perpendicularis ad extremitatem
36. tertij. diametri erit tangens, & proinde quadratum B D æquabitur rectangulo G D F. Igitur cum ſit vt A B ad C B; ita quadratum C B ad quadratum B D, erit quoque vt A B ad B C; ita quadratum G F ad rectangulum G D F.

3. ſecundi. Sed rectangulum G D F æquatur rectangulo G F D & quadrato F D. Ergo quadratum G F ad rectangulum G F D & quadratum F D, erit in ratione data A B ad
8. ſexti. B C. Cum igitur rectangulum G F D æquetur quadrato
4. ſexti. F H, erit quadratum G F ad quadrata F H & F D in
17. ſexti. ratione data. Ergo inuentæ ſunt tres lineæ proportionales G F, F H, F D, itaut quadratum extremæ G F ad quadrata reliquarum F H, F D, habeant rationem datam A B ad B C. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXXII.

Hoc idem problema alio modo perficere.

Data eadem proportione 16 ad 5. Ponatur 1 R pro maiore & pro minore ſumatur poſterior terminus proportionis 5. Igitur multiplicando 5 per 1 R, habebis
Lem. 6. productum extremorum 5 R æqualem quadrato medii. Et proinde 1 Q ad 5 R + 25 erit in ratione data 16 ad 5. Ergo productus ſub extremis 5 Q æqualis erit producto
Lem. ſub mediis 80 R + 400. Et ita 1 Q eſt æquale 16 R + 80. Vnde 1 R ſiue maior extremus eſt 20. Minor vero ſumptus eſt poſterior terminus proportionis 5. Igitur ſi inter 20 & 5. capias medium proportionalem erunt ſinguli 20. 10. 5

Detur

Detur nunc ratio minoris quadrati ad quadrata reliquarum 1 ad 20. Ponaturque 1 R pro minore & ſumatur 20 poſterior terminus proportionis pro maiore. Ergo productus ſub extremis 20 R æqualis erit quadrato medii. *Lem 6* Igitur 1 Q ad 20 R † 400 erit in ratione data 1 ad 20. Et ita productus ſub extremis 20 Q æquabitur producto ſub *Lem 6* mediis 20 R † 400. Ergo 1 Q eſt æquale 1 R † 20. Vnde 1 R ſiue minor eſt 5. Sumptus autem fuit poſterior terminus proportionis 20 pro maiore. Igitur ſinguli erunt 20. 10. 5.

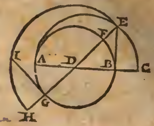
Hinc Canon.

Productum ſub duobus datæ proportionis terminis, adde cum quadrato quod fit à dimidio prioris termini: huius aggregati radix quadrata, ſupradicto iuncta dimidio exhibebit vnum extremum, altero exiſtente poſteriore termino proportionis.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data ratio A B ad B C. Supra totam A C fiat ſemicirculus & ſupra A B circulus cuius centrum D. Erectaque B E perpendiculari ad A C. Nectatur E D, & producatur donec ſecet circuli peripheriam in punctis F, G.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis partes, ſiquidem productus ſub terminis proportionis A B, B C eſt quadratum B E, quod additur quadrato B D, & fit quadratum D E, cuius latus D E, additum D G, exhibet E G.



Dico autem E G fore vnam extremam altera exiſtente B C poſteriore termino proportionis. Nam ſumpta G H

æquali B C, erigatur G I perpendicularis ad H E, ſecans ſemicirculum factum ſupra H E in puncto I. Hoc po-
1. ſexti. ſito erit vt F G ad G H; ita propter eamdem altitudinem G E, rectangulum E G F, ad rectangulum E G H, hoc
8. ſexti. eſt quadratum G I. Sed eſt F G æqualis A B, & H G
4 ſexti. 17. ſexti. æqualis B C. Eſt autem vt A B ad B C; ita quadratum
20 ſexti. B C ad quadratum B C.
16 tertii. 36. tertii. Quoniam vero B E eſt perpendicularis ad extremitatem diametri, erit B E tangens, & quadratum B E æquale rectangulo G E F. Igitur vt eadem F G ad eamdem
12 quinti G H; ita rectangulum G E F ad quadratum G H. Ergo componendo antecedentia cum antecedentibus, & conſequentia cum conſequentibus, erit vt A B ad B C, ita rectangulum E G F plus rectangulo G E F, ad quadratum
2 ſecundi. G I plus quadrato G H. Sed rectangula E G F & G E F æquantur quadrato G E. Igitur vt A B ad B C; ita quadratum G E ad quadrata G I, G H. Ergo inuentæ ſunt tres lineæ proportionales E G, G I, G H taliter vt quadratum vnius extremæ E G ad quadrata reliquarum G I, G H ſint in ratione data A B ad B C. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXXIII.

Hoc idem problema aliter abſoluere.

Data eadẽ proportione 16 ad 5. Ponatur 1 R pro maiore extremo. Et ſumatur prior terminus propor-
Lem. 6. tionis 16 pro minore. Ergo productus ſub extremis 16 R æqualis erit quadrato medii. Et proinde 1 Q ad 16 R † 256
Lem. 6. erit in ratione data 16 ad 5. Ergo productus ſub extremis 5 Q æquabitur producto ſub mediis 256 R † 4096. Igitur 1 Q eſt æquale $\frac{256\,R \dagger 4096}{5}$. Et proinde 1 R, ſiue maior extremus, eſt 64. Singulique erunt 64. 32. 16.

Similiter data ratione minoris quadrati ad quadrata

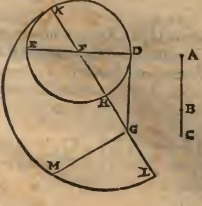
reliquarum 1 ad 20. Inueniretur tandem 1 Q æquale $\frac{1 R + 1}{20}$ & ita 1 R ſiue minor extremus foret $\frac{1}{4}$ maiore extremo exiſtente priore termino proportionis 1. Vnde ſinguli forent $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{2}$. 1.

Hinc Canon.

Qvadratum prioris termini proportionis diuide per poſteriorem terminum, quotientiſque cape dimidium, cuius dimidii quadrato adde quotientem qui fit diuidendo cubum prioris termini per poſteriorem: huius enim ſummæ radix quadrata ſupradicto addita dimidio exhibet vnum extremum, altero exiſtente priori termino proportionis.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data ratio A B ad B C. Fiat autem vt B C ad A B ita AB ad aliam quæ ſit E D, ſupra quam fiat circulus cuius centrum F. Tum fiat vt B C ad A B, ita quadratum A B ad quadratum D G. Ponaturque linea D G ad diametrum E D perpendicularis, & iuncta G F producatur, donec ſecet circuli peripheriam in punctis H. K.



Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes, ſiquidem cum tres illæ B C, A B, E D ſint continuè proportionales quadratum mediæ A B diuiditur per lineam B C, & fit linea E D pro quo-tiente Geometrico. Deinde verò cum ſit vt B C ad A B,

ita quadratum A B ad quadratum D G, erit cubus A B diuiſus per lineam B C, & fiet quadratum D G pro quotiente Geometrico. Hoc autem quadrato D G addito cum quadrato F D, fit quadratum F G, cuius latus F G additum F K exhibet G K.

Dico autem lineam G K fore vnam extremam, altera exiſtente A B priore proportionis datæ termino. Sumatur enim G L æqualis A B & ponatur in directum ipſi K G, & ſupra totam K L fiat ſemicirculus ad cuius diametrum erigatur G M perpendicularis. Et quoniam eſt vt E D hoc eſt K G ad G L hoc eſt A B, ita A B ad B C,
1.ſexti. eſt autem vt K H ad G L, ita ſumpta communi altitudine
8.ſexti. K G, rectangulum G K H ad rectangulum K G L, hoc
4 ſexti.
17.ſexti. eſt, quadratum G M, erit rectangulum G K H ad quadratum G M in ratione data. Sed eſt etiam ex conſtructione quadratum D G ad quadratum A B, hoc eſt G L in ratione data.

Eſt verò quadratum D G æquale rectangulo K G H
36. tertii. quia D G eſt tangens, cum ſit perpendicularis ad extre-
16 tertii mitatem diametri. Igitur componendo antecedentia
11 quinti. cum antecedentibus & conſequentia cum conſequentibus, rectangulum G K H plus rectangulo K G H ad qua-
2. ſecundi. drata G M. G L erunt in ratione data. Sed rectangula G K H & K G H ſunt æqualia quadrato K G. Igitur quadratum K G ad quadrata G M, G L eſt in ratione data A B ad B C, ergo inuentæ ſunt tres lineæ proportionales G K, G M, G L ita ut quadratum vnius extremæ G K ad quadrata reliquarum habeat rationem datam. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXXIV.

Hoc idem problema alio modo expedire.

DAta eadem ratione 16 ad 5. Sumatur prior terminus proportionis 16 pro maiori extremo. Et pona-

tur 1 R pro minori. Ergo productus extremorum 16 R erit æqualis quadrato medii. Et ita 256 ad 16 R † 1 Q erit in ratione data 16 ad 5. Ergo productus ſub extremis 1280 æquabitur producto ſub mediis 256 R † 16 Q. Igitur 1 Q erit æquale 80 - 16 R. Vnde 1 R ſiue minor extremus erit 4 maiore exiſtente 16 priore termino proportionis. Singulique erunt 16. 8. 4. *Lem. 6.* *Lem. 6.*

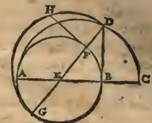
Similiter ſi daretur proportio minoris quadrati ad ſummam reliquorum 1 ad 20. Ponendo 1 R pro vno extremo & ſumendo 1 priorem terminum proportionis pro altero, inueniretur 1 Q æquale 20 - 1 R. Vnde 1 R ſiue vnus extremus foret 4 altero exiſtente 1. Singulique 4. 2. 1.

Hinc Canon.

PRoductum ſub terminis proportionis datæ, adde quadrato quod ſit à ſemiſſe prioris termini: huius enim aggregati radix quadrata multata ſemiſſe ſupradicta exhibebit vnum extremum de tribus numeris proportionalibus quæſitis, altero exiſtente priore termino proportionis.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data proportio A B ad B C. Supra totam A C fiat ſemicirculus, & erecta perpendiculari B D, diuidatur A B bifariam in E, fiatque circulus ſupra A B. Et connexa D E ſecet illius peripheriam in punctis F G.



Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes; ſiquidem rectangulum A B C, hoc eſt quadratum B D additur quadrato B E quod ſit à ſemiſſe prioris termini proportionis, & fit

quadratum D E cuius latus multatum E F, exhibet D F.

Dico autem D F fore vnam extremam de tribus lineis quæſitis, altera exiſtente G F. Nam ſupra totam G D fiat ſemicirculus ad cuius diametrum erigatur perpendi-
8. ſexti. cularis F H, quoniam igitur A B, B D, B C ſunt con-
4. ſexti. tinue proportionales, erit vt prima A B ad vltimam
20 ſexti. B C; ita quadratum primæ A B ad quadratum ſecundæ
16 tert. j. B D.
36. tertii. Sed cum ipſa B D ſit perpendicularis ad extremitatem diametri, erit tangens, & quadratum B D æquabitur re-
3. ſecundi ctangulo G D F, hoc eſt quadrato F D & rectangulo
8. ſexti G F D. Hoc autem rectangulum G F D eſt æquale
4. ſexti.
17. ſexti. quadrato F H. Ergo vt A B ad B C; ita quadratum A B, hoc eſt G F ad quadrata F H, F D. Igitur inuentæ ſunt tres lineæ proportionales G F, F H, F D, itaut quadratum vnius extremæ G F ad quadrata reliquarum ſint in ratione data A B ad B C. Quod erat demonſtrandum.

Appendix.

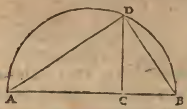
SI data fuiſſet quantitas diuidenda in tres proportionales; itaut quadratum primæ ad quadrata reliquarum datam haberet rationem, faciendum foret vt ſumma trium inuentarum ad ſingulas inuentas; ita quantitas data ad alias.

Deinde hinc etiam facile perficitur iſtud problema: inuenire tres quantitates proportionales; itaut quadrata primæ & ſecundæ ad quadratum tertiæ datam habeant rationem. Nam inuertendo, dabitur quoque proportio quadrati tertiæ ad quadrata reliquarum. Quod fuit hic ordinatum.

Tertiò ex hoc etiam ſequitur ſolutio iſtius problematis. Inuenire tres quantitates proportionales, itaut quadratum vnius extremæ ad quadrata ſingularum habeat rationem datam. Nam diuidendo & inuertendo, dabitur eadem,

quæ hic data fuit proportio.

Si iuberetur quadratum primæ habere rationem æqualitatis ad quadrata reliquarum, diuidenda foret quantitas media & extrema ratione: maius enim ſegmentum eſſet minor trium quæſitarum, maiore exiſtente tota diuiſa. Vnde facilis eſt effectio Geometrica. Sumpta enim



quæcunque linea A B diuidatur media & extrema ratione in C. Et ſupra totam fiat ſemicirculus & ex puncto C erigatur perpendicularis C D. Iunctis A D, D B. Habebuntur tres quæſitæ A B, A D, D B. Vnde patet hoc problema ſecundum lineas ſpectatum ſic potuiſſe enunciari. Conficere triangulum rectangulum cuius tria latera ſint continuè proportionalia.

Denique plurimis aliis modis potuit procedere operatio Algebrica: nam data eadem ratione 16 ad 5 potuit poni 1 R pro maiore vel minore extremo, ſumma extremorum exiſtente 16 priori termino rationis. Item potuit poni 1 R pro maiore vel minore, ſumma extremorum exiſtente 5 poſteriori termino rationis. Item potuit poni 1 R pro ſumma extremorum. Maiore vel minore exiſtente 16. Item potuit poni 1 R pro ſumma extremorum maiore vel minore exiſtente 5. Item potuit poni 1 R maior vel minor, exiſtente 16 vel 5 differentia extremorum. Item potuit poni 1 R differentia extremorum 16 vel 5 exiſtente maiore vel minore. Item potuit poni 1 R differentia extremarum 16 vel 5 exiſtente ſumma extremorum. Ex quibus omnibus orirentur noui Canones, & nouæ Effectiones Geometricæ. Quod indicaſſe ſatis erit.

PROPOSITIO XXXV.

Data ratione quadratorum ab extremis ad quadratum mediæ, inuenire tres quantitates continue proportionales.

ESto data ratio 17 ad 4. Ponaturque 1 R pro vno extremo de tribus numeris proportionalibus, & ſumatur poſterior terminus proportionis 4. Pro altero extremo. Ergo productus ſub extremis 4 R æqualis erit quadrato medii. Et aggregatum quadratorum ab extremis erit 1 Q † 16. Igitur 1 Q † 16 ad 4 R eſt in ratione data 17 ad 4. Ergo productus ſub extremis 4 Q † 64 æqualis erit producto ſub mediis 68 R. Et proinde poſt debitam reductionem & diuiſionem 1 Q erit æquale 17 R - 16. Vnde 1 R ſiue vnus extremorum erit 16 vel 1, altero exiſtente 4 poſteriori termino proportionis, ſimiliter ſi detur ratio 5 ad 2. Poſita 1 R pro vno extremo & ſumpto poſteriori termino 2. pro altero fiet 1 Q, æquale 5 R - 4 eritque 1 R 4 vel 1. ſingulique 4. ℞ 8. 2. vel 2. ℞ 2. 1.

Lem 6. *Lem. 6.*

Hinc Canon.

EX quadrato quod fit à dimidio prioris termini proportionis datæ tolle quadratum poſterioris termini huius enim reſidui radix quadrata addita vel detracta ſupradicto dimidio, exhibebit vnum extremum, altero exiſtente, poſteriore proportionis termino. Vnde medius non latebit.

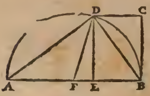
Hinc Effectio Geometrica.

SIt data ratio A B ad B C. Coniungantur illæ ad angulos rectos, & ſupra A B facto ſemicirculo, ducatur

C D

CD parallela AB, protrahaturque donec occurrat peripheriæ in puncto D. Ex quo demittatur perpendicularis DE.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes, ſiquidem ducta DF ad centrum ſemicirculi F, nexiſque AD & DB. Ex quadrato FD tollitur quadratum DE hoc eſt BC. Et relinquitur quadratum FE. Cuius latus FE additum & detractum dimidio AB exhibet AE & EB.



Dico autem alterutram illarum puta AE, fore vnam extremam quæſitam altera exiſtente ED poſteriore termino proportionis. Nam ratio AB ad ED componitur ex ratione AB ad AD & AD ad DE. Sed vt AB ad AD, ita AD ad AE. Ergo ratio AB ad DE componitur ex ratione AD ad DE & AD ad AE. *5 def. ſexti. 8. ſexti. 4 ſexti.*

Sed ex iiſdem componitur ratio quadrati AD ad rectangulum AED. Igitur quadratum AD, hoc eſt quadrata AE, ED ad rectangulum AED, erit in ratione data AB ad ED hoc eſt BC. Ergo ſi inueniatur K media proportionalis inter AE & ED habebuntur tres lineæ proportionales AE, K, & ED, itaut quadrata extremarum AE, ED ſint in ratione data ad quadratum mediæ K. Quod erat demonſtrandum. *23. ſexti. 47. primi. 13. ſexti. 17. ſexti.*

Similiter ſumpta altera ex inuentis EB. Oſtendetur rationem AB ad DE fore compoſitam ex ratione AB ad BD & BD ad DE, ſed vt AB ad BD, ita BD ad BE igitur ratio AB ad DE eſt compoſita ex BD ad DE & BD ad BE. Ex iiſdem autem componitur ratio quadrati BD ad rectangulum BED. Ergo quadratum BD, hoc eſt quadrata BE, ED ad rectangulum BED eſt in ratione data. Igitur ſi inueniatur K media proportionalis inter EB & ED, quadratum K erit æquale re- *Defin. 5. ſexti 8. ſexti. 4 ſexti. 23. ſexti. 47. primi. 13. ſexti. 17. ſexti.*

ctangulo

ctangulo D E B, & proinde habebuntur vt prius tres lineæ proportionales, E B, K, E D, taliter vt quadrata extremarum E B, E D, ad quadratum mediæ K, ſint in ratione data A B ad E D, hoc eſt B C. Quod erat demonſtrandum.

Appendix.

HInc patet illud problema ſecundum lineas ſpectatum potuiſſe ita enunciari. Conficere triangulum rectangulum tali ratione, vt quadratum ſubtendentis habeat rationem datam ad duplum trianguli, ſiue ad rectangulum quod comprehenditur ſub lateribus continentibus angulum rectum: probatum eſt enim quadratum A D ad rectangulum A E D eſſe in ratione data.

PROPOSITIO XXXVI.

Hoc idem problema aliter ſoluere.

DAta eadem proportione 17 ad 4. Ponatur 1 R pro medio, & ſumatur 4. Poſterior terminus proportionis pro ſumma extremorum. Quoniam ergo vt iam
Lem. 3. ſupra dictum eſt, quadratum ſummæ extremorum æ-
Lem 6. quatur quadratis extremorum & duplo quadrati medii, ſi ex quadrato ſummæ extremorum 16 tollas duplum quadrati medii 2 Q, reſiduum 16 - 2 Q æquabitur quadratis extremorum. Igitur 16 - 2 Q ad 1 Q erit in ratio-
Lem. 6. ne data 17 ad 4. Ergo productus ſub extremis 64 - 8 Q eſt æqualis producto ſub mediis 17 Q proindeque eſt etiam æquatio inter 1 Q & $\frac{64}{25}$. Et ita 1 R ſiue medius eſt $\frac{8}{5}$. Igitur ſi per Propoſ. 2. Huius diuidas 4 in duos tali modo vt $\frac{8}{5}$ ſit medio loco proportionalis. Erunt ſinguli $\frac{16}{5}$. $\frac{8}{5}$. $\frac{4}{5}$.

Similiter data ratione 5 ad 2. Poſitaque 1 R pro medio, fiet 4 - 2 Q ad 1 Q in ratione data 5 ad 2. Ergo productus ſub extremis 8 - 4 Q æquabitur producto ſub mediis 5 Q. Eritque 1 R ſiue medius ℞ $\frac{8}{9}$ ſingulique $\frac{4}{3}$. ℞ $\frac{8}{9}$. $\frac{2}{3}$. *Lem. 6.*

Quod ſi ponendo iterum 1 R pro medio accipias in primo exemplo, priorem terminum proportionis 17 pro ſumma extremorum, habebis 289 - 2 Q pro aggregato quadratorum ab extremis. Igitur 289 - 2 Q ad 1 Q eſt in data ratione 17 ad 4. Ergo productus ſub extremis 1156 - 8 Q æqualis erit producto ſub mediis 17 Q. Et ita 1 Q æquatur $\frac{1156}{25}$. Vnde 1 R ſiue medius eſt $\frac{34}{5}$. Singulique ordinati $\frac{68}{5}$. $\frac{34}{5}$. $\frac{17}{5}$. *Lem. 6.*

Similiter data ratione 5 ad 2. Poſitaque 1 R pro medio, habebis 25 - 2 Q ad 1 Q in ratione data 5 ad 2. Igitur productus ſub extremis 50 - 4 Q æqualis erit producto ſub mediis 5 Q. Et ita 1 Q eſt $\frac{50}{9}$. & 1 R ſiue medius eſt ℞ $\frac{50}{9}$ Singulique $\frac{10}{3}$. ℞ $\frac{50}{9}$. $\frac{5}{3}$. *Lem. 6*

Hinc Canon.

CVbum poſterioris termini proportionis datæ, diuide per priorem terminum plus duplo poſterioris, & habebis quadratum medii, ſumma extremorum exiſtente, poſteriore termino proportionis.

Vel.

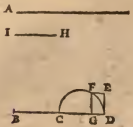
SOlidum ſub quadrato prioris termini proportionis datæ, in poſteriorem terminum, diuide per priorem terminum plus duplo poſterioris, & habebis quadratum medii, ſumma extremorum exiſtente priore termino proportionis.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data ratio lineæ A ad lineam B C. Sumatur C D æqualis B C. Fiatque vt A plus B D ad C D, ita quadratum C D ad quadratum D E.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis prioris partes: ſiquidem hoc poſito cubus C D æquabitur ſolido rectangulo quod fit ex quadrato D E in lineam A plus B D. Et ita cubus C D diuiſus per lineam A plus duplo B C exhibet quadratum D E pro quotiente Geometrico.

34 vndecimi



Dico autem D E fore mediam proportionalem poſteriore termino proportionis C D exiſtente ſumma extremarum. Ponatur enim D E perpendicularis ad B D & per Propoſ. 2. huius, factis omnibus vt vides in præſenti figura, inueniantur tres proportionales C G, G F, G D, quoniam ergo eſt vt A plus B D

8. ſexti. ad C D, ita quadratum C D ad quadratum D E, hoc eſt
4 ſexti.
17 ſexti. G F hoc eſt rectangulum C G D; erit diuidendo bis, vt A ad B C; ita quadratum C D minus duplo rectãguli C G D ad quadratum G F.

4. ſecundi. Sed quadratum C D multatum duplo rectanguli C G D, æquatur quadratis C G, G D. Igitur quadrata C G, G D ad quadratum G F ſunt in data ratione A ad B C. Ergo inuentæ ſunt tres proportionales C G, G F, G D taliter vt quadrata extremarum ad quadratum mediæ datam habeant rationem. Quod erat demonſtrandum.

Similiter fiat vt A plus B D ad B C, ita quadratum A ad aliud quadratum quod ſit I H. Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis poſterioris partes: ſiquidem ſolidum ſub quadrato A in lineam B C æquatur ſolido ſub

quadrato I H in lineam A plus B D; & ita prius ſolidum diuiditur per lineam A plus B D, & fit quadratum I H. Dico autem lineam I H fore mediam proportionalem, linea A, exiſtente ſumma extremarum. Demonſtratio non eſt diſſimilis præcedenti.

PROPOSITIO XXXVII.

Hoc idem problema alio modo perficere.

DAta eadem proportione 17 ad 4. Ponatur 1 R pro minore extremo, & ſumatur 4 pro differentia extremorum igitur 1 R + 4 erit maior extremus. Et 1 Q + 4 R productus ſub extremis æquabitur quadrato medii. Quadrata autem extremorum ſimul iuncta ſunt 2 Q + 16 + 8 R. Et proinde 2 Q + 16 + 8 R ad 1 Q + 4 R sūt in ratione data 17 ad 4. Ergo productus ſub extremis 8 Q + 64 + 32 R æqualis erit producto ſub mediis 17 Q + 68 R. Et ita 1 Q æquatur $\frac{64}{9}$ - 4 R. Vnde 1 R ſiue minor eſt $\frac{4}{3}$, poſteriore termino proportionis 4 exiſtente differentia extremorum. *Lem 6* *Lem. 6.*

Si vero poſita fuiſſet 1 R pro maiore extremo 1 Q fuiſſet æquale $\frac{64}{9}$ + 4 R & 1 R eſſet $\frac{16}{3}$. Singulique forent $\frac{4}{3}$. $\frac{8}{3}$. $\frac{16}{3}$.

Similiter data ratione 5 ad 2. Ponatur minor 1 R & ſumatur 2 pro differentia extremorum. Erit maior 1 R + 2 & productus ſub extremis 1 Q + 2 R æquabitur quadrato medii. Ergo quadrata extremorum 2 Q + 4 + 4 R ad quadratum medii 1 Q + 2 R erunt in ratione data 5 ad 2. Et ſic productus ſub extremis 4 Q + 8 + 8 R æquabitur producto ſub mediis 5 Q + 10 R. Ergo 1 R ſiue minor eſt 2. ſingulique 2. ℞ 8. 4. *Lem. 6.* *Lem. 6.*

Quod ſi data iterum ratione 17 ad 4. Ponas 1 R pro

minore & accipias priorem terminum proportionis 17 pro differentia extremorũ, fiet maior extremus 1 R + 17 & productus ſub extremis, 1 Q + 17 R erit æqualis quadrato medii. Igitur quadrata extremorum 2 Q + 289 + 34 R ad quadratum medii 1 Q + 17 R ſunt in ratione data, 17 ad 4. Ergo productus ſub extremis 8 Q + 1156 + 136 R æqualis eſt producto ſub mediis 17 Q + 289 R. Et ita 1 Q erit æquale $\frac{1156}{9}$ - 17 R & fit 1 R, ſiue minor, $\frac{17}{3}$ ſingulique ſunt $\frac{17}{3}$. $\frac{34}{3}$. $\frac{68}{3}$.

Lem. 6.

Lem. 6.

Similiter data ratione 5 ad 2, ſi ponas 1 R pro minore & ſumas 5 pro differentia extremorum; erit 1 R + 5 maior extremus. Et 1 Q + 5 R productus ſub extremis æquabitur quadrato medii. Igitur quadrata extremorum 2 Q + 25 + 10 R ad quadratum medii 1 Q + 5 R ſunt in data ratione 5 ad 2. Et ſic productus ſub extremis 4 Q + 50 + 20 R erit æqualis producto ſub mediis 5 Q + 25 R. Vnde 1 Q æquabitur 50 + 5 R. Et fit 1 R ſiue minor 5. ſingulique 5. ℞ 50. 10.

Lem. 6.

Lem. 6.

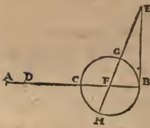
Hinc Canon.

CVbum poſterioris termini diuide per priorem terminum multatum duplo poſterioris; quotientem adde quadrato quod fit à dimidio poſterioris termini: huius enim ſummæ radix quadrata ſupradicto multata & aucta dimidio, exhibebit extremos ſigillatim.

Vel

SOlidum ſub quadrato prioris termini proportionis datæ in poſteriorem terminum diuide per priorem terminum multatum duplo poſterioris: quotientem adde quadrato quod fit à dimidio prioris termini: huius enim ſummæ radix quadrata ſupradicto multata & aucta dimidio exhibebit extremos ſigillatim.

Hinc Effectio Geometrica.



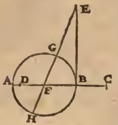
SIt data ratio A B ad B C. Sumatur C D æqualis C B. Tum fiat vt A D ad B C; ita quadratum B C ad aliud quadratum quod ſit B E. Poſitaque B E perpendiculari ad B C. Supra B C conficiatur circulus, cuius centrum F. Connexaque & producta E F ſecet peripheriam in punctis G & H.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis prioris partes; ſiquidem cum ſit vt A D ad C B; ita quadratum *34 vndecimi*
C B ad quadratum B E, erit cubus B C æqualis ſolido rectangulo ex quadrato B E in lineam A D. Et ita cubus C B diuiſus per lineam A D exhibet quadratum B E pro quotiente Geometrico Quadratum autem B E addi- *47. primi.*
tur quadrato B F, & fit quadratum E F. Cuius latus E F multatum & auctum dimidio B C, exhibet G E & H E.

Dico autem G E & H E fore extremas quæſitas. Nam cum B E ſit perpendicularis ad extremitatem diametri erit tangens. Ergo quadratum B E æquabitur rectangulo *6 tertii.*
H E G. Proindeque H E, B E, G E erunt tres continuè *3 tertii.* *17. ſexti.*
proportionales. Igitur cum ſit vt A D ad B C; ita quadratum B C ad quadratum B E, hoc eſt rectangulum H E G. Erit etiam componendo bis, vt A B ad B C, ita quadratum H G plus duplo rectanguli H E G ad rectangulum H E G, hoc eſt quadratum B E. Sed rectangulum *3. ſecundi.*
H E G æquatur rectangulo H G E & quadrato G E. Igitur quadratum H G. Plus duplo rectanguli H E G eſt *4. ſecundi.*
æquale quadratis H E & G E. Et proinde quadrata H E & E G ad quadratum B E, ſunt in ratione data A B ad B E.

Ergo inuentæ ſunt tres lineæ proportionales H E, B E, G E, itaut quadrata extremarum ad quadratum mediæ datam habeant proportionem.

Similiter data ratione A B ad B C. Sumatur B D dupla B C; fiatque vt reliqua A D ad B C; ita quadratum A B ad quadratum B E. Et ponatur linea B E perpendicularis ad A B. Factoque ſupra A B circulo cuius centrum F, nectatur E F & producatur donec ſecet peripheriam in punctis G, H.



Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas ſecundi Canonis partes, ſiquidem cum ſit vt A D ad B C ita quadratum A B ad quadratum B E. Solidum rectangulum ſub quadrato B E in lineam A D, erit

34. vndec. æquale ſolido rectangulo ſub quadrato A B in lineam B C. Et ita diuiditur ſolidum ſub quadrato

47 primi A B in lineam B C per lineam A D, & fit quadratum B E, quod additur cum quadrato B F, & fit quadratum F E, cuius latus F E multatum & auctum dimidio A B exhibet G E & H E.

Dico autem G E & H E fore extremas quæſitas. Cum enim ſit vt A D ad B C, ita quadratum A B ad quadratum B E, erit componendo bis vt A B ad B C ita quadratum H G plus duplo rectanguli H E G ad quadratum B E, ergo vt prius inuentæ ſunt tres lineæ proportionales H E, B E, G E, taliter vt quadrata extremarum H E, G E, ad quadratum mediæ B E proportionem habeant datam A B ad B C. Quod erat demonſtrandum.

PRO

PROPOSITIO XXXVIII.

Hoc idem problema aliter abſoluere.

DAta eadem ratione 17 ad 4 ſumatur poſterior terminus proportionis 4 pro medio, & ponatur 1 R pro differentia extremorum: & quoniam in ſerie trium proportionalium, quadratum differentiæ extremorum plus duplo medii quadrato æquatur ſummæ quadratorum ab extremis; fiet 1 Q + 32 ad 16 in ratione data 17 ad 4. Igitur productus ſub extremis 4 Q + 128 æquatur producto ſub mediis 272. Ergo 1 Q eſt 36 & 1 R, ſiue differentia extremorum 6. Singulique 2. 4. 8. per Propoſ. 1. huius. *Lem. 6.*

Similiter ponendo 1 R pro eadem differentia extremorum & ſumendo priorem terminum proportionis 17 pro medio, habebis 1 Q + 578 pro ſumma quadratorum ab extremis. Igitur 1 Q + 578 ad 289 eſt in ratione data 17 ad 4. Et ita productus ſub extremis 4 Q + 2312. æqualis erit producto ſub mediis 4913. Vnde 1 Q eſt æquale $\frac{2601}{4}$. Et proinde 1 R ſiue differentia extremorum eſt $\frac{51}{2}$ & per Propoſit. 1. Huius ſinguli 34. 17. $\frac{17}{2}$. *Lem. 6.*

Hinc Canon.

EX ſolido ſub quadrato poſterioris termini, proportionis datæ in priorem terminum, tolle duplum cubum poſterioris termini: reſiduum diuiſum per priorem exhibebit quadratum differentiæ extremorum, poſteriore termino proportionis exiſtente medio trium quæſitorum.

Vel

EX cubo prioris termini proportionis datæ, tolle duplum ſolidum ſub quadrato prioris termini in po-

ſteriorem : reſiduo diuiſo per poſteriorem terminur exhibetur quadratum differentiæ extremorum, priore termino proportionis exiſtente medio trium quæſitorum.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data ratio A B ad B C. Sumatur C D æqualis B C. Et ſupra A C fiat ſemicirculus, ad cuius diametrum erigatur perpendicularis D E.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas prioris Canonis partes, ſiquidem cum ſolidum rectangulum ſub quadrato B C in A B lineam, & cubus B C habeant eamdem baſim, tollendo ex A B lineam B D quæ eſt dupla B C, tollitur quoque duplus cubus B C ex ſolido rectangulo ſub quadrato B C in lineam A B, & remanet ſolidum rectangulum ſub quadrato B C hoc eſt C D in lineam A D. Hoc autem ſolido reſiduo diuiſo per D C, fit rectangulum A D C hoc eſt quadratum D E pro quotiente Geometrico.



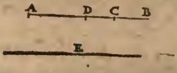
Dico autem lineam D E fore differentiam extremarum media exiſtente B C, hoc eſt C D. Nam ſupra D E facto circulo cuius centrum F, connexa C F ſecet circuli peripheriam in punctis G, H, cum C D ſit perpendicularis
16 tertij. ad extremitatem diametri erit tangens, ergo rectangu-
36. tertii. lum H C G æquabitur quadrato D C. Igitur tres H C,
17. ſexti. C D, C G erunt in continua proportione. Sed tres illæ
8. ſexti. A D, D E, D C, ſunt etiam continuè proportionales ergo
4. ſexti. vt prima A D ad tertiam D C; ita quadratum ſecundæ
20 ſexti. D E hoc eſt H G ad quadratum tertiæ D C, hoc eſt rectangulum H C G. Ergo componendo bis vt A B ad B C; ita quadratum H G plus duplo rectanguli H C G ad quadratum D C.

9. ſecundi. Sed quadratum H G plus duplo rectanguli H C G æ-

quatur quadratis H C, C G, ergo quadrata H C, C G, ad quadratum D C ſunt in data ratione A B ad B C. Igitur inuentæ ſunt tres lineæ proportionales H C, C D, C G taliter vt quadrata extremarum H C, C G ad quadratum mediæ datam habeant proportionem. Quod erat demonſtrandum.

Aliter ex ſecundo Canone ſic ordinabitur Effectio Geometrica. Data ratione A B ad B C. Sumatur C D æqualis B C, tum fiat vt B C ad A D, ita quadratum A B ad quadratum E.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis poſterioris



partes, ſiquidem vt prius propter eandem baſim ex cubo A B prioris termini proportionis tollitur ſolidum rectangulum ſub quadrato A B in B D duplam termini poſterioris, remanetque ſolidum rectangulum ſub quadrato A B in lineam A D, quoniam vero factum eſt vt B C ad A D; ita quadratum A B ad quadratum E, illud ſolidum reſiduum æquabitur ſolido ſub quadrato E in lineam B C, & ſic illud ſolidum reſiduum diuiditur per lineam B C, & fit quadratum E, pro quotiente Geometrico. 34 vndecimi

Dico autem lineam E fore differentiam extremarum A B exiſtente media: nam cum ſit vt A D ad B C; ita quadratum E ad quadratum A B, erit componendo bis vt A B ad B C ita quadratum E plus duplo quadrati A B ad quadratum A B. Ergo ſi per Propoſ. 1. Huius data differentia extremarum E & media A B, inueniantur extremæ, erunt quadrata extremarum æqualia quadrato 7. ſecundi.
differentiæ extremarum & duplo rectanguli ſub extremis, hoc eſt duplo quadrati mediæ A B. Igitur inuentæ 17. ſexti.
erunt tres proportionales; itaut quadrata extremarum ad quadratam mediæ datam habeant rationem A B ad B C. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXXIX.

Hoc idem problema alio modo perficere.

DAta ratione 17 ad 4. Ponatur 1 R pro ſumma extremorum & ſumatur 4 poſterior terminus proportionis pro medio. Igitur 1 Q - 32 æquabitur quadratis extremorum. Ergo 1 Q - 32 ad 16 erit in ratione data 17 ad 4. Et ita productus ſub extremis 4 Q - 128. Æqualis erit producto ſub mediis 272. Et proinde 1 Q æquabitur 100. Eritque 1 R ſiue ſumma extremorum 10. Singulique per Propoſ. 2. huius 2. 4. 8.

Lem 3. Lem. 6. Lem. 6.

Similiter ponendo iterum 1 R pro ſumma extremorum & ſumendo 17 priorem terminum rationis pro medio. erit 1 Q - 578 æquale quadratis extremorum. Et proinde 1 Q - 578 ad 289 erit in ratione data 17 ad 4. Ergo productus ſub extremis 4 Q - 1312. æquatur producto ſub mediis 4913. Et ita 1 Q eſt æquale $\frac{225}{4}$ eſtque 1 R, ſiue ſumma extremorum $\frac{15}{2}$. Singulique 34. 17 $\frac{17}{2}$.

Lem. 3. Lem. 6. Lem. 6.

Hinc Canon.

DVplum cubum poſterioris termini proportionis datæ, adde cum ſolido quod fit ex quadrato poſterioris termini in priorem: hanc ſummam diuide per poſteriorem terminum & habebis quadratum ſummæ extremorum, poſteriore termino proportionis exiſtente medio trium quæſitorum.

Vel

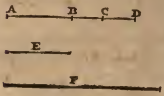
CVbo prioris termini proportionis datæ, adde duplum ſolidum ex quadrato prioris termini in poſteriorem: ſummam hanc diuide per poſteriorem terminum, & habebis quadratum ſummæ extremorum, prio-

re termino proportione exiſtente medio trium quæſitorum.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data ratio A B ad B C. Sumatur C D æqualis B C fiatque vt C D ad A D; ita quadratum C D ad quadratum E.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas prioris Canonis



partes, ſiquidem duplo cubo C D hoc eſt B C addito cum ſolido rectangulo quod fit ex quadrato C D in lineam A B, exurgit propter eamdem baſim ſolidum rectangulum ſub quadrato C D in lineam A D. Quoniam verò eſt vt C D ad A D, ita quadratum C D ad quadratum E, erit ſolidum rectangulum ſub quadrato E in lineam C D æquale ſolido rectangulo ex quadrato C D in lineam A D. Et ita ſolidum poſterius diuiditur per lineam C D & fit quadratum E pro quotiente Geometrico. *34. undec.*

Dico autem lineam E fore ſummam extremarum, media exiſtente C D ſeu B C. Cum enim ſit vt A D ad D C; ita quadratum E, ad quadratum C D; erit diuidendo bis, vt A B ab B C; ita quadratum E minus duplo quadrato B C ad quadratum B C. Ergo ſi per Propoſ. 2. huius data ſumma extremarum E & media B C, diſtinguantur extremæ, erunt quadrata extremarum æqualia quadrato E multato duplo quadrati B C. Et proinde quadrata extremarum ad quadratum mediæ B C erunt in data ratione A B ad B C. Quod erat demonſtrandum. *4. ſecundi. 17. ſexti.*

Aliter ex ſecundo Canone ſic ordinabitur Effectio Geometrica. Data ratione A B ad B C. Fiat vt C D ad A D, ita quadratum A B ad aliud, quod ſit F. Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis poſterioris par-

tes, vt ſupra, & fieri quadratum F. Dico autem lineam F fore ſummam extremarum A B exiſtente media. Demonſtratio eſt ſimilis præcedenti.

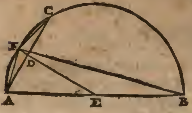
Appendix.

HInc patet quomodo inueniri poſſint tres quantitates proportionales data quacumque illarum ſumma vel differentia & proportione quadratorum ab extremis ad quadratum mediæ. Fiat enim vt ſumma vel differentia homologa ex inuentis ad ſingulas; ita ſumma vel differentia data ad alias. Et habebitur propoſitum. Deinde ſi poſtularetur inueniri tres quantitates proportionales data ratione quadratorum à ſingulis ad quadratum mediæ vel ad quadrata extremarum. Nam vel diuidendo ſimpliciter, vel diuidendo & inuertendo, daretur eadem ratio quæ hic data fuit.

Notandum præterea quod ſi daretur ratio tripla quadratorum ab extremis ad quadratum mediæ. Diuidenda foret ſimpliciter quælibet quantitas media & extrema ratione, vel per vndecimam ſecundi Elementorum vel per 3. huius: Nam vt demonſtratur ab Euclide Prop. 4. lib. 13. Si linea diuidatur ſecundum mediam & extremam rationem; quod à tota quodque à minore ſegmento vtraque ſimul quadrata tripla ſunt eius quod à maiore ſegmento deſcribitur, quadrato. Vnde ſequitur vlterius per Propoſ. 6. eiuſdem libri, ſi quantitas diuiſa, ſit rationalis, ſegmenta fore irrationalia. Verbi gratia ſi poſtularetur numerum 8, diuidi in tres proportionales, taliter vt quadrata extremorum tripla eſſent quadrati medii, inuenirentur 4 pro maiore extremo, ℞ 20 - 2 pro medio, & 6 - ℞ 20 pro minore.

Quod ſi poſtularetur ratio quadrupla quadratorum ab extremis ad quadratum mediæ partis. Præter methodos vniuerſales ſupra traditas accipe aliam ſingula-

rem. Supra quamcumque lineam A B, deſcribatur ſemicirculus cuius centrum E, & inſcribatur A C æqualis ſemidiametro AE. Tum



diuiſa A E bifariam in D, ducatur E D & producatur, donec ſecet peripheriam in puncto F, nectanturque A F & B F. Dico tres lineas B F, A C, A F eſſe proportionales, & quadrata extremarum eſſe quadrupla quadrati mediæ. Nam ducta F C, erit angulus F C A æqualis angulo F B A, vterque enim eſt in eodem circuli ſegmento F A. Cum ergo duo triangula F B E & C A F ſint iſo-ſcelia & habeant vnum angulorum ad baſim æqualem, erunt æquiangula. Igitur erit vt B F ad F E ita A C hoc eſt F E (vtraque enim eſt ſemidiameter) ad A F. Ergo illæ tres B F, A C, A F, ſunt proportionales. Atqui quadrata A F & F B æquantur quadrato A B. Quadratum autem A B quadruplum eſt quadrati A C eo quod linea A B dupla ſit A C. Igitur inuentæ ſunt tres lineæ proportionales, ita ut quadrata extremarum quadrupla ſint quadrati mediæ. Quod erat demonſtrandum.

21. tertii. *4. ſexti.* *47 primi.* *10 ſexti.*

Idem autem problema de proportione quadrupla ſecundum lineas ſpectatum potuit ita enunciari. In data ſemicirculi circumferentia inuenire punctum ad quod ſi ducantur duæ lineæ ab extremitatibus diametri, ſemidiameter ſit medio loco proportionalis inter duas ductas.

Præterea aduertendum problema iſtud multis aliis modis potuiſſe ſolui, vnde noui Canones & Eff. ctiones Geometricæ: nam data ratione 17. ad 4 poterat poni 1 R pro medio & ſumi 17. vel 4 pro ſumma omnium. Item poterat poni 1 R pro ſumma omnium & ſumi 17 vel 4 pro medio. Item poterat poni 1 R pro differentia ex-

tremorum & ſumi 17 vel 4 pro ſumma extremorum. Item poterat poni 1 R pro ſumma extremorum & ſummi 17 vel 4 pro differentia extremorum, &c.

Denique ordo poſtularet vt hic ſolueremus iſtud problema de inuenire tres quantitates proportionales data ratione quadratorum primæ & ſecundæ ad quadrata ſecundæ & tertiæ. Sed nihil facilius, quia illa proportio eſt eadem cum proportione primæ ad tertiam quantitatem. Vnde inuento medio proportionali inter duos terminos proportionis, habetur propoſitum.

PROPOSITIO XL.

Data ratione differentiæ quadratorum ab extremis ad quadratum mediæ, inuenire tres quantitates continue proportionales.

ESto data ratio 15 ad 4. Ponaturque maior 1 R & pro minore ſumatur poſterior terminus proportionis 4. Quoniam igitur extremi ſunt 1 R & 4. Erit eo-
Lem. 6. rum productus 4 R æqualis quadrato medii. Differentia autem quadratorum ab extremis erit 1 Q - 16. Igitur 1 Q - 16 ad 4 R eſt in ratione data 15 ad 4. Ergo pro-
Lem. 6. ductus ſub extremis 4 Q - 64 æqualis eſt producto ſub mediis 60 R. Et proinde 1 Q æquatur 15 R + 16 vnde 1 R, ſiue maior extremus eſt 16. Singulique 16. 8. 4.

Similiter poſita 1 R pro minore captoque poſteriore termino proportionis 4 pro maiore fieret 1 Q æquale 16 - 15 R & 1 R foret 1. Singulique 1. 2. 4.

Hinc Canon.

CApe dimidium prioris termini proportionis datæ, & eius dimidii quadrato adde quadratum termini poſterioris: huius enim aggregati radix quadrata aucta ſupradicto dimidio exhibet maiorem extremum altero extremo

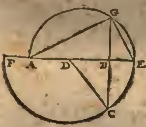
extremo exiſtente poſteriore termino proportionis: multata vero eodem dimidio exhibet minorem extremum altero exiſtente poſteriore termino proportionis.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data ratio A B ad B C. Coniungantur illæ ad angulos rectos, & diuiſa A B bifariam in D, centro D interuallo D C fiat ſemicirculus ſecans productam A B in punctis E F.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes; ſiquidem quadrato D B additur quadratum B C, & fit quadratum D C, hoc eſt D E vel D F cuius latus auctum vel multatum dimidio ipſius A B exhibet F B hoc eſt A E, vel B E.

Dico autem primò A E fore maiorem extremam, B C exiſtente minore extrema: nam facto ſupra A E altero ſemicirculo, productaque C B vſque ad G, & connexis A G & G E: erunt triangula A E G & E G B proportionalia. Ergo vt A E ad E G; ita E G ad E B. Et proinde quadratum E G æquabitur rectangulo A E B, hoc eſt F B E, hoc eſt quadrato B C. Igitur linea B C erit æqualis lineæ E G. Ergo vt A B ad B C; ita A B ad E G. Sed A B ad E G, habet rationem compoſitam ex ratione A B ad B G & B G ad G E. Eſt autem vt A B ad B G, ita A G ad G E. Et vt B G ad G E; ita A G ad G E. Ergo A B ad B C habet rationem compoſitam ex ratione A G ad G E, & A G ad A E, talis autem eſt ratio quadrati A G ad rectangulum G E A. Igitur quadratum A G ad rectangulum G E A, eſt in ratione data A B ad B C.



Margin: 8. ſexti. 17 ſexti. 9. quinti. 5. def. ſexti. 8. ſexti. 4. ſexti. 23. ſexti.

Igitur ſi ſumas mediam K proportionalem inter A E. 17. ſexti.

E G, quadratum illius erit æquale rectangulo G E A & proinde quadratum A G ad quadratum illius mediæ K; erit in ratione data. Cum autem angulus in ſemicirculo A G E ſit rectus, erit quadratum A E æquale quadratis A G. G E. Et proinde quadratum A G eſt differentia quadratorum A E, G E igitur inuentæ ſunt tres proportionales A E, media K. Et G E, taliter vt differentia quadratorum ab extremis ad quadratum mediæ datam habeat rationem A B ad B C. Quod erat demonſtrandum.

31. tertij.
47 primi.

Dico deinde ſecundo B E fore minorem, maiore exiſtente B C, hoc eſt E G. Quod breuiter demonſtratur quia triangula A E G & E B G ſunt æquiangula & proinde proportionalia.

8. ſexti.
4 ſexti.

Appendix.

Hinc patet hoc problema ſecundum lineas ſpectatum ita potuiſſe enunciari conficere triangulum rectangulum taliter, vt quadratum vnius lateris ex iis quæ continent angulum rectum, ad rectangulum ſub reliquis lateribus habeat datam rationem. Nam oſtenſum eſt quadratum A G ad rectangulum A E G eſſe in ratione data. Item quadratum B G ad rectangulum G E B eſſe etiam in data ratione.

Poterat etiam aliter procedi in operatione Algebrica ponendo 1 R pro maiore, & ſumendo priorem terminum proportionis 15 pro minore: vel contra ponendo 1 R pro minore & ſumendo 15 pro maiore vnde noui Canones & nouæ Effectiones Geometricæ.

PROPOSITIO XLI.

Hoc idem problema aliter ſoluere.

DAta ratione 15 ad 4. Ponatur 1 R pro differentia extremorum & ſumatur 15 prior terminus proportionis pro ſumma extremorum. Ergo 15 † 1 R erit duplum maioris, & 15 - 1 R duplum minoris. Et proinde *Lem. 1.* extremi erunt $\frac{15 \dagger 1 R}{2}$ & $\frac{15 - 1 R}{2}$. Ergo differentia quadratorum ab extremis eſt 15 R. Productus autem extremorum $\frac{225 - 1 Q}{4}$ eſt æqualis quadrato medii. Igitur 15 R *Lem. 6.* ad $\frac{225 - 1 Q}{4}$ eſt in ratione data 15 ad 4. Et ita productus ſub extremis 60 R æquatur producto ſub mediis $\frac{3375 - 15 Q}{4}$. Igitur 1 Q eſt æquale 225 - 16 R & propterea *Lem. 6.* 1 R, ſiue differentia extremorum eſt 9. Summa extremorum exiſtente 15. Ergo ſinguli erunt 3 6. 12.

Similiter ponatur iterum 1 R pro differentia extremorum, & ſumatur 4 poſterior terminus proportionis pro ſumma extremorum. Ergo 4 † 1 R eſt duplum maioris *Lem. 1.* & 4 - 1 R duplum minoris. Et proinde extremi erunt $\frac{4 \dagger 1 R}{2}$ & $\frac{4 - 1 R}{2}$. Ergo differentia quadratorum ab extremis eſt 4 R. Productus eſt autem extremorum $\frac{16 - 1 Q}{4}$ *Lem. 6.* eſt æqualis quadrato medii. Igitur 4 R ad $\frac{16 - 1 Q}{4}$ eſt in ratione data 15 ad 4. Et ita productus ſub extremis 16 R æquabitur producto ſub mediis $\frac{240 - 15 Q}{4}$. Ergo *Lem. 6.* 1 Q eſt æquale 16 - $\frac{64 R}{15}$. Et propterea 1 R ſiue differentia extremorum eſt $\frac{36}{15}$ ſumma extremorum exiſtente 4. Ergo ſinguli erunt $\frac{12}{15}$. $\frac{24}{15}$. $\frac{48}{15}$.

Hinc Canon.

QVadruplum quadratum poſterioris termini adde quadrato prioris: huius enim ſummæ radix quadrata multata duplo poſterioris termini exhibebit differentiam extremorum, ſumma extremorum exiſtente priore termino proportionis.

Vel.

QVadruplum quadratum poſterioris termini diuide per priorem quotientis cape dimidium, & eius dimidij quadrato adde quadratum poſterioris termini, huius enim ſummæ radix quadrata ſupra dicto multata dimidio exhibebit differentiam extremorum, ſumma extremorum exiſtente poſteriore termino rationis.

Hinc Effectio Geometrica.

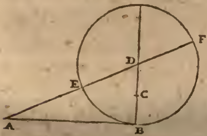
SIt data ratio A B ad B C. Coniungantur ad angulos rectos & producatur B C, donec C D ſit æqualis B C. Tum centro D, interuallo D B, fiat circulus, connexaque & producta A D ſecet peripheriam in punctis E F.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis prioris
4. ſecundi. & 20 ſexti. 47 primi. partes; ſiquidem cum B D dupla ſit B C, erit quadratum B D quadruplum quadrati B C. Quadratum autem B D additur quadrato A B, & fit quadratum A D, cuius latus A D multatum E D, hoc eſt dupla B C, exhibet A E.

Dico autem A E fore differentiam extremarum, ſumma extremarum exiſtente A B priore termino proportionis. Nam cum A B ſit perpendicularis ad extremitatem
16. tertii. 36. tertii. 3. ſecundi. diametri, erit tangens. Ergo quadratum A B æquabitur rectangulo F A E. Hoc eſt quadrato A E plus rectangulo A E F. Et proinde data ſumma extremarum A B & differentia extremarum A E, inueniantur ſigillatim tres lineæ proportionales quadratum ſummæ extremarum

A B æquabitur quadrato differentiæ extremarum A E
plus rectangulo A E F, hoc eſt plus quadruplo rectangu-
lo ſub A E & B C. Sed idem quadratum A B eſt æqua- *8. ſecundi.*
le quadrato differentiæ A E & quadruplo rectangulo ſub *17. ſexti.*
extremis, hoc eſt quadruplo mediæ quadrato. Igitur
quadruplum rectangulum ſub A E & B C eſt æquale qua-
druplo mediæ quadrato. Et proinde quadratum mediæ
æquatur rectangulo ſub A E in B C.

Sed ex Corollario Prop. 23. huius rectangulum B A E
ſub ſumma extrema-
rum in differentiam
extremarum eſt æ-
quale interuallo qua-
dratorum ab extre-



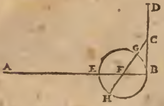
mis, eſt autem pro- *1. ſexti.*
pter eamdem altitu-
dinem A E, vt A B ad
B C; ita rectangulum
B A E ad rectangulum ex A E in B C. Ergo inuentis
tribus proportionalibus, vt imperatum eſt, differentia
quadratorum ab extremis ad quadratum mediæ erit
in ratione data A B ad B C. Quod erat demonſtran-
dum.

Similiter data ratione A B ad B C. Coniungantur ad
angulos rectos, & ſumatur C D æqualis C B: Tum fiat
vt A B ad B D; ita B D ad B E. Qua diuiſa bifariam
in E, nectatur & producatur F C. Et centro F, interual-
lo F B fiat circulus ſecans F C productam in punctis G
& H.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis poſterioris
partes, ſiquidem cum B D ſit dupla B C, erit quadra- *4 ſecundi. & 10. ſexti.*
tum B D quadruplum quadrati B C. Quoniam vero fa-
ctum eſt vt A B ad B D; ita B D ad B E. Rectangulum
A B E æquabitur quadrato B D, & propterea quadratum *17 ſexti.*
B D diuiditur per lineam A B, & fit linea B E, cuius
dimidiæ quadratum B F additur quadrato B C, & fit *47. primi.*

quadratum F C. Cuius latus F C multatum G F exhibet G C.

Dico autem G C fore differentiam extremarum, ſumma extremarum exiſtente B C poſteriore termino
16. tertii. rationis. Nam cum B C ſit perpendicularis ad extremi-
36 tertii. tatem diametri erit tangens, & proinde quadratum B C
3 ſecundi. æquabitur rectangulo H C G, hoc eſt quadrato G C plus rectangulo H G C. Et proinde ſi data B C ſumma extremarum & G C differentia extremarum, inueniantur ſigillatim tres proportionales, quadratum ſummæ extremarum B C æquabitur quadrato differentiæ extremarum G C plus



8. ſecundi. rectangulo H G C. Sed idem quadratum B C æquatur quadrato differentiæ extremarum G C plus quadruplo
17. ſexti. rectangulo ſub extremis, hoc eſt plus quadruplo mediæ quadrato. Igitur rectangulum H G C erit æquale quadruplo mediæ quadrato & propterea rectangulum ſub G C & quadrante H G hoc eſt B E, æquatur mediæ quadrato.

Sed cum ſit vt A B ad B D, ita B D ad B E; erit etiam vt A B ad B D; ita B C dimidia B D, ad B F dimidiam B E; & permutando vt A B ad B C; ita B D ad B F; hoc eſt ita earum ſemiſſes B C ad quadrantem B E; Ergo cum propter eamdem altitudinem G C, ſit vt B C
1. ſexti. ad quadrantem B E; ita rectangulum B C G ad rectangulum ſub G C & quadrante B E: cumque ex Corollario Prop. 23. huius rectangulum B C G æquetur interuallo quadratorum ab extremis, & iam oſtenſum ſit rectangulum ſub G C in quadrantẽ B E æquari mediæ quadrato, ſequitur inuentas eſſe tres proportionales, taliter vt quadratorum ab extremis differentia ad quadratum mediæ ſit in data ratione A B ad B C. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XLII.

Hoc idem problema alio modo perficere,

DAta ratione 15 ad 4. Ponatur 1 R pro ſumma extremorum & capiatur prior terminus rationis 15 pro differentia extremorum ergo 1 R † 15 erit duplum maioris, & 1 R - 15 duplum minoris, & proinde extremi Lem. 1
erunt $\frac{1R \dagger 15}{2}$ & $\frac{1R - 15}{2}$ quorum productus $\frac{1Q - 225}{4}$ æquatur quadrato medii. Differentia autem quadratorum Lem. 6
ab extremis eſt 15 R. Igitur 15 R ad $\frac{1Q - 225}{4}$ eſt in ratione data 15 ad 4. Ergo productus ſub extremis 60 R, æquatur producto ſub mediis $\frac{15Q - 3375}{4}$. Vnde 1 Q Lem. 6.
æquale eſt 225 † 60 R, & ita 1 R, ſiue extremorum ſumma eſt 25 priore termino 15 exiſtente illorum differentia. Igitur ſinguli erunt 5.10.20.

Similiter data eadem ratione 15 ad 4. Ponatur 1 R pro ſumma extremorum, & pro eorum differentia capiatur poſterior terminus rationis 4. Erit maior extremus $\frac{1R \dagger 4}{2}$ & minor $\frac{1R - 4}{2}$. Quorum productus $\frac{1Q - 16}{4}$ æqua- Lem. 1.
tur quadrato medii; differentia autem quadratorum ab Lem. 6.
extremis eſt 4 R, ac proinde 4 R ad $\frac{1Q - 16}{4}$ eſt in ratione data 15 ad 4. Igitur productus ſub extremis 16 R Lem. 6.
æquatur producto ſub mediis $\frac{15Q - 240}{4}$. Et ita 1 Q eſt æquale 16 † $\frac{64R}{15}$. Vnde 1 R ſiue ſumma extremorum $\frac{100}{15}$ differentia extremorum exiſtente 4. Igitur ſinguli erunt $\frac{80}{15}$. $\frac{40}{15}$. $\frac{20}{15}$.

Hinc Canon.

QVadruplum quadruplum poſterioris termini proportionis datæ, adde quadrato prioris: huius enim ſummæ radix quadrata duplo poſterioris termini aucta, exhibebit ſummam extremorum, differentia eorum exiſtente priori termino rationis.

Vel

QVadruplum quadratum poſterioris termini, diuide per priorem, quotientis cape dimidium, & eius dimidii quadrato adde quadratum poſterioris termini: huius enim ſummæ radix quadrata ſupradicto aucta dimidio exhibebit ſummam extremorum, differentia eorum exiſtente poſteriore termino rationis.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data ratio A B ad B C in figura priore Propoſit. præcedentis. Et omnia fiant vt illic ordinatum fuit.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas prioris Canonis partes, vt ibi demonſtrauimus, & fieri lineam A F.

Dico autem A F fore ſummam extremarum, priore termino rationis A B exiſtente differentia extremarum. Nam omiſſa longiori demonſtratione, probatum eſt tres lineas A E, A B, A F, eſſe continuè proportionales, ergo cum A E exiſtente differentia extremarum A B ſit ſumma illarum; debet A B exiſtente differentia A F eſſe ſumma vt ſtatim conſtabit mediocriter in logiſtica matheſeos exercitato.

Similiter ſit data ratio A B ad B C in figura poſteriore Propoſ. præcedentis. Et omnia fiant vt illic ordinatum fuit. Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis poſterioris partes, vt ibi demonſtrauimus, & fieri H C. Dico autem H C fore ſummam extremarum, poſteriore termino

rationis B C exiſtente illarum differentia. Demonſtratio eſt ſimilis præcedenti. Quia H C, B C, G C. Sunt continuè proportionales.

Appendix.

HInc patet quomodo data quacumque ſumma vel differentia ex tribus quantitatibus proportionalibus, & ratione interualli quadratorum ab extremis ad quadratum mediæ, poſſint inueniri ſingulæ: ſi enim fiat vt ſumma vel differentia homologa ex inuentis ad ſingulas inuentas; ita data ad alias, habebitur propoſitum.

Deinde hinc etiam colligitur quomodo data quantitas poſſit diuidi in duas partes, taliter vt differentia quadratorum ab illis ortorum, habeat rationem datam ad ipſarum planum.

Denique potuit multis aliis modis procedi in operatione Algebrica, vel ponendo 1 R pro minore, & capiendo alterutrum terminum rationis datæ pro differentia extremorum, vel ponendo 1 R pro maiore, & ſumendo alterutrum terminum rationis pro differentia, vel ponendo 1 R pro differentia & accipiendo alterutrum terminum rationis pro minore aut maiore: illinc enim ſex vt minimum elicientur diuerſi Canones & Effectiones Geometricæ.

PROPOSITIO XLIII.

Data ratione interualli quadratorum minoris extremæ & mediæ, ad quadratum maioris inuenire tres quantitates proportionales.

ESto data ratio 3 ad 16. Ponatur autem 1 R pro minore extremo & ſumatur poſterior terminus rationis

R

16 pro maiore. Igitur productus extremorum 16 R erit æqualis quadrato medii. Et ita interuallum quadratorum medii & minoris erit 16 R - 1 Q. Igitur 16 R - 1 Q ad 256 eſt in ratione data 3 ad 16. Ergo productus ſub extremis 256 R - 16 Q æquatur producto ſub mediis 768. Et ita 1 Q eſt æquale 16 R - 48. Vnde 1 R ſiue minor erit 4. Singulique 4. 8. 16.

Lem. 6. *Lem. 6.*

Aliter data eadem ratione 3 ad 16. ponatur iterum minor 1 R & ſumatur prior terminus rationis 3 pro maiore. Ergo 3 R productus ſub extremis æquabitur quadrato medii. Vnde interuallum quadratorum medii & minoris erit 3 R - 1 Q. Ergo 3 R - 1 Q ad 9 erit in ratione data 3 ad 16. Et ita productus ſub extremis 48 R - 16 Q erit æqualis producto ſub medii 27. Igitur 1 Q æquatur 3 R - $\frac{27}{16}$. & ſic 1 R erit $\frac{3}{4}$. Singulique $\frac{3}{4}$. $\frac{3}{2}$. 3.

Lem 6. *Lem. 6*

Hinc Canon.

CApe dimidium poſterioris termini rationis datæ, & ab eius dimidii quadrato tolle productum ſub terminis: huius enim reſidui radix quadrata dimidio ſupradicto detracta exhibebit minorem poſteriore termino rationis exiſtente maiore.

Vel

CApe dimidium prioris termini, ex cuius quadrato tolle quotientem qui fit diuidendo cubum prioris per poſteriorem terminum: huius enim reſidui radix ſupradicto detracta dimidio exhibebit minorem priore termino rationis exiſtente maiore.

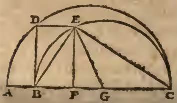
Hinc Effectio Geometrica.

SIt data ratio A B ad B C. Supra A C & B C fiant duo ſemicirculi, & erecta perpendiculari B D, ducatur D E parallela ipſi A C, donec occurrat minori peri-

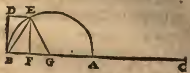
pheriæ in puncto E. Ex quo demittatur E F perpendiculariter ad diametrum.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas prioris Canonis partes; ſiquidem ducta E G ad centrum minoris ſemicirculi G erit dimidium poſterioris termini rationis: & ex eius
quadrato E G tollitur quadratum E F, hoc eſt B D, hoc *47 primi.*
eſt rectangulum ſub terminis rationis, A B C. Et relin- *8. ſexti. 4 ſexti.*
quitur quadratum F G, cuius latus F G detractum B G *17. ſexti.*
relinquit B F.

Dico autem B F fore minorem ex quæſitis, poſteriore termino rationis B C exiſtẽte
maiore. Nam tres illæ A B, *8. ſexti 4. ſexti.*
B D, B C ſunt continuè pro- *10 ſexti.*
portionales; ergo vt prima A B ad tertiam B C; ita quadratum *8. ſexti.*
ſecundæ B D, hoc E F ad qua- *4. ſexti.*
dratum tertiæ B C. Sed pro- *47. primi.*
pter eãdem rationem illæ etiam tres B F, B E, B C ſunt continuè proportionales, & quadratorum à duabus minoribus B F, B E, differentia eſt quadratum E F. Igitur inuentæ ſunt tres lineæ proportionales B F, B E, B C, taliter vt quadratorum mediæ & minoris differentia ad quadratum maioris B C datam habeat rationem A B ad B C. Quod erat demonſtrandum.



Similiter ſit data ratio A B ad B C. Supra A B fiat ſemicirculus; tum fiat vt B C ad B A; ita quadratum B A ad aliud quadratum quod ſit B D & ponatur B D perpendicularis ad B C. Ductaque D E parallela ipſi B C, ex puncto occurſus cum peripheriâ E, demittatur E F perpendicularis ad diametrum.



Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis poſterioris

14. *vndec.* partes; ſiquidem cum ſit B C ad B A; ita quadratum B A ad quadratum B D; erit cubus B A æqualis ſolido rectangulo ex quadrato B D in lineam B C; ac proinde cubus B A diuiſus per lineam B C exhibet quadratum B D, hoc eſt E F: ducta igitur E G ad centrum ſemicirculi G erit dimidium ipſius B A. Ex quadrato autem E G tollitur quadratum E F, & relinquitur quadratum F G, cuius latus F G. detractum ex B G relinquit B F.

Dico autem lineam B F fore minorem ex quæſitis priore termino rationis A B exiſtente maiore. Nam tres illæ
8 *ſexti.* lineæ A B, B E, B F, ſunt continuè proportionales, &
4 *ſexti.* quadratorum à duabus minoribus B F, B E, differentia eſt
47 *primi.* quadratum F E. Eſt autem ex conſtructione vt B C ad B A: ita quadratum B A ad quadratum B D hoc eſt F E. Ergo inuertendo, erit vt B A ad B C, ita quadratum E F ad quadratum A B. Igitur inuentæ ſunt tres proportionales A B, B E, B F, taliter vt differentia quadratorum mediæ & minoris ad quadratum maioris A B, habeat rationem datam A B ad B C. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XLIV.

Hoc idem problema aliter ſoluere.

ESto data ratio 3 ad 16. Ponatur maior extremus 1 R. Et ſumatur 3 prior terminus rationis pro mino-
Lem.6. re extremo. Igitur productus ſub extremis 3 R æqualis erit quadrato medii. Et ita ſi inde tollas quadratum minoris, habebitur differentia quadratorum medii & mino-
Lem. 6. ris 3 R - 9. Quadratum verò maioris eſt 1 Q. Ergo 3 R - 9 ad 1 Q erunt in ratione data 3 ad 16. Et ita productus ſub extremis 48 R - 144. æquabitur producto ſub mediis 3 Q. Ergo 1 Q æquale eſt 16 R - 48. Et proinde 1 R, ſiue maior eſt 12, priore termino ratio-

nis 3 exiſtente minore. Igitur ſinguli ſunt. 12. 6. 3.

Aliter data eadem ratione 3 ad 16. Ponatur iterum maior 1 R & ſumatur poſterior terminus rationis 16 pro minore. Igitur productus ſub extremis 16 R æqualis erit quadrato medii. Et ita ſi inde tollas quadratum minoris 256, habebitur differentia quadratorum medii & minoris 16 R - 256. Ergo 16 R - 256 ad 1 Q, erunt in ratione data 3 ad 16. Igitur productus ſub extremis 256 R - 4096 *Lem. 6.*
æquabitur producto ſub mediis 3 Q. Et ita 1 Q æquale eſt $\frac{256\ R\ -\ 4096}{3}$. Vnde 1 ℞ ſiue maior extremus eſt 64 minore extremo exiſtente poſteriore termino rationis 16. Singulique ſunt. 64. 32. 16.

Hinc Canon.

CApe dimidium poſterioris termini rationis datæ, & ex eius quadrato tolle productum ſub terminis eiuſdem rationis: huius enim reſidui radix quadrata ſupradicto addita dimidio exhibebit maiorem extremum, priore termino rationis exiſtente minore.

Vel

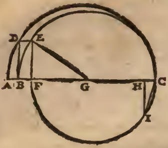
QVadratum poſterioris termini rationis datæ, diuide per priorem; quotientis cape dimidium; ex cuius dimidii quadrato tolle quotientem qui fit diuidendo cubum poſterioris termini per priorem: huius enim reſidui radix quadrata ſupradicto addita dimidio exhibebit maiorem, poſteriore rationis termino exiſtente minore.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data ratio A B ad B C. Supra A C & B C fiant duo ſemicirculi, & erecta B D perpendiculari, donec occurrat maiori peripheriæ, ducatur D E parallela diametro vſque ad minorem: & ex puncto E demittatur E F perpendiculariter.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis prioris par-
47 *primi.* tes, ſiquidem ducta E G ad centrum minoris ſemicirculi
8. *ſexti.* G, erit dimidium ipſius B C, & ex eius quadrato E G tol-
4. *ſexti.* litur quadratum E F, hoc eſt D B, hoc eſt rectangulum ſub terminis A B C, & relinquitur quadratum F G, cuius latus F G additum dimidio ipſius B C, exhibet F C.

Dico autem F C fore maiorem ex quæſitis, priore termino rationis A B exiſtente minore. Nam ſupra F C fiat ſemicirculus & ponatur H C æqualis A B, demiſſaque perpendiculariter H I vſque ad peripheriam nectatur I C. His in hunc modum præparatis, cum quadratum B D æquetur rectangulo A B C, & quadra-



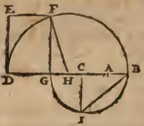
8. *ſexti.* 4. *ſexti.* 17. *ſexti.*

16. *ſexti.* tum E F rectangulo B F C, ſitque quadratum B D æquale quadrato E F; erit rectangulum A B C hoc eſt B C H æquale rectangulo B F C, ergo eſt reciprocè vt B C ad
19. *quinti.* F C ita F B ad H C cum igitur ſit vt tota B C, ad totam F C; ita ablata F B ad ablatam H C; erit & reliqua F C ad reliquam F H vt tota B C ad totam F C. Et proinde tres illæ B C, F C, F H erunt continue proportionales.

5 *definit. ſexti.* Eſt autem ratio H C hoc eſt A B ad B C compoſita ex H C ad F C & F C ad B C. Ergo cum iam oſtenſum ſit eſſe vt F C ad B C, ita F H ad F C, erit quoque ratio H C ad B C compoſita ex ratione H C ad F C & F H ad F C:
23. *ſexti.* talis autem eſt ratio rectanguli F H C hoc eſt quadrati
8. *ſexti.* H I ad quadratum F C. Sed tres illæ lineæ F C, C I, C H,
4. *ſexti.* ſunt continuè proportionales, & quadratum H I eſt
47. *primi.* differentia quadratorum à duabus minoribus ortorum. Igitur inuentæ ſunt tres proportionales F C, C I, C H taliter vt differentia quadratorum mediæ & minoris ad

quadratum maioris F C, ſit in data ratione H C, hoc eſt A B ad B C. Quod erat demonſtrandum.

Similiter ſit data ratio A B ad B C. Fiat vt A B ad B C; ita B C ad B D. Et ſupra D B deſcribatur ſemicirculus. Tum fiat vt A B ad B C; ita quadratum B C ad quadratum D E. Sitque linea D E perpendicularis ad D B, & ducatur E F paralella D B donec occurrat peripheriæ in puncto F. Ex quo demittatur F G perpendiculariter ad D B.



Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis poſterioris partes; ſiquidem cum ſit vt A B ad B C; ita B C ad B D; quadratum B C æquatur rectangulo D B A & proinde quadratum B C diuiditur per priorem terminum rationis A B & fit D B & ducta F H ad centrum ſemicirculi H, erit F H dimidium ipſius D B. Cum autem factum ſit vt A B ad B C; ita quadratum B C ad quadratum D E, erit cubus B C æqualis ſolido rectangulo ſub quadrato D E in lineam A B. Et ita cubus B C diuiditur per A B lineam, & fit quadratum D E hoc eſt G F, ex quadrato autem F H tollitur quadratum G F & relinquitur G H, cuius latus G H additum dimidio ipſius D B, exhibet G B. *17. ſexti.* *34 vndecimi*

Dico autem G B fore maiorem extremam, poſteriore termino rationis datæ B C exiſtente minore. Facto enim ſemicirculo ſuper G B, & demiſſa perpendiculariter C I vſque ad circumferentiam & connexa I B. Erunt tres lineæ B C, B I, B G continuè proportionales. Sed B C ad B D habet rationem compoſitam ex C B ad B G & B G ad B D. Ergo cum ſit A B ad B C; ita B C ad B D; erit quoque ratio A B ad B C compoſita ex ratione C B ad B G & B G ad B D. Sed eſt etiam vt A B ad B C, ita quadratum B C ad quadratum D F, hoc eſt G F, hoc eſt rectangulum D G B; ergo quadratum B C ad *8. ſexti. 4. ſexti. 5. definit. ſexti.* *8. ſexti. 4. ſexti. 7. ſexti.*

rectangulum D G B habet rationem compoſitam ex ratione C B ad B G & B G ad B D.

Sed quadratum B C ad rectangulum D G B habet rationem compoſitam ex ratione B C ad B G & B C ad D G. Ergo illæ duæ rationes B C ad B G & B G ad B D ſunt æquales illis duabus B C ad B G & B C ad D G. Ergo ſi ex illis æqualibus tollas communem rationem B C ad B G, reſtabit ratio B G ad B D æqualis rationi B C ad D G. Ergo inuertendo vt D B ad B G; ita D G ad B C. Quoniam igitur eſt vt tota D B ad totam B G; ita ablata D G ad ablatam B C; erit & reliqua G B ad reliquam G C; vt tota D B ad totam G B. Et proinde tres illæ D B, G B, G C erunt continuè proportionales.

23. ſexti. *19. quinti.*

Ergo cum ratio C B ad B D ſit compoſita ex ratione C B ad B G & B G ad B D; erit quoque compoſita ex ratione C B ad B G & C G ad B G. Talis autem eſt ratio rectanguli G C B ad quadratum B G. Ergo vt B C ad B D; hoc eſt vt A B ad B C; ita rectangulũ G C B hoc eſt quadratum C I ad quadratum G B. Atqui tres illæ G B, B I, B C ſunt continuè proportionales, & differentia quadratorum à duabus minoribus eſt quadratum C I. Ergo tandem inuentæ ſunt tres proportionales G B, B I, B C taliter vt differentia quadratorum mediæ & minoris ad quadratum maioris G B. Sit in ratione data A B ad B C. Quod erat demonſtrandum.

23. ſexti. *8 ſexti.* *4 ſex. i.* *47. primi.*

PROPOSITIO XLV.

Hoc idem problema alio modo perficere.

DAta eadem ratione 3 ad 16. Ponatur 1 R pro minore extremo, & ſumatur prior terminus rationis 3 pro differentia extremorum. Igitur productus ſub extremis 1 Q + 3 R æquabitur quadrato medii. Et ita ſi inde tollas quadratum minoris 1 Q, reſtabunt 3 R pro diffe-

Lem. 6.

differentia quadratorum medii & minoris. Eſt autem quadratum maioris 1 Q † 9 † 6 R. Ergo 3 R ad 1 Q † 9 † 6 R eſt in data ratione 3 ad 16. Igitur productus ſub extremis 48 R æquabitur producto ſub mediis 3 Q † 27 † 18 R. Et ſic 1 Q eſt æquale 10 R - 9 eſtque 1 R, ſiue minor extremus 1, priore termino rationis 3, exiſtente differentia extremorum. Vnde ſinguli erunt 1, 2. 4. *Lem. 6.*

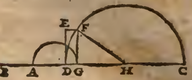
Hinc Canon.

EX producto ſub terminis rationis datæ, tolle duplum quadratum prioris termini: reſiduum diuide per priorem & quotientis cape dimidium; ex cuius dimidii quadrato tolle quadratum prioris termini: huius enim poſtremi reſidui radix quadrata ſupradicto detracta dimidio, exhibebit minorem, priore termino rationis exiſtente differentia extremorum.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data ratio A B ad B C. Sumatur A D æqualis A B & ſupra reliquam D C fiat ſemicirculus. Poſitaque D E æquali D A & perpendiculari ad B C, ducatur E F parallela diametro donec occurrat peripheriæ in puncto F, ex quo demittatur perpendiculariter F H.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes; ſiquidem ducta F H ad centrum H erit æqualis dimidio D C. Ergo cum ex B C tollatur B D dupla prioris termini, ex rectangulo ſub terminis rationis C B A tollitur duplum quadratum prioris termini, & reſtat C D A rectangulum, quo diuiſo per priorem terminum A D vel A B, fit linea D C pro quotiente Geometrico. Ex cuius dimi-



diæ quadrato F H tollitur quadratum F G, hoc eſt E D, hoc eſt A D vel A B; reſtatque quadratum G H, cuius latus detractum ex dimidia D C exhibet D G.

Dico autem D G fore minorem extremam priore termino rationis A D vel A B exiſtente differentia extremarum. Nam ſupra A G fiat ſemicirculus ſecans perpendicularem D E in puncto I & nectatur I G. Erit vt C D ad D A; ita propter eamdem altitudinem D G rectangulum C D G ad rectangulum A D G.

1. ſexti. Eſt vero rectangulum C D G æquale quadrato D G & rectangulo C G D, hoc eſt quadrato G F. Igitur cum
3. ſecundi. G F ſit æqualis A D erit vt C D ad D A; ita quadratum
8. ſexti. A D plus quadrato D G ad rectangulum A D G, & com-
4. ſexti. *17. ſexti.* nendo bis, vt B C ad A B; ita quadratum A D plus quadrato D G plus duplo rectangulo A D G, hoc eſt vt qua-
4. ſecundi. dratum A G ad rectangulum A D G, hoc eſt quadratum
8. ſexti. D I. Sed tres illæ lineæ A G, G I, D G ſunt continuè
4. ſexti. *17. ſexti.* proportionales & quadratum D I eſt differentia quadra-
47. primi. torum à duabus minoribus ortorum. Ergo inuentæ ſunt tres lineæ proportionales A G, G I, G D, taliter vt differentia quadratorum mediæ & minoris ad quadratum maioris A G, ſit in data ratione A B ad B C. Quod erat demonſtrandum.

Appendix.

HInc patet quomodo data quacumque vel ſumma vel differentia ex tribus proportionalibus quantitatibus, inueniri poſſint ſingulæ taliter vt interuallum quadratorum mediæ & minoris ad quadratum maioris habeat rationem datam: ſi enim fiat vt ſumma vel differentia homologa ex inuentis ad ſingulas inuentas; ita data ad alias, habebitur propoſitum.

Deinde manifeſtum eſt quomodo data quæcumque quantitas poſſit diuidi in duas tali ratione, vt rectangulum ſub ſegmentis ad quadratum totius ſit in data ratione.

Tertiò hinc etiam ſoluitur hoc problema inuenire tres quantitates in data ratione quadrati differentiæ extremarum plus quadrato minoris plus tripla quadratorum mediæ & minoris differentia ad differentiam quadratorum mediæ & minoris; nam diuidendo & inuertendo, erit quoque data eadem quæ hîc, ratio.

Denique hinc patet plurimis aliis modis potuiſſe procedi in operatione Algebrica vel ponendo 1 R pro minore extremo & ſumendo poſteriorem terminum rationis pro differentia extremorum. Vel ponendo 1 R pro maiore extremo & ſumendo priorem vel poſteriorem rationis terminum pro differentia extremorum, vel ponendo 1 R pro differentia extremorum & ſumendo priorem vel poſteriorem rationis terminum pro minore vel ponendo 1 R pro differentia extremorum & ſumendo priorem vel poſteriorem rationis terminum pro maiore. Vel ponendo 1 R pro ſumma extremorum & ſumendo alterutrum terminum pro differentia. Vel ponendo 1 R pro differentia extremorum & ſumendo alterutrum terminum pro ſumma. Vel ponendo 1 R pro ſumma extremorum & ſumendo alterutrum terminum pro vno extremo aut contra. Hinc enim exurgent vt minimum quindecim diuerſi Canones & Effectiones Geometricæ.

PROPOSITIO XLVI.

Data ratione differentiæ quadratorum mediæ & maioris ad quadratum minoris, inuenire tres quantitates proportionales.

ESto data ratio 45 ad 16. Ponatur 1 R pro maiore & ſumatur poſterior terminus rationis 16 pro minore. *Lem. 6.* Ergo productus ſub extremis 16 R æquabitur quadrato medii, & ita ſi tollas eum productum de quadrato ma-

ioris, reſtabit 1 Q - 16 R pro differentia quadratorum maioris & medii. Igitur 1 Q - 16 R ad 256, eſt in data ratione 45 ad 16. Et ſic productus ſub extremis 16 Q - 256 R,
Lem. 6. erit æqualis producto ſub mediis 11520. Ergo 1 Q æquatur 720 + 16 R. Et ita 1 R, ſiue maior, eſt 36, minore exiſtente 16. Singulique proinde erunt 36. 24. 16.

Aliter ponatur 1 R pro minore & ſumatur prior terminus rationis 45 pro maiore. Ergo productus ſub extremis 45 R æquabitur quadrato medii. Et ita ſi hunc tollas
Lem. 6. de quadrato maioris, habebis 2025 - 45 R pro differentia quadratorum maioris & medii. Et proinde 2025 - 45 R ad 1 Q erunt in ratione data 45 ad 16. Ergo
Lem. 6. productus ſub extremis 32400 - 720 R erit æqualis producto ſub mediis 45 Q. Et poſt debitam reductionem 1 Q æquabitur 720 - 16 R. Vnde 1 R ſiue minor eſt 20. Singulique 20. 30. 45.

Hinc Canon.

CApe dimidium poſterioris termini rationis datæ, & eius dimidii quadrato adde productum ſub terminis proportionis. Illius enim aggregati radix quadrata addita ſupradicto dimidio exhibet maiorem, poſteriore termino rationis exiſtente minore: ſupradicto autem multata dimidio exhibet minorem priore termino rationis exiſtente maiore.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data ratio A B ad B C. Supra totam A C fiat ſemicirculus, diuiſaque B C bifariam in D, demittatur B E perpendicularis ad A C donec occurrat peripheriæ in puncto E, ex quo ducatur E D. Secans circulum factum ſupra B C in punctis F. G.

Manifeſtum eſt obſeruari integrum Canonem Algebricum, ſiquidem quadratum B D additur quadrato B E.

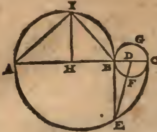
hoc eſt rectangulo ſub terminis rationis A B C, & ſit quadratum E D cuius latus E D auctum & multatum dimidio ipſius B C exhibet E G & E F.

Dico autem primò E G fore maiorem ex quæſitis minore exiſtente poſteriore termino rationis B C, nam tres illæ lineæ A B, B E, B C, ſunt continuè proportionales. Ergo vt prima A B ad tertiam B C; ita quadratum ſecundæ B E ad quadratum tertiæ B C. Sed B E perpendicularis ad extremitatem diametri eſt tangens. Igitur quadratum B E æquatur rectangulo G E F. Et proinde rectangulum G E F ad quadratum B C hoc eſt G F, eſt in data ratione A B ad B C. Sed quadratum E G differt à rectangulo E G F per rectangulum G E F. Igitur ſi capias mediam proportionalem inter E G & G F, differentia quadrati E G & quadrati mediæ (quod erit æquale rectangulo ſub extremis E G F) erit rectangulum C E F. Ergo inuentæ ſunt tres lineæ proportionales; itaut differentia quadratorum maioris & mediæ ad quadratum minoris ſit in data ratione A B ad B C. Quod erat primo loco demonſtrandum. *8. ſexti.* *4. ſexti.* *20. ſexti.* *16 tertii.* *36. tertii.* *2. ſecundi.* *17. ſexti.*

Dico deinde ſecundò E F fore minorem extremam priore termino rationis A B exiſtēte maiore. Quod breuiter poteſt demonſtrari hoc modo. Rectangulum A B C eſt æquale quadrato B E & eidem quadrato B E iam demonſtratum eſt æquari rectangulum G E F. Igitur rectangulum A B C æquatur rectangulo G E F. Ergo erit reciprocè vt A B ad E F; ita G E ad B C. Et proinde cum illis duabus exiſtentibus extremis G E, B C, iam oſtenſum ſi haberi propoſitum: etiam illis duabus A B, E F in eadem cum prioribus ratione exiſtentibus extremis, neceſſe eſt propoſitum haberi. *8. ſexti.* *4. ſexti.* *17 ſexti.* *16. ſexti.*

Diſcurſus ille ſolidus eſt: verum ne cuipiam inducatur ſcrupulus, aliter rem aggrediemur hoc modo. Sumatur B H æqualis F E & ſupra A B facto ſemicirculo, erigatur perpendiculariter H I nectanturque A I. B I. Cum igitur ſit H B æqualis F E, erit H C æqualis G E. Ergo

19. quinti. cum ſit vt tota A B ad totam C H; ita ablata H B ad ablatam B C; erit & reliqua A H ad reliquam H B vt tota ad totam, hoc eſt vt ablata H B ad ablatam B C, & ſic tres illæ A H, H B, B C erunt continuè proportionales. *5 definit. ſexti.* Sed A B ad B C habet rationem compoſitam ex ratione A B ad H B & H B ad B C. Ergo



23. ſexti. A B ad B C habebit quoque rationem compoſitam ex A B ad H B & A H ad H B. Talis autem eſt ratio rectanguli B A H ad quadratum H B. Igitur rectangulum
8. ſexti. *4. ſexti.* *17. ſexti.* B A H hoc eſt quadratum A I ad quadratum H B eſt in data ratione A B ad B C; ſed tres illæ A B. B I. B H ſunt continuè proportionales & quadratorum à maiori & me-
47 primi. dia interuallum eſt quadratum A I. Ergo inuentæ ſunt tres proportionales A B, B I, B H cum requiſitis conditionibus. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XLVII.

Hoc idem problema aliter ſoluere.

ESto data eadē ratio 45 ad 16. Ponatur 1 R pro maiore & ſumatur prior terminus rationis 45 pro minore. Ergo productus ſub extremis 45 R æqualis erit quadrato
Lem. 6. medii, & ita ſi tollatur ex quadrato maioris habebitur 1 Q - 45 R pro differentia quadratorum maioris & medii. Ergo 1 Q - 45 R ad 2025 eſt in ratione data 45 ad 16. Igitur productus ſub extremis 16 Q - 720 R æqualis eſt pro-
Lem. 6. ducto ſub mediis 91125. Et poſt debitam reductionem 1 Q erit æquale $\frac{9112}{[illegible]}$ † 45 R. Et ita 1 R ſiue maior eſt $\frac{405}{4}$ ſingulique ordinati erunt 45. $\frac{135}{2}$. $\frac{405}{4}$.

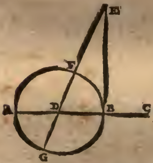
Hinc Canon.

CApe dimidium prioris termini rationis datæ, & eius dimidii quadrato adde quotientem qui fit diuidendo cubum prioris termini per poſteriorem: huius enim ſummæ radix quadrata ſupradicto addita dimidio exhibet maiorem, priore termino rationis exiſtente minore.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data ratio A B ad B C. Diuiſa A B bifariam in D. centro D interuallo D B fiat circulus. Tum fiat vt B C ad B A, ita quadratum A B ad quadratum B E, ſitque B E perpendicularis ad A C. Et ducatur E D ſecans peripheriam in punctis F G.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes; ſiquidem cum ſit vt B C ad B A; ita quadratum B A ad quadratum B E, erit cubus A B æqualis ſolido rectangulo ſub quadrato B E in lineam B C, & proinde cubus A B prioris termini rationis datæ, diuiditur per poſteriorem B C, & fit quadratum B E, quod additur quadrato B D & fit quadratum D E, cuius latus D E additum dimidio A B exhibet G E. *34 vndecimi*



Dico autem lineam G E fore maiorem extremam priore proportionis termino A B exiſtente minore. Nam cum ſit vt B C ad B A, ita quadratum A B ad quadratum B E; erit inuertendo vt A B ad B C ita quadratum B E hoc eſt rectangulum G E F ad quadratum A B hoc eſt G F. Ergo vt in priore demonſtratione propoſitionis præcedentis, ſi inter E G & F G inueniatur media proportionalis, habebitur propoſitum. *16 tertij.* *36. tertii.*

PROPOSITIO XLVIII.

Hoc idem problema alio modo perficere.

DAta eadem ratione 45 ad 16. Ponatur 1 R pro minore & ſumatur 16 poſterior terminus rationis pro maiore. Ergo productus ſub extremis 16 R æquabitur
Lem. 6. quadrato medii. Et ita ſi tollatur ex quadrato maioris, habebis 256 - 16 R pro interuallo quadratorum medii & maioris. Igitur 256 - 16 R ad 1 Q, erunt in ratione data
Lem 6. 45 ad 16. Et ſic productus ſub extremis 4096 - 256 R æqualis eſt producto ſub mediis 45 Q. Et poſt debitam reductionem 16 æquabitur $\frac{4096 \quad 256 R}{45}$. Vnde 1 R ſiue minor eſt $\frac{64}{9}$. Singulique $\frac{64}{9}$. $\frac{96}{9}$. $\frac{144}{9}$.

Hinc Canon.

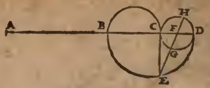
QVadratum poſterioris termini rationis datæ, diuide per priorem; quotientis cape dimidium, & eius dimidii quadratum adde quotienti qui fit diuidendo cubum poſterioris termini per priorem: huius enim ſummæ radix quadrata ſupradicto multata dimidio exhibet minorem, poſteriore termino rationis exiſtente maiore.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data ratio A B ad B C. Illis duabus inueniatur tertia proportionalis C D. Diuiſaque C D bifariam in F, fiat centro F interuallo F C circulus. Tum fiat vt A B ad B C; ita quadratum B C ad quadratum C E, ponaturque C E perpendicularis ad A D & connexa E F ſecet circuli peripheriam in punctis G. H.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes; ſiquidem cum tres illæ AB, BC, CD, ſint continuè propor-

proportionales quadratum mediæ æquatur rectangulo 17. ſexti.



ſub extremis & ita quadratum mediæ B C diuiditur per primam A B, & fit tertia C D pro quotiente Geometrico. Similiter quoniam eſt vt A B ad B C, ita quadratum B C ad quadratum B E, cubus B C æquale eſt ſolido rectangulo ſub quadrato B E in lineam AB, & ſic cubus B C diuiditur 34 vndecimi per lineam A B & fit quadratum B E pro quotiente Geometrico. Quod quadratum B E additur quadrato C F & fit quadratum E F. Cuius latus E F multatum dimidio ipſius C D exhibet G E.

Dico autem G E fore minorem B C exiſtente maiore: demonſtratio facilis eſt ex Propoſ. 46.

Appendix.

HInc patet quomodo data quacumque ſumma vel differentia ex tribus proportionalibus & prædicta ratione, poſſint inueniri ſingulæ: fiat enim vt ſumma vel differentia homologa ex inuentis ad ſingulas inuentas, ita ſumma vel differentia data ad alias & habebitur propoſitum.

Deinde patet quoque quomodo data quantitas diuidi poſſit in duas taliter vt rectangulum ſub tota & altera eius parte ad quadratum alterius habeat rationem datam.

Denique manifeſtum eſt tot aliis modis poſſe procedi in operatione Algebrica quot indicauimus in appendice Propoſ. præcedentis. Vnde quindecim, vt minimum, elicientur noui Canones & Effectiones Geometricæ.

PROPOSITIO XLIX.

Data ratione interualli quadratorum mediæ & minoris ad ſummam quadratorum mediæ & maioris, inuenire tres quantitates proportionales.

Esto data ratio 3 ad 20. Ponatur 1 R pro maiore extremo & ſumatur prior terminus rationis 3 pro
Lem. 6. extremo minore. Igitur productus ſub extremis 3 R æqualis erit quadrato medii. Et proinde differentia quadratorum medii & minoris erit 3 R - 9. Summa vero quadratorum medii & maioris erit 3 R † 1 Q. Ergo
Lem. 6. 3 R - 9 ad 3 R † 1 Q eſt in ratione data 3 ad 20. Et ſic productus ſub extremis 60 R - 180 erit æqualis producto ſub mediis 9 R † 3 Q. Et ita 1 Q æquabitur 17 R - 60, igitur 1 R ſiue maior extremus eſt 5 vel 12 propter numerum diminutum cuius, vtraque radix ſoluit problema; ſingulique ſunt 3. ℞ 15. 5. vel 3. 6. 12.

Hinc Canon.

Cape dimidiam differentiam duorum terminorum rationis datæ, & ab huius quadrato tolle productum ſub iiſdem terminis: iſtius enim reſidui radix quadrata ſupradicto differentiæ dimidio detracta vel addita exhibet maiorem extremum, priore termino proportionis exiſtente minore.

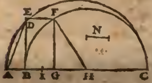
Hinc Effectio Geometrica.

Sit data ratio lineæ A B ad A C. Fiat ſemicirculus tam ſupra BC, quàm ſupra A C & erecta B D perpendiculariter ad A C nectatur A D, & producatur B D,

donec B E ſit æqualis A D. Tum ducta E F parallela A C occurrat minori peripheriæ in puncto F. Ex quo demittitur F G perpendicularis ad diametrum.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes, ſiquidem ducta F H ad centrum minoris ſemicirculi H, erit dimidium ipſius B C quæ eſt differentia terminorum rationis, ex quadrato autem F H tollitur quadratum F G, hoc eſt E B, hoc eſt A D, hoc eſt rectangulum ſub terminis rationis C A B, remanetque quadratum G H, cuius latus G H detractum ex B H relinquit B G.

Dico vero lineam B G fore maiorem extremam de tribus lineis proportionalibus quæſitis; priore rationis termino A B exiſtente minore. Nam ſumpta B I æquali A B & N media proportionali inter A B & B F, erit quadratum N æquale rectangulo A B G.



Et quoniam quadratum F G æquatur rectangulo B F C, & quadratum A D rectangulo C A B, eſtque linea A D æqualis lineæ F G, erit rectangulum C A B æquale rectangulo B F C. Ergo reciprocè eſt vt tota C A ad totam B C; ita ablata G C ad ablatam B I hoc eſt A B. Igitur & reliqua A G ad reliquam I G; vt tota A C ad totam B G & permutando, vt A G ad A C; ita I G ad B G & inuertendo vt A C ad A G; ita B G ad I G.

8.ſexti. 4.ſexti. 17.ſexti. 16.ſexti. 19. quinti.

Sed A C ad A B (ſumpta A G intermedia) habet rationem compoſitam ex A C ad A G & A G ad A B; ergo quia mox oſtenſum eſt vt A C ad A G; ita B G ad I G; erit quoque ratio A C ad A B compoſita ex ratione B G ad I G & A G ad A B ſeu B I. Talis autem eſt ratio rectanguli A G B ad rectangulum G I B. Atqui rectangulum A G B æquatur quadrato B G & rectangulo A B G hoc eſt quadrato N; rectangulum vero G I B ſub

5. definit. ſexti. 23.ſexti. 3 ſecundi. 17.ſexti.

minori B I & differentia extremarum I G æquatur differentiæ quadratorum mediæ & minoris. Ergo quadratum B G plus quadrato N, ad rectangulum G I B ſunt in ratione data A C ad A B. Igitur inuentæ ſunt tres lineæ proportionales A B, N, B G, taliter vt quadratorum minoris A B & mediæ N, differentia ad ſummam quadratorum mediæ N & maioris B G ſit in ratione data A B ad A C. Quod erat demonſtrandum.

Corol. prop. 23. huius.

Appendix.

DAta eadem minore extrema A B poterat haberi maior extrema C G addendo videlicet latus G H ad dimidium ipſius B C, iuxta alteram Canonis partem: ſed hanc demonſtrationem induſtriæ & exercitationi lectoris relinquo.

Hinc etiam patet quomodo data quæcumque linea puta A G poſſit bis diuidi in B & I taliter vt rectangulum ſub tota & maiore ſegmento A G B ad rectangulum ſub ſegmentis A B, I G, ſit in data ratione A C ad A B.

Deinde ſequitur etiam ex hoc poſſe qualibet data ſumma vel differentia ex tribus quantitatibus proportionalibus & prædicta ratione differentiæ quadratorum mediæ & minoris ad ſummam quadratorum mediæ & maioris, inueniri ſingulas: fiat enim vt ſumma vel differentia homologa ex inuentis ad ſingulas inuentas; ita data quantitas ad alias, & habebitur propoſitum.

Tandem adnotandum eſt etiam poſſe vt minimum viginti aliis modis procedi in operatione Algebrica, vnde noui Canones & Effectiones orirentur.

PROPOSITIO L.

Data ratione interualli quadratorum mediæ & maioris ad ſummam quadratorum mediæ & minoris, inuenire tres quantitates proportionales.

ESto data ratio 12 ad 5. Ponatur minor quæſitorum numerorum 1 R, ſumatur verò prior terminus rationis 12 pro maiore: Ergo productus ſub extremis 12 R æqualis erit quadrato medii. Et proinde differentia quadratorum maioris & medii erit 144 - 12 R & ſumma quadratorum medii & minoris 12 R † 1 Q. Ergo 144 - 12 R ad 12 R † 1 Q eſt in ratione data 12 ad 5. Igitur productus ſub extremis 720 - 60 R æquabitur producto ſub mediis 144 R † 12 Q. Et poſt debitam reductionem 1 Q erit æquale 60 - 17 R. Igitur 1 R ſiue minor extremus eſt 3 priori termino rationis 12 exiſtente maiore, ſingulique erunt 3. *6, 12.* *Lem. 6.* *Lem. 6.*

Hinc Canon.

CApe dimidium ſummæ duorum terminorum rationis, cuius dimidii quadrato adde productum ſub iiſdem terminis: illius enim aggregati radix quadrata ſupradicto multata dimidio exhibebit minorem extremum, priore termino rationis exiſtente maiore.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data ratio A B ad B C. Et facto ſupra totam A C circulo, erigatur B D perpendicularis ad A C, ponaturque C E æqualis B D & perpendicularis ad A C. Tum ducatur E F per centrum circuli F & ſecet peripheriam in punctis G. I.

ioris, reſtabit 1 Q - 16 R pro differentia quadratorum maioris & medii. Igitur 1 Q - 16 R ad 256, eſt in data ratione 45 ad 16. Et ſic productus ſub extremis 16 Q - 256 R,
Lem. 6. erit æqualis producto ſub medus 11520. Ergo 1 Q æquatur 720 † 16 R. Et ita 1 R, ſiue maior, eſt 36, minore exiſtente 16. Singulique proinde erunt 36. 24. 16.

Aliter ponatur 1 R pro minore & ſumatur prior terminus rationis 45 pro maiore. Ergo productus ſub extremis 45 R æquabitur quadrato medii.
Lem. 6. Et ita ſi hunc tollas de quadrato maioris, habebis 2025 - 45 R pro differentia quadratorum maioris & medii. Et proinde 2025 - 45 R ad 1 Q erunt in ratione data 45 ad 16. Ergo
Lem. 6. productus ſub extremis 32400 - 720 R erit æqualis producto ſub mediis 45 Q. Et poſt debitam reductionem 1 Q æquabitur 720 - 16 R. Vnde 1 R ſiue minor eſt 20. Singulique 20. 30. 45.

Hinc Canon.

Cape dimidium poſterioris termini rationis datæ, & eius dimidii quadrato adde productum ſub terminis proportionis. Illius enim aggregati radix quadrata addita ſupradicto dimidio exhibet maiorem, poſteriore termino rationis exiſtente minore: ſupradicto autem multata dimidio exhibet minorem priore termino rationis exiſtente maiore.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data ratio A B ad B C. Supra totam A C fiat ſemicirculus, diuiſaque B C bifariam in D, demittatur B E perpendicularis ad A C donec occurrat peripheriæ in puncto E, ex quo ducatur E D. Secans circulum factum ſupra B C in punctis F. G.

Manifeſtum eſt obſeruari integrum Canonem Algebricum, ſiquidem quadratum B D additur quadrato B E,

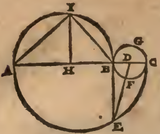
hoc eſt rectangulo ſub terminis rationis A B C, & ſit quadratum E D cuius latus E D auctum & multatum dimidio ipſius B C exhibet E G & E F.

Dico autem primò E G fore maiorem ex quæſitis minore exiſtente poſteriore termino rationis B C, nam *8. ſexti.* tres illæ lineæ A B, B E, B C, ſunt continuè proportio- *4. ſexti.* nales. Ergo vt prima A B ad tertiam B C; ita quadra- *20. ſexti.* tum ſecundæ B E ad quadratum tertiæ B C. Sed B E *16. tertii.* perpendicularis ad extremitatem diametri eſt tangens. *36. tertii.* Igitur quadratum B E æquatur rectangulo G E F. Et proinde rectangulum G E F ad quadratum B C hoc eſt G F, eſt in data ratione A B ad B C. Sed quadratum E G differt à rectangulo E G F per rectangulum G E F. *2. ſecundi.* Igitur ſi capias mediam proportionalem inter E G & G F, differentia quadrati E G & quadrati mediæ (quod *17. ſexti.* erit æquale rectangulo ſub extremis E G F) erit rectangulum C E F. Ergo inuentæ ſunt tres lineæ proportionales; itaut differentia quadratorum maioris & mediæ ad quadratum minoris ſit in data ratione A B ad B C. Quod erat primo loco demonſtrandum.

Dico deinde ſecundò E F fore minorem extremam priore termino rationis A B exiſtēte maiore. Quod breuiter poteſt demonſtrari hoc modo. Rectangulum A B C *8. ſexti.* eſt æquale quadrato B E & eidem quadrato B E iam de- *4. ſexti.* *17. ſexti.* monſtratum eſt æquari rectangulum G E F. Igitur rectangulum A B C æquatur rectangulo G E F. Ergo erit *16. ſexti.* reciprocè vt A B ad E F; ita G E ad B C. Et proinde cum illis duabus exiſtentibus extremis G E, B C, iam oſtenſum ſi haberi propoſitum: etiam illis duabus A B, E F in eadem cum prioribus ratione exiſtentibus extremis, neceſſe eſt propoſitum haberi.

Diſcurſus ille ſolidus eſt: verum ne cuipiam inducatur ſcrupulus, aliter rem aggrediemur hoc modo. Sumatur B H æqualis F E & ſupra A B facto ſemicirculo, erigatur perpendiculariter H I nectanturque A I. B I. Cum igitur ſit H B æqualis F E, erit H C æqualis G E. Ergo

19. *quinti.* cum ſit vt tota A B ad totam C H; ita ablata H B ad ablatam B C; erit & reliqua A H ad reliquam H B vt tota ad totam, hoc eſt vt ablata H B ad ablatam B C, & ſic tres illæ A H, H B, B C erunt continuè proportionales. Sed A B ad B C habet rationem compoſitam ex ratione A B ad H B & H B ad B C. Ergo



5 definit. ſexti.

23. *ſexti.* A B ad B C habebit quoque rationem compoſitam ex A B ad H B & A H ad H B. Talis autem eſt ratio rectanguli B A H ad quadratum H B. Igitur rectangulum

8. *ſexti.* 4 *ſexti.* 17. *ſexti.* B A H hoc eſt quadratum A I ad quadratum H B eſt in data ratione A B ad B C; ſed tres illæ A B. B I B H ſunt continuè proportionales & quadratorum à maiori & media interuallum eſt quadratum A I. Ergo inuentæ ſunt

47 *primi.* tres proportionales A B, B I, B H cum requiſitis conditionibus. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XLVII.

Hoc idem problema aliter ſoluere.

ESto data eadẽ ratio 45 ad 16. Ponatur 1 R pro maiore & ſumatur prior terminus rationis 45 pro minore. Ergo productus ſub extremis 45 R æqualis erit quadrato

Lem. 6. medii, & ita ſi tollatur ex quadrato maioris habebitur 1 Q - 45 R pro differentia quadratorum maioris & medii. Ergo 1 Q - 45 R ad 2025 eſt in ratione data 45 ad 16. Igitur productus ſub extremis 16 Q - 720 R æqualis eſt pro-

Lem. 6. ducto ſub mediis 91125. Et poſt debitam reductionem 1 Q erit æquale 9112/[illegible] + 45 R. Et ita 1 R ſiue maior eſt $\frac{405}{4}$ ſingulique ordinati erunt 45. $\frac{135}{2}$. $\frac{405}{4}$.

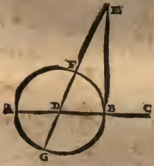
Hinc Canon.

CApe dimidium prioris termini rationis datæ, & eius dimidii quadrato adde quotientem qui fit diuidendo cubum prioris termini per poſteriorem: huius enim ſummæ radix quadrata ſupradicto addita dimidio exhibet maiorem, priore termino rationis exiſtente minore.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data ratio A B ad B C. Diuiſa A B bifariam in D. centro D interuallo D B fiat circulus. Tum fiat vt B C ad B A, ita quadratum A B ad quadratum B E, ſitque B E perpendicularis ad A C. Et ducatur E D ſecans peripheriam in punctis F G.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici



partes; ſiquidem cum ſit vt B C ad B A; ita quadratum B A ad quadratum B E, erit cubus A B æqualis ſolido rectangulo ſub quadrato B E in lineam B C, & proinde cubus 34 vndecimi A B prioris termini rationis datæ, diuiditur per poſteriorem B C, & fit quadratum B E, quod additur quadrato B D & fit quadratum D E, cuius latus D E additum dimidio A B exhibet G E.

Dico autem lineam G E fore maiorem extremam priore proportionis termino A B exiſtente minore. Nam cum ſit vt B C ad B A, ita quadratum A B ad quadratum B E; erit inuertendo vt A B ad B C ita quadratum B E hoc eſt rectangulum G E F ad quadratum A B hoc eſt 16 tertij. G F. 36. tertii. Ergo vt in priore demonſtratione propoſitionis præcedentis, ſi inter E G & F G inueniatur media proportionalis, habebitur propoſitum.

PROPOSITIO XLVIII.

Hoc idem problema alio modo perficere.

DAta eadem ratione 45 ad 16. Ponatur 1 R pro minore & ſumatur 16 poſterior terminus rationis pro maiore. Ergo productus ſub extremis 16 R æquabitur quadrato medii. Et ita ſi tollatur ex quadrato maioris, habebis 256 - 16 R pro interuallo quadratorum medii & maioris. Igitur 256 - 16 R ad 1 Q, erunt in ratione data 45 ad 16. Et ſic productus ſub extremis 4096 - 256 R æqualis eſt producto ſub mediis 45 Q. Et poſt debitam reductionem 16 æquabitur $\frac{4096 \quad 256\,R}{45}$. Vnde 1 R ſiue minor eſt $\frac{64}{9}$. Singulique $\frac{64}{9}$. $\frac{96}{9}$. $\frac{144}{9}$.

Lem. 6. (margin, beside "quadrato medii")

Lem. 6. (margin, beside "45 ad 16")

Hinc Canon.

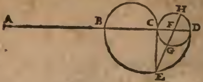
QVadratum poſterioris termini rationis datæ, diuide per priorem; quotientis cape dimidium, & eius dimidii quadratum adde quotienti qui fit diuidendo cubum poſterioris termini per priorem: huius enim ſummæ radix quadrata ſupradicto multata dimidio exhibet minorem, poſteriore termino rationis exiſtente maiore.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data ratio A B ad B C. Illis duabus inueniatur tertia proportionalis C D. Diuiſaque C D bifariam in F, fiat centro F interuallo F C circulus. Tum fiat vt A B ad B C; ita quadratum B C ad quadratum C E, ponaturque C E perpendicularis ad A D & connexa E F ſecet circuli peripheriam in punctis G. H.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes; ſiquidem cum tres illæ AB, BC, CD, ſint continuè propor-

proportionales quadratum mediæ æquatur rectangulo 17. *ſexti.*



ſub extremis & ita quadratum mediæ B C diuiditur per primam A B, & fit tertia C D pro quotiente Geometrico. Similiter quoniam eſt vt A B ad B C, ita quadratum B C ad quadratum B E, cubus B C æquale eſt ſolido rectangulo ſub quadrato B E in lineam A B, & ſic cubus B C diuiditur 34 *vndecimi* per lineam A B & fit quadratum B E pro quotiente Geometrico. Quod quadratum B E additur quadrato C F & fit quadratum E F. Cuius latus E F multatum dimidio ipſius C D exhibet G E.

Dico autem G E fore minorem B C exiſtente maiore: demonſtratio facilis eſt ex Propoſ. 46.

Appendix.

HInc patet quomodo data quacumque ſumma vel differentia ex tribus proportionalibus & prædicta ratione, poſſint inueniri ſingulæ: fiat enim vt ſumma vel differentia homologa ex inuentis ad ſingulas inuentas, ita ſumma vel differentia data ad alias & habebitur propoſitum.

Deinde patet quoque quomodo data quantitas diuidi poſſit in duas taliter vt rectangulum ſub tota & altera eius parte ad quadratum alterius habeat rationem datam.

Denique manifeſtum eſt tot aliis modis poſſe procedi in operatione Algebrica quot indicauimus in appendice Propoſ. præcedentis. Vnde quindecim, vt minimum, elicientur noui Canones & Effectiones Geometricæ.

PROPOSITIO XLIX.

Data ratione interualli quadratorum mediæ & minoris ad ſummam quadratorum mediæ & maioris, inuenire tres quantitates proportionales.

ESto data ratio 3 ad 20. Ponatur 1 R pro maiore extremo & ſumatur prior terminus rationis 3 pro
Lem. 6. extremo minore. Igitur productus ſub extremis 3 R æqualis erit quadrato medii. Et proinde differentia quadratorum medii & minoris erit 3 R - 9. Summa vero quadratorum medii & maioris erit 3 R † 1 Q. Ergo
Lem. 6. 3 R - 9 ad 3 R † 1 Q eſt in ratione data 3 ad 20. Et ſic productus ſub extremis 60 R - 180 erit æqualis producto ſub mediis 9 R † 3 Q. Et ita 1 Q æquabitur 17 R - 60, igitur 1 R ſiue maior extremus eſt 5 vel 12 propter numerum diminutum cuius, vtraque radix ſoluit problema; ſinguli-que ſunt 3. ℞ 15. 5. vel 3. 6. 12.

Hinc Canon.

CApe dimidiam differentiam duorum terminorum rationis datæ, & ab huius quadrato tolle productum ſub iiſdem terminis: iſtius enim reſidui radix quadrata ſupradicto differentiæ dimidio detracta vel addita exhibet maiorem extremum, priore termino proportionis exiſtente minore.

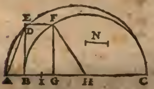
Hinc Effectio Geometrica.

SIt data ratio lineæ A B ad A C. Fiat ſemicirculus tam ſupra BC, quàm ſupra A C & erecta B D perpendiculariter ad A C nectatur A D, & producatur B D,

donec B E ſit æqualis A D. Tum ducta E F parallela A C occurrat minori peripheriæ in puncto F. Ex quo demittatur F G perpendicularis ad diametrum.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes, ſiquidem ducta F H ad centrum minoris ſemicirculi H, erit dimidium ipſius B C quæ eſt differentia terminorum rationis, ex quadrato autem F H tollitur quadratum F G, hoc eſt E B, hoc eſt A D, hoc eſt rectangulum ſub terminis rationis C A B, remanetque quadratum G H, cuius latus G H detractum ex B H relinquit B G.

Dico vero lineam B G fore maiorem extremam de tribus lineis proportionalibus quæſitis; priore rationis termino A B exiſtente minore. Nam ſumpta B I æquali A B & N media proportionali inter A B & B F, erit quadratum N æquale rectangulo A B G.



Et quoniam quadratum F G æquatur rectangulo B F C, & quadratum A D rectangulo C A B, eſtque linea A D æqualis lineæ F G, erit rectangulum C A B æquale rectangulo B F C. Ergo reciprocè eſt vt tota C A ad totam B C; ita ablata G C ad ablatam B I hoc eſt A B. Igitur & reliqua A G ad reliquam I G; vt tota A C ad totam B G & permutando, vt A G ad A C; ita I G ad B G & inuertendo vt A C ad A G; ita B G ad I G. *8. ſexti. 4. ſexti. 17. ſexti. 16. ſexti. 19. quinti.*

Sed A C ad A B (ſumpta A G intermedia) habet rationem compoſitam ex A C ad A G & A G ad A B; ergo quia mox oſtenſum eſt vt A C ad A G; ita B G ad I G; erit quoque ratio A C ad A B compoſita ex ratione B G ad I G & A G ad A B ſeu B I. Talis autem eſt ratio rectanguli A G B ad rectangulum G I B. Atqui rectangulum A G B æquatur quadrato B G & rectangulo A B G hoc eſt quadrato N; rectangulum vero G I B ſub *5. definit. ſexti. 23. ſexti. 3 ſecundi. 17. ſexti.*

PROPOSITIO L.

Data ratione interualli quadratorum mediæ & maioris ad ſummam quadratorum mediæ & minoris, inuenire tres quantitates proportionales.

ESto data ratio 12 ad 5. Ponatur minor quæſitorum numerorum 1 R, ſumatur verò prior terminus rationis 12 pro maiore. Ergo productus ſub extremis 12 R æqualis erit quadrato medii. Et proinde differentia quadratorum maioris & medii erit 144 - 12 R & ſumma quadratorum medii & minoris 12 R † 1 Q. Ergo 144 - 12 R ad 12 R † 1 Q eſt in ratione data 12 ad 5. Igitur productus ſub extremis 720 - 60 R æquabitur producto ſub mediis 144 R † 12 Q. Et poſt debitam reductionem 1 Q erit æquale 60 - 17 R. Igitur 1 R ſiue minor extremus eſt 3 priori termino rationis 12 exiſtente maiore, ſinguli que erunt 3. 6. 12. *Lem. 6.* *Lem. 6.*

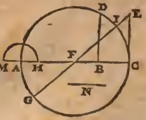
Hinc Canon.

CApe dimidium ſummæ duorum terminorum rationis, cuius dimidii quadrato adde productum ſub iiſdem terminis: illius enim aggregati radix quadrata ſupradicto multata dimidio exhibebit minorem extremum, priore termino rationis exiſtente maiore.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data ratio A B ad B C. Et facto ſupra totam A C circulo, erigatur B D perpendicularis ad A C, ponaturque C E æqualis B D & perpendicularis ad A C. Tum ducatur E F per centrum circuli F & ſecet peripheriam in punctis G. I.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes; ſi quidem quadratum C E, hoc eſt B D, hoc eſt rectangulum ſub terminis rationis A F C, additur quadrato lineæ C F quæ eſt dimidium totius A C, & fit quadratum F E, cuius latus F E, mulctatum F I, exhibet E I.



Dico autem lineam E I fore minorem ex quæſitis maiore exiſtente A B priore termino rationis. Nam quia C I eſt perpendicularis ad extremitatem diametri, erit
16. tertii. tangens. Ergo quadratum C E æquatur rectangulo
36. tertii. G E I. Igitur cum quadratum C E, hoc eſt B D, ſit re-
8. ſexti. ctangulo A B C æquale, rectangulum G E I æquabitur
4. ſexti. rectangulo A B C. Ergo erit reciprocè vt G E ad A B;
17 ſexti.
16 ſexti. ita B C ad E I. Et proinde centro A interuallo I E facto ſemicirculo M H. Erit vt tota C M hoc eſt G E ad totam A B; ita ablata B C ad ablatam A H. Ergo & re-
19 quinti. liqua M B ad reliquam H B, vt tota M C ad totam A B. Et permutando vt M B ad M C; ita H B ad A B. Sed vt M B ad M C; ita eſt propter eamdem altitudinem re-
1. ſexti. ctangulum B M A ad rectangulum C M A. Et vt H B ad A B; ita quoque eſt propter eamdem altitudinem rectangulum A B H ad quadratum A B. Ergo erit vt rectangulum B M A ad rectangulum C M A, ita rectangulum A B H ad quadratum A B. Cum igitur rectangulum C M A æquetur rectangulo G E I, hoc eſt quadrato C E vel B D, ſitque vt quadratum B D ad quadratum
20. ſexti. A B; ita linea B C ad A B; erit quoque rectangulum B M A ad rectangulum A B H vt B C ad A B & inuertendo rectangulum A B H ad rectangulum B M A eſt in ratione data A B ad B C.

13. ſexti. Sumpta ergo N media proportionali inter A B &
17. ſexti. A M vel A H, erit B A H rectangulum æquale quadrato N. Et proinde rectangulum A B H ſub maiore & diffe-

rentia extremarum æquabitur differentiæ quadratorum mediæ N & maioris A B. Ergo inuentæ ſunt tres lineæ proportionales A B, N & M A taliter vt differentia quadratorum mediæ N & maioris A B, ad ſummam quadratorum mediæ N & minoris M A; ſit in data ratione A B ad B C. Quod erat demonſtrandum.

Appendix.

SI poſtularetur inueniri tres quantitates proportionales, data quacumque illarum ſumma vel differentia, vnà cum prædicta planorum ratione, deberet fieri vt ſumma vel differentia homologa ex inuentis ad ſingulas; ita quantitas data ad alias. Et haberetur propoſitum.

Deinde hinc etiam patet quomodo data quantitas, puta A B poſſit diuidi in H taliter vt rectangulum A B H ad rectangulum B A H plus quadrato A H habeat rationem datam.

Denique adnotandum eſt poſſe vt minimum viginti modis diuerſis procedi in operatione Algebrica, vnde noui Canones & Effectiones Geometricæ oriréatur, ſed hoc ter aut quater ſupra indicaſſe ſatis erit.

PROPOSITIO LI.

Data ratione plani ex media in differentiam extremarum ad ſummam quadratorum à ſingulis inuenire tres quantitates proportionales.

ESto data ratio 2 ad 7. Ponatur medius ex tribus numeris proportionalibus 1 R & ſumatur prior terminus rationis 2 pro differentia extremorum. Igitur 2 R erit planum ſub medio in differentiam extremorum.

Et quoniam in ſerie trium proportionalium, quadratum differentiæ extremorum plus triplo medii quadrato æquatur ſummæ quadratorum à ſingulis, erit illa ſumma $4+3\,Q$. Igitur $2\,R$ ad $4+3\,Q$: erunt in ratione data 2 ad 7. Et ita productus ſub extremis $14\,R$, eſt æqualis producto ſub mediis $8+6\,Q$ quare $1\,Q$ æquatur $\frac{14\,R - 8}{6}$.

Lem. 6.

Et ita $1\,R$ ſiue medius eſt $\frac{4}{3}$ vel 1 priore termino rationis 2 exiſtente differentia extremorum. Et proinde per Propoſ. 1. Huius ſinguli erunt $\frac{8}{3}.\frac{4}{3}.\frac{2}{3}$. vel ℞: 2 + 1. 1. ℞ 2 − 1 & ſatisfaciunt quæſtioni.

Hinc Canon.

Cape ſextantem poſterioris termini rationis datæ, & ex eius ſextantis quadrato tolle trientem quadrati quod fit à priori termino: reſidui enim radix quadrata addita & detracta ſupradicto ſextanti exhibebit medium, priore termino rationis exiſtente differentia extremorum.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data ratio A B ad B C. Sumatur B D ſextans ipſius B C. Et centro D interuallo D B fiat ſemicirculus, inuentaque linea B E potens trientem quadrati A B ponatur ad angulos rectos ipſi B C. Et ducatur E F parallela diametro, donec occurrat peripheriæ in puncto F. ex quo demittatur perpendicularis F G.

Manifeſtum eſt obſeruati ſingulas Canonis partes; ſiquidem ducta D F eſt æqualis D B & ex eius quadrato tollitur quadratum F G hoc eſt B E triens quadrati A B. Et relinquitur quadratum G D, cuius latus G D additum & detractum eidem ſextanti F D, exhibet G H & B G.

Dico autem G H vel B G fore mediam ex tribus quæſitis,

ſitis, priore termino rationis A B exiſtente differentia extremarum. Eſt enim vt A B ad B H, ita rectangulum ſub A B in G H ad rectangulum B H G propter eandem altitudinem G H. Ergo triplicando conſequentia vtriuſque proportionis, erit quoque vt A B ad B C, ita rectangulum ſub A B in G H ad triplum rectangulum B H G, hoc eſt ad triplum rectangulum B G H plus triplo quadrato G H. Sed rectangulum B G H æquatur quadrato G F hoc eſt B E hoc eſt trienti quadrati A B. Ergo vt A B ad B C, ita rectangulum ſub A B in G H ad quadratum A B plus triplo quadrato G H.



1. ſexti. *1. ſecundi.* *8. ſexti.* *4. ſexti.* *17. ſexti.*

Si ergo A B exiſtente differentia extremarum & G H media inueniantur extremæ per Propoſ. ■ huius; erit rectangulum ſub media G H in differentiam extremarum ad quadratum A B plus triplo quadrato mediæ in ratione data. Atqui quadratum differentiæ extremarum plus triplo mediæ quadrato, æquatur ſummæ quadratorum a tribus lineis proportionalibus; igitur inuentæ erunt tres lineæ, prout poſtulabantur.

Similiter res oſtendetur ſumendo B G pro media & A B pro differentia extremarum. Nam erit vt A B ad B H; ita rectangulum A B G ad rectangulum H B G propter eamdem altitudinem B G; & triplicando conſequentia vtriuſque proportionis, erit vt A B ad B C; ſic rectangulum A B G ad quadratum A B plus triplo quadrato B G. Quare ſi data media B G & differentia extremarum A B, reperiantur per Propoſ. 1. huius tres lineæ proportionales. Habebunt illæ conditiones requiſitas. Quod erat demonſtrandum. *1. ſexti.*

PROPOSITIO LII.

Hoc idem problema alio modo perficere.

ESto data eadem ratio 2 ad 7. Ponatur 1 R pro differentia extremorum & ſumatur prior terminus rationis 2 pro medio. Igitur propter idem theorema quo vſi ſumus in Prop. præced. 1 Q † 12 erit ſumma quadratorum à ſingulis. Ergo 2 R ad 1 Q † 12, eſt in ratione data
Lem. 6. 2 ad 7. Et ita productus ſub extremis 14 R æquabitur producto ſub mediis 2 Q † 24. Et proinde 1 Q eſt æquale 7 R - 12. Eſtque 1 R 4, vel 3. pro differentia extremorum. Quare per Propoſit. 1. huius ſinguli ſunt ℞ 8 † 2. 2. ℞ 8 - 2. vel 4. 2. 1.

Hinc Canon.

CApe dimidium poſterioris termini rationis datæ, & ex eius dimidii quadrato tolle triplum quadratum prioris termini: huius enim reſidui radix quadrata addita & detracta ſupradicto dimidio, exhibebit differentiam extremorum priore rationis termino exiſtente medio de tribus quæſitis.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data ratio A B ad B C. Supra B C fiat ſemicirculus, & ſumatur linea B D potens triplum quadrati A B, ponaturque illa perpendicularis ad A C. Tum ducta D E parallela B C occurrat peripheriæ in puncto E, ex quo demittatur E F perpendicularis ad B C.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes, ſiquidem ducta E G ad centrum G erit dimidium poſterioris termini rationis B C, & ex quadrato E G, tol-

litur quadratum E F hoc eſt B D, relinquiturque quadratum F G cuius latus F G additum & detractum eidem dimidio exhibet F C & B F.

Dico autem F C vel B F fore differentiam extremarum de tribus quæſitis A B exiſtente media. Eſt enim vt A B ad B C; ita propter eamdem al- *1. ſexti.*
titudinem F C, rectangulum ex *1. ſecundi.*
A B in F C. Ad rectangulum *8. ſexti.* *4. ſexti.*



B C F hoc eſt ad rectangulum B F C plus quadrato F C *17. ſexti.*
ſed rectangulum B F C æquatur quadrato F E, hoc eſt B D, hoc eſt triplo quadrato A B. Igitur eſt A B ad B C vt rectangulum ex A B in F C, ad triplum quadratum A B plus quadrato F C. Ergo ſi vt prius per Propoſ. 1. huius data media A B, & differentia extremarum F C inueniantur extremæ, habebitur rectangulum ex media A B in differentiam extremarum F C, ad quadrata ſingularum eſſe in data ratione A B ad B C. Quod erat demonſtrandum.

Simili omnino diſcurſu poteſt oſtendi B F fore differentiam extremarum eadem A B exiſtente media: erit
enim vt A B ad B C; ita rectangulum A B F ad rectan- *1. ſexti.*
gulum C B F propter eamdem altitudinem B F. Igitur *3. ſecundi.*
vt A B ad B C; ita rectangulum A B F ad quadratum B F plus triplo quadrato A B. Et proinde ſi per Prop. 1. huius data media A B & B F differentia extremarum inueniantur extremæ, habebitur vt prius propoſitum.

Appendix.

HInc patet data quacumque ſumma vel differentia ex tribus quantitatibus & prædicta planorum ratione poſſe inueniri ſingulas. Patet ſecundò poſſe plurimis aliis viis procedi in operatione Algebrica vnde elicerentur Canones & Effectiones. Patet tertiò ſolui poſſe duo illa affinia problemata quorum primum eſt,

data ratione plani ex media in ſummam extremarum ad quadrata ſingularum inuenire tres quantitates proportionales. Secundum, data ratione planorum ex prima in ſecundam ex ſecunda in tertiam, & ex tertia in primam ad aggregatum quadratorum à ſingulis inuenire tres quantitates proportionales.

PROPOSITIO LIII.

Data ratione interualli quadratorum ab extremis ad ſummam quadratorum à ſingulis, inuenire tres quantitates proportionales.

ESto data ratio 15 ad 21. Ponatur 1 R pro ſumma extremorum, & ſumatur prior terminus rationis 15 pro differentia extremorum: Igitur multiplicando 15 per 1 R

Lem. 5. habebis 15 R pro interuallo quadratorum ab extremis. Quoniam verò 1 R eſt ſumma extremorum & 15 eorum differentia; erit 1 R † 15 duplum maioris extremi & 1 R - 15 duplum minoris; atque ita extremi erunt

Lem. 1. *Lem. 6.* $\frac{1R + 15}{2}$ & $\frac{1R - 15}{2}$. Ergo productus ſub extremis $\frac{1Q - 225}{4}$ æquabitur quadrato medii: & proinde ſi illum productum addideris quadratis extremorum, fiet ſumma quadratorum à ſingulis $\frac{3Q + 225}{4}$. Ergo 15 R ad $\frac{3Q + 225}{4}$ erunt in ratione data 15 ad 21. Et ſic productus ſub ex-

Lem. 6. tremis 315 R æquabitur producto ſub mediis $\frac{45Q + 3375}{4}$. Vnde 1 Q æquale eſt 28 R - 75 eſtque 1 R ſiue ſumma extremorum 25. Priore termino rationis 15 exiſtente differentia extremorum. Et propterea ſinguli 5. 10. 20.

Similiter data ratione 2 ad 3. Ponatur ſumma extremorum 1 R & ſumatur 2 pro differentia extremorum,

Igitur 2 R erit interuallum quadratorum ab extremis *Lem. 5.*
& 1 R † 2 erit duplum maioris & 1 R - 2 duplum minoris.
Proindeque extremi $\frac{1Q - 4}{2}$ & $\frac{1R - 2}{2}$. Ergo $\frac{1Q - 4}{4}$ produ- *Lem. 6.*
ctus ſub extremis æquatur quadrato medii. Et ſic addas *Lem. 6.*
illi producto quadrata extremorum fient $\frac{3Q + 4}{4}$ pro ag-
gregato quadratorum à ſingulis. Et ita 2 R ad $\frac{3Q + 4}{4}$
erunt in ratione data 2 ad 3. Igitur productus ſub extre-
mis 6 R, æqualis erit producto ſub mediis $\frac{6Q + 8}{4}$. Vnde *Lem. 6.*
1 Q eſt æquale 4 R - $\frac{8}{6}$ & fit 1 R ſiue ſumma extremorum
℞ $\frac{8}{3}$ † 2 priore termino rationis 2 exiſtente differentia
† 2 priore termino rationis 2 exiſtente differentia extre-
morum. Et propterea ſinguli ſunt ℞ $\frac{2}{3}$ † 2 ℞ ($\frac{2}{3}$ † ℞ $\frac{8}{3}$)
& ℞ $\frac{2}{3}$.

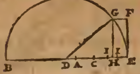
Hinc Canon.

Cape duos trientes poſterioris termini rationis datæ: ex horum duorum trientum quadrato tolle trientem quadrati quod fit à priori termino: huius enim reſidui radix quadrata duobus ſupradictis addita trientibus exhibet ſum nam extremorum, priore termino rationis exiſtente differentia extremorum.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data ratio A B ad B C. Sumatur C D triens ipſius B C, & centro D, interuallo D B, fiat ſemicirculus. Ponaturque ad extremitatem diametri perpendicularis linea E F, potens trientem quadrati A B, tum ducta F G parallela E B, occurrat peripheriæ in puncto G, ex quo demittatur perpendicularis G H.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes, ſiquidem cum D C ſit triens ipſius B C, erit B D, hoc eſt D G duplum trientis eiuſdem. Ex quadrato autem D G tollitur quadratum G H, hoc eſt E F, hoc eſt triens quadrati A B, & relinquitur quadratum D H, cuius latus D H additum B D, exhibet B H.



Dico verò B H fore ſummam extremarum de tribus quæſitis, A B exiſtente differerentia extremarum. Sit enim, ſi fieri poteſt, ſumma extremarum maior vel minor B H, & æqualis B I. Ergo per Corol. Prop. 23. Huius rectangulum I B A ſub ſumma extremarum I B, in differentiam extremarum A B æquabitur interuallo quadratorum ab extremis: eſt autem propter eamdem
1. ſexti. altitudinem I B, vt A B ad B C; ita rectangulum I B A ad rectangulum I B C, ergo cum debeat eſſe vt A B ad A C; ita rectangulum I B A quod æquatur interuallo quadratorum ab extremis ad aggregatum quadratorum
9 quinti. à ſingulis, erit rectangulum I B C æquale aggregato quadratorum a ſingulis. Sed quadratum ſummæ extremarum B I æquatur quadratis extremarum plus du-
4 ſecundi. plo rectangulo ſub extremis, hoc eſt plus duplo mediæ
17. ſexti. quadrato. Et eidem quadratum B I æquatur rectangulo I B C & rectangulo B I C. Ergo cum rectangulum I B C
2. ſecundi. æquale ſit aggregato quadratorum à ſingulis, erit rectangulum B I C æquale quadrato mediæ.

Atqui eſt vt A B ad C E; ita propter eamdem alti-
1. ſexti. tudinem B I rectangulum I B A ad rectangulum ſub I B
1 ſecundi. in C E hoc eſt ad rectangulum B I C plus rectangulo B I E. Eſt autem C E triens ipſius A C, quia B D, hoc eſt D E duplum eſt ipſius C D. Igitur cum ſit vt A B ad C E; ita rectangulum I B A ad rectangulum B I C, hoc eſt quadratum mediæ, plus rectangulo B I E; triplicando conſequentia vtriuſque proportionis, eſt vt A B ad

B C; ita rectangulum I B A ad triplum quadratum mediæ plus triplo rectangulo B I E. Ergo vt ſuprà; triplum quadratum mediæ plus triplo rectangulo B I E, æquatur quadratis trium proportionalium quæſitarum: ſed triplum quadratum mediæ plus quadrato differentiæ extremarum A B eſt æquale quadratis trium quæſitarum; igitur triplum rectangulum B I E æquatur quadrato A B. Sed quadrati A B triens eſt quadratum E F, hoc eſt G H hoc eſt; rectangulum B H E. Ergo rectangulum B H E æquatur rectangulo B I E. Quod eſt abſurdum, & contra quintam ſecundi. Ergo ſumma extremarum non poteſt eſſe maior nec minor B H. Et proinde erit ipſi æqualis. Quod erat demonſtrandum.

9. quinti. *8. ſexti.* *4. ſexti.* *17. ſexti.*

Iam verò data ſumma extremarum B H & differentia earumdem A B, facilè diſcernentur tres quantitates proportionales. Siquidem dimidium ipſius A H erit minor quæſitarum; cui ſi addatur A B fiet maior. Vnde media non latebit.

PROPOSITIO LIV.

Hoc idem problema aliter ſoluere.

ESto data ratio 15 ad 21. Ponatur 1 R pro differentia extremorum & ſumatur 15 prior terminus proportionis pro ſumma extremorum. Igitur 15 † 1 R erit duplum maioris & 15 - 1 R duplum minoris, & proinde extremi erunt $\frac{15 + 1 R}{2}$ & $\frac{15 - 1 R}{2}$. Ergo productus ſub extremis $\frac{225 - 1 Q}{4}$ æquabitur quadrato medii, cui ſi addas quadrata extremorum, habebis $\frac{675 + 1 Q}{4}$ pro quadratis ſingulorum. Et 15 R vt ſupra pro interuallo quadratorum ab extremis quare 15 R ad $\frac{675 + 1 Q}{4}$ eſt in ratione data 15 ad 21. Igitur productus ſub extremis 315 R eſt

Lem. 1. *Lem. 6.* *Lem. 5.* *Lem. 6.*

æqualis producto ſub mediis $\frac{10125 \dagger 15 Q}{4}$. Ergo poſt debitam reductionem 1 Q æquatur 84 R - 675. Et ita 1 R ſiue differentia extremorum eſt 9, priori termino rationis 15 exiſtente ſumma extremorum. Singulique ſunt 3. 6. 12. Et ſatisfaciunt quæſtioni.

Similiter data ratione 2 ad 3. Ponatur 1 R pro differentia extremorum, & ſumatur 2 pro ſumma. Ergo 2 † 1 R
Lem. 1. erit duplum maioris & 2 - 1 R duplum minoris. Atque
Lem. 6. ita extremi erunt $\frac{2 \dagger 1 R}{2}$. & $\frac{2 - 1 R}{2}$ igitur productus ſub extremis $\frac{4 - 1 Q}{4}$ eſt æqualis quadrato medii, cui ſi addas quadrata extremorum, habebis $\frac{12 \dagger 1 Q}{4}$ pro aggregato
Lem. 5. quadratorum à ſingulis, & 2 R pro interuallo quadratorum ab extremis. Igitur 2 R ad $\frac{12 \dagger 1 Q}{4}$ ſunt in ratione data 2 ad 3. Et ſic productus ſub extremis 6 R æqua-
Lem. 6. tur producto ſub mediis $\frac{14 \dagger 2 Q}{4}$. Et poſt debitam reductionem, 1 Q eſt æquale 12 R - 12. Vnde 1 R ſiue differentia extremorum eſt 6 ℞ 24 priore termino rationis 2 exiſtente ſumma extremorum. Quare ſinguli erunt 4 ℞ 6 & ℞ (℞ 216 - 14) & ℞ 6 - 2.

Hinc Canon.

Ex quadruplo quadrato poſterioris termini rationis datæ, tollæ triplum quadratum prioris: reſidui radix quadrata duplo poſterioris termini detracta exhibet differentiam extremorum, priori termino rationis exiſtente ſumma extremorum.

Hinc Effectio Geometrica.

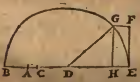
Sit data ratio A B ad B C. Sumatur C D æqualis C B, & centro D, interuallo D B fiat ſemicirculus, ad

cuius

cuius diametri extremitatem perpendicularis erigatur linea E F potens triplum quadratum A B. Ductaque F G parallela E B occurrat peripheriæ in puncto G, ex quo demittatur G H.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis partes, ſiquidem cum D B hoc eſt D G ſit dupla B C; eius quadratum erit quadruplum quadrati B C; ex quadrato autem D G tollitur quadratum G H, hoc eſt F E, hoc eſt triplum quadratum A B, & relinquitur quadratum D H, cuius latus D H ſublatum ex D E, quæ eſt dupla B C, relinquit H E.

Dico autem H E fore differentiam extremarum de tribus quæſitis proportionalibus, ſumma extremarum exiſtente A B priore termino rationis. Sit enim, ſi fieri poteſt, differentia extremarum maior vel minor H E, & æqualis E I.



Igitur ex Corollario Propoſ. 23. huius rectangulum ex A B ſumma extremarum in E I differentiam extremarum æquabitur interuallo quadratorum ab extremis. Eſt autem vt A B ad B C; ita propter eamdem altitudinem E I, rectangulum ex A B in E I ad rectangulum ex B C in E I. Ergo cum ſit vt A B ad B C, ita rectangulum ex A B in E I ad quadrata ſingularum, erit rectangulum ex B C in E I, æquale quadratis ſingularum. Sed B E eſt quadrupla B C, igitur rectangulum B E I erit quadruplum aggregati quadratorum à ſingulis. 1. *ſexti.* 9 *quinti.* 1. *ſexti.*

Atqui ex Corol. Propoſ. 14. huius, ſi ex quadruplo quadratorum à ſingulis in ſerie trium proportionalium, tollatur quadratum differentiæ extremarum, reſtabit triplum quadratum ſummæ extremarum, ergo ſi ex rectangulo B E I tollatur quadratum differentiæ E I, reſtabit triplum quadratum A B; hoc eſt reſtabit quadratum E F hoc eſt G H, hoc eſt rectangulum B H E. Atqui rectangulum B E I æquatur rectangulo B I E & quadrato 3. *ſecundi.*

I E. Et proinde ſi ex rectangulo B E I, tollatur quadratum E I, relinquitur rectangulum B I E æquale rectangulo B H E. Quod eſt abſurdum & contra Propoſ. 5. ſecundi. Igitur differentia extremarum non poteſt eſſe maior nec minor E I. Ergo eſt illi æqualis. Quod erat demonſtrandum.

Appendix.

HInc patet quomodo data quacumque ſumma vel differentia ex tribus quantitatibus proportionalibus, cum prædicta planorum ratione inueniri poſſint ſingulæ.

Patet etiam data ratione quadrati mediç plus duplo minoris quadrato ad differentiam quadratorum ab extremis inueniri poſſe tres proportionales: nam componendo & inuertendo erit data eadem, quæ hic, ratio.

Similiter data quoque ratione quadratorum à ſingulis ad quadratum mediæ plus duplo minoris quadrato, inuenientur tres quantitates per conuerſionem rationis & inuertendo.

Denique patet quoque plurimis aliis modis potuiſſe procedi in operatione Algebrica, vnde octodecim circiter alij Canones & Effectiones Geometricæ orirentur.

PROPOSITIO LV.

Data ratione interualli quadratorum mediæ & maioris ad quadrata trium quantitatum proportionalium, inuenire ſingulas.

ESto data ratio 4 ad 7. Ponatur minor 1 R & ſumatur 4 prior terminus proportionis pro maiore. Igi-

tur productus ſub extremis 4 R æquabitur quadrato medij. Cui ſi addas quadrata extremorum 1 Q & 16. Fiet ſumma quadratorum à ſingulis 4 R † 1 Q † 16. Si verò quadratum medij 4 R tollas à quadrato maioris 16, habebis 16 - 4 R pro interuallo quadratorum medij & maioris & proinde 16 - 4 R ad R † 1 Q † 16 eſt in ratione data 4 ad 7. Et ita productus ſub extremis 112 - 28 R æqualis eſt producto ſub mediis 16 R † 4 Q † 64. Ergo poſt debitam reductionem 1 Q æquatur 12 - 1 R. Et fit 1 R ſiue minor 1, priore termino rationis 4 exiſtente maiore, ſingulique ſunt 1. 2. 4. *Lem. 6.* *Lem. 6.*

Similiter data ratione 1 ad 3. Poſitaque 1 R pro minore, & ſumpto priori termino rationis 1 pro maiore, diſcurrendo vt ſupra fit 1 R ſiue minor ℞ 6 - 2. Singulique ℞ 6 . 2. ℞ (℞ 6 - 2.) 1.

Hinc Canon.

PLanum ſub priori termino rationis datæ in differentiam terminorum adde quadrato dimidiæ terminorum ſummæ: huius enim aggregati radix quadrata multata dimidio ſummæ terminorum exhibet minorem, priore termino rationis exiſtente maiore.

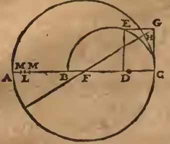
Hinc Effectio Geometrica.

SIt data ratio A B ad B C. Supra C B fiat ſemicirculus, & ſumpta B D æquali B A, erigatur D E perpendicularis vſque ad peripheriam. Tum diuiſa A C bifariam in F centro F, interuallo F A vel F C, fiat ſemicirculus, ductaque F G parallela A C, occurrat C G perpendiculariter erectæ ad extremitatem diametri in puncto G. Connexaque & producta G F ſecet maiorem circumferentiam in punctis H & I.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes, ſiquidem cum B D ſit æqualis B A, erit rectangulum B D C comprehenſum ſub priori termino rationis

8. ſexti. B D, & differentia terminorum D C. Rectangulum au-
4. ſexti. tem illud B D C, hoc eſt quadratum D E, hoc eſt G C,
17. ſexti. additur quadrato quod fit ab F C, dimidia terminorum
ſumma, & fit quadratum F G, cuius latus F G multatum
F H exhibet H G.

Dico autem H G fore minorem extremam de tribus quæſitis proportionalibus, priore termino rationis A B, exiſtente maiore extrema. Sumatur enim A L æqualis H G. Et ſit, ſi fieri poteſt minor extrema inæqualis A L, & æqualis A M. Igitur ex Corol. Prop. 23. huius, rectangulum A B M ſub maiore in differentiam extremarum æquabitur interuallo quadratorum mediæ &



1. ſexti. maioris; eſt autem propter eamdem altitudinem B M, vt
A B ad B C ita rectangulum A B M ad rectangulum
C B M; igitur cum ſit vt A B ad B C ita rectangulum
9. quinti. A B M ad quadrata ſingularum, erit rectangulum C B M
æquale aggregato quadratorum à ſingulis.

Atqui ſi ex quadratis ſingularum tollatur interuallum quadratorum mediæ & maioris, reſtat duplum quadratum mediæ plus quadrato minoris; igitur cum rectangu-
1. ſecundi. lum C B M æquetur rectangulis ex C D in B M & D B M;
ſit autem rectangulum D B M, hoc eſt A B M æquale
interuallo quadratorum mediæ & maioris, erit rectangulum ex C D in B M æquale duplo quadrato mediæ,
hoc eſt duplo rectangulo ſub extremis B A M, hoc eſt
rectangulo ſimplici D A M plus quadrato A M. Ergo
2. ſecundi. ſi vtrobique addatur rectangulum ex C B in A M,
8. ſexti. fiet rectangulum C A M plus quadrato A M æquale re-
4. ſexti. ctangulo ex C D in A B, hoc eſt ex C D B hoc eſt qua-
17. ſexti. *16 tertij.* drato D E, hoc eſt C G. Eſt autem C G perpendicu-
36. tertii. laris ad extremitatem diametri, & proinde tangens, ergo

quadratum C G æquatur rectangulo I G H, hoc eſt re- *3 ſecundi*
ctangulo I H G plus quadrato H G, hoc eſt C A L plus quadrato A L. Igitur rectangulum C A M plus quadrato A M æquatur rectangulo C A L plus quadrato A L, pars toti, ſi M ſumatur intra A L, vel totum parti, ſi M ſumatur intra L B, quod eſt abſurdum. Igitur minor extrema non poteſt eſſe inæqualis A L, ſeu H G, & proinde erit illi æqualis. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LVI.

Hoc idem problema aliter perficere.

ESto data eadem ratio 4 ad 7. Ponatur 1 R pro differentia extremorum, & ſumatur prior proportionis terminus 4 pro maiore. Ergo 4 - 1 R erit minor. Et productus ſub extremis 16 - 4 R æqualis erit quadrato medij, cui ſi addas quadrata extremorum 16 - 8 R † 1 Q & 16. Fiet aggregatum quadratorum à ſingulis 48 - 12 R † 1 Q. Et ſi tollas 16 - 4 R quadratum medij de quadrato maioris 16, relinquitur 4 R pro interuallo quadratorum medij & maioris. Igitur 4 R ad 48 - 12 R † 1 Q eſt in data ratione 4 ad 7. Et ſic productus ſub extremis 28 R æquatur producto ſub mediis *Lem. 6.* 192 - 48 R † 4 Q. Et poſt debitam reductionem 1 Q eſt æquale 19 R - 48. Vnde 1 R ſiue differentia extremorum eſt 3. maiore exiſtente priore termino rationis 4. Singulique ſunt 1. 2. 4.

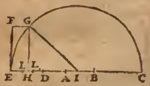
Similiter data ratione 1 ad 3. Poſitaque 1 R pro differentia extremorum, & priori termino rationis 1 ſumpto pro maiore, diſcurrendo vt ſupra fit 1 R, ſiue differentia extremorum 3 - ℞ 6. Singulique ℞ 6 - 2. ℞ (℞ 6 - 2.) 1.

Hinc Canon.

IVnge triplum prioris termini rationis datæ cum poſteriori: ſummæ cape dimidium, & ex eius dimidij quadrato tolle triplum quadratum prioris termini: illius enim reſidui radix quadrata ſupradicto detracta dimidio exhibebit differentiam extremorum, priore termino rationis datæ exiſtente maiore.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data ratio A B ad B C. Sumantur A D & D E æquales ſigillatim ipſi A B. Et ſupra totam E C fiat ſemicirculus. Tum ponatur ad extremitatem diametri perpendicularis E F potens triplum quadratum E D hoc eſt A B. Et ducta F G parallela E C, occurrat peripheriæ in puncto G, ex quo demittatur G H.



Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes, ſiquidem ducta G I ad centrum I, erit dimidium ipſius E C. Ex quadrato autem G I tollitur quadratum G H, hoc eſt F E, hoc eſt triplum quadratum A B, & reſtat quadratum H I, cuius latus H I detractum ex E I, relinquit E H.

Dico autem E H fore differentiam extremarum priore termino rationis A B, hoc eſt, E D exiſtente maiore. Sit enim, ſi fieri poteſt differentia extremarum maior vel minor E H, & æqualis E L. Igitur per Coroll Prop. 23. huius rectangulum D E L ſub maiore in differentiam extremarum æquabitur interuallo quadratorum mediæ & maioris. Sed eſt vt E D, hoc eſt A B ad B C, ita propter 1. ſexti. eamdem altitudinem E L, rectangulum D E L ad rectangulum ex B C in E L. Ergo cum ſit vt A B ad B C, ita rectangulum D E L ad aggregatum quadratorum à

ſingulis,erit rectangulum ex B C in E L æquale quadratis ſingularum. 9. quinti.

Sed quoniam ex eodem Corollario Prop. 23. huius rectangulum D L E ſub minore in differentiam extremarum æquatur interuallo quadratorum mediæ & minoris, 1. ſecundi. & D B dupla eſt E D, erit rectangulum B L E æquale duplo interuallo quadratorum mediæ & maioris plus 1. ſecundi. interuallo quadratorum mediæ & minoris. Et propterea rectangulum C L E æquale quadratis ſingulorum plus duplo interuallo quadratorum maioris & mediæ, plus ſimplici interuallo quadratorum mediæ & minoris, quæ tria æqualia ſunt triplo quadrato maioris extremæ, vt ex 2. lib. Elementorum perſpicuum eſt. Ergo rectangulum C L E æquatur quadrato E F, hoc eſt H G, hoc eſt 8. ſexti. rectangulo E H C, pars toti, vel totum parti, quod 4. ſexti. eſt abſurdum, & contra quintam ſecundi. Igitur diffe- 17. ſexti. rentia extremarum non poteſt eſſe maior vel minor E H. Ergo eſt illi æqualis. Quod erat demonſtrandum.

Appendix.

Hinc patet quomodo data quacumque ſumma vel differentia ex tribus quantitatibus proportionalibus inueniri poſſint ſingulæ, in data ratione prædictorum planorum. Colligitur etiam data ratione quadrati minoris plus duplo mediæ quadrato ad differentiam quadratorum mediæ & maioris inueniri poſſe tres proportionales: nam componendo & inuertendo erit quoque data eadem, quæ hic, ratio. Deinde data ratione quadratorum à ſingulis ad quadratum minoris plus duplo mediæ quadrato, inuenientur tres quantitates per conuerſionem rationis, & inuertendo. Demum multis aliis viis procedi potuiſſet in operatione Algebrica; vnde circiter octodecim alii Canones, & Effectiones Geometricæ oriuntur.

PROPOSITIO LVII.

Data ratione interualli quadratorum mediæ & minoris ad quadrata trium quantitatum proportionalium, inuenire ſingulas.

ESto data ratio 2 ad 13. Ponatur maior 1 R, & ſumatur prior terminus rationis 2 pro minore. Igitur productus ſub extremis 2 R æqualis erit quadrato medij, cui ſi addas quadrata extremorum 4 & 1 Q. Fiet ſumma quadratorum à ſingulis 2 R † 4 † 1 Q. Si autem tollas quadratum minoris de quadrato medij, relinquetur 2 R - 4. Ergo 2 R - 4 ad 2 R † 4 † 1 Q eſt in ratione data 2 ad 13. Et ita productus ſub extremis 26 R - 52 æquabitur producto ſub mediis 8 † 4 R † 2 Q. Vnde poſt debitam reductionem, 1 Q eſt æquale 11 R - 30. Et fit 1 R ſiue maior 6 vel 5. Singulique 2. ℞ 12. 6. vel 2. ℞ 10. 5.

Lem. 6.

Lem. 6.

Hinc Canon.

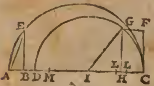
EX quadrato dimidiæ differentiæ terminorum rationis datæ, tolle productum ſub ſumma terminorum in priorem: reſidui enim radix quadrata dimidiæ terminorum differentiæ addita & detracta, exhibet maiorem, priore termino rationis exiſtente minore.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data ratio A B ad B C. Sumatur D B æqualis A B: Et fiant duo ſemicirculi ſupra A C & D C. Tum erecta B E perpendicularis ad diametrum nectatur A E, cui æqualis ponatur C F perpendiculariter ad C A. Et ducta F G parallela C A, occurrat minori peripheriæ in puncto

punĉto G, ex quo demittatur G H ad angulos rectos ipſi D C.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis partes, ſiquidem ducta G I ad centrum



I minoris ſemicirculi, erit dimidium D C quæ eſt differentia terminorum rationis datæ : ex quadrato autem G I tollitur quadratum G H, hoc eſt F C, hoc eſt A E, hoc eſt rectangulum C A B ſub ſumma terminorum in priorem; & relinquitur quadratum I H, cuius latus I H additum & detractum dimidiæ D C, exhibet D H & H C. *47. primi. 8. ſexti. 4. ſexti. 17. ſexti.*

Dico autem D H vel H C fore maiorem ex tribus quæſitis, priore termino rationis A B exiſtente minore. Sit enim, ſi fieri poteſt, maior inæqualis D H. Et æqualis D L itaut vel ſimpliciter ſuperet D H vel deficiat ſuperando H C vt vides in figura, ſumaturque D M æqualis A B. Igitur ex Corol. Propoſ. 23. huius rectangulum D M L ſub minori & differentia extremarum erit æquale interuallo quadratorum minoris & mediæ : eſt autem vt A B, hoc eſt D M ad B C; ita propter eamdem altitudinem M L, rectangulum D M L ad rectangulum ex B C in M L. *1. ſexti.* Ergo cum ſit vt A B ad B C; ita rectangulum D M L ad aggregatum quadratorum à ſingulis, erit rectangulum ex B C in M L æquale quadratis ſingularum.

Sed quadrata ſingularum ſunt etiam æqualia quadratis *9. quinti.* D L, D M & rectangulo L D M ſub extremis, ergo rectangulum ex B C in M L, æquatur quadratis D L, D M, *17. ſexti.* & rectangulo L D M. Cum igitur quadratum D L æ- *4. ſecundi.* quale ſit quadratis partium D M, M L & duplo rectanguli ſub partibus D M L, ſi tum ex rectangulo ex B C in M L, tum ex quadratis D L, D M, & rectangulo L D M tollas quadratum M L plus duplo rectangulo D M L, *1. ſecundi.* relinquitur rectangulum C L M æquale rectangulo *16. ſexti.*

LAB. Quare eſt reciprocè vt LA ad CL; ita LM ad DM. Et componendo, vt AC ad CL; ita LD ad
16. ſexti. DM, hoc eſt AB. Ergo rectangulum ſub extremis CAB, hoc eſt quadratum AE, hoc eſt CF, hoc eſt HG, æquabitur rectangulo ſub mediis CLD.

8. ſexti. Quadratum verò GH eſt æquale rectangulo CHD.
4. ſexti. Igitur rectangulum CLD æquatur rectangulo CHD.
17. ſexti. Quod eſt abſurdum & contra quintam ſecundi. Et proinde minore extrema exiſtente AB non poteſt maior ſuperare DH, nec deficere ab illa ſuperando HC, & proinde erit illi æqualis. Quod erat demonſtrandum.

Poſſet ſimiliter iuxta poſtremam Canonis partem oſtendi eadem AB exiſtente minore extrema HC fore maiorem. Sed hoc relinquitur exercitationi lectoris.

PROPOSITIO LVIII.

Hoc idem problema aliter ſoluere.

DAta eadem ratione 2 ad 13. Ponatur 1 R pro differentia extremorum, & ſumatur prior terminus rationis 2 pro minore. Ergo productus ſub extremis
Lem. 6. 4 † 2 R erit æqualis quadrato medii, cui ſi addas quadrata extremorum 4 & 4 † 1 Q † 4 R fiet ſumma quadratorum à ſingulis 12 † 1 Q † 6 R; ſi autem tollas quadratum minoris 4 de quadrato medij 4 † 2 R, reſtabit interuallum quadratorum medii & minoris 2 R. Ergo 2 R ad 12 † 1 Q † 6 R eſt in ratione data 2 ad 13. Et ita pro-
Lem. 6. ductus ſub extremis 26 R æquatur producto ſub mediis 24 † 2 Q † 12 R, & poſt debitam reductionem 1 Q eſt æquale 7 R - 12. Vnde 1 R ſiue differentia extremorum eſt 4 vel 3. Priore termino rationis 2 exiſtente minore. Igitur ſinguli erunt 2. ℞ 12. 6 vel 2. ℞ 10. 5.

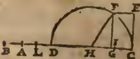
Hinc Canon.

EX poſteriori termino rationis datæ tolle triplum prioris, reſiduique cape dimidium, & ex huius dimidij quadrato tolle triplum quadratum prioris termini: huius enim relicti radix quadrata ſupradicto addita & detracta dimidio exhibet differentiam extremorum, priore termino rationis exiſtente minore.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data ratio A B ad B C. Sumatur A D dupla ipſius A B. Et ſupra reliquam D C fiat ſemicirculus, & ad diametri extremitatem erigatur perpendicularis C E potens triplum quadratum A B, ductaque E F parallela diametro, occurrat peripheriæ in puncto F, ex quo demittatur F G perpendicularis ad D C.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes, ſiquidem ex poſteriori termino rationis B C, tollitur triplum prioris A B, & relinquitur D C. Ductaque F H ad centrum ſemicirculi H, erit dimidium D C. Ex quadrato autem F H tollitur quadratum F G hoc eſt C E, hoc eſt triplum quadrati A B, & relinquitur quadratum H G, cuius latus H G additum & detractum dimidio ipſius D C exhibet D G & G C.



Dico autem D G vel G C fore differentiam extremarum, A B exiſtente minore extrema. Sit enim, ſi fieri poteſt differentia extrematum maior D G & æqualis D I. Cum A D ſit dupla B A, diuiſa illa bifariam in L erit D L æqualis A B. Ergo per Corol. Propoſ. 23. huius rectangulum L D I ſub minore in differentiam extremarum æquabitur interuallo quadratorum mediæ & mi-

noris. Eſt autem vt A B hoc eſt L D ad B C; ita pro-
5. ſexti. pter eamdem altitudinem D I, rectangulum L D I ad rectangulum ex B C in D I. Ergo cum ſit vt A B ad B C, ita rectangulum L D I ad aggregatum quadrato-
9. quinti. rum à ſingulis, erit rectangulum ex B C in D I, æquale quadratis ſingularum, & proinde illud rectangulum æquabitur quadratis maioris L I & minoris L D & rectangulo ſub extremis I L D.

Si ergo ex illis duobus æqualibus tollatur aliquid commune nempe quadratum differentiæ D I, plus triplo re-
3. ſecundi. ctangulo L D I. Quod eſt iam oſtenſum æquale inter-
1. ſecundi. uallo quadratorum mediæ & minoris, remanebit rectan-
4. ſecundi. gulum C I D æquale triplo quadrato L D hoc eſt A B.
17. ſexti. Sed ſumpta eſt linea C E potens triplum quadratum
8. ſexti. A B. Ergo quadratum C E, hoc eſt G F, hoc eſt rectan-
4. ſexti. gulum D G C æquatur rectangulo D I C. Quod eſt ab-
17. ſexti. ſurdum & contra quintam ſecundi. Eodem modo diſcurrendum foret ſi punctum I ſumptum eſſet intra H & G. Ergo cum differentia extremarum non poſſit eſſe maior D G nec minor ſuperando G C, erit æqualis D G. Quod erat demonſtrandum.

Similiter oſtendi poſſet G C fore differentiam extremarum eadem A B exiſtente minore. Verum hæc demonſtratio, cum eodem modo abſolui poſſit, relinquitur exercitationi lectoris.

Appendix.

POtuit hęc propoſitio, ſicut & pleręque præcedentes demonſtrari poſitiuè hoc modo. Nam exiſtente L G maiore & L D minore quadrata ſingularum æquan-
17. ſexti. tur quadrato L D quadrato L G & rectangulo ſub extremis G L D quadratum autem L G æquale eſt quadratis
4 ſecundi. partium L D, D G & duplo rectanguli L D G, rectan-
3. ſecundi. gulum vero G L D ęquatur rectangulo L D G & quadrato L D. Igitur quadrata ſingularum æquantur qua-

drato D G plus triplo quadrato L D, plus triplo rectangulo L D G. Sed rectangulum ex B C in D G æquatur quadrato D G plus rectangulo B D G plus rectangulo D G C, rectangulum autem B D G eſt æquale triplo rectangulo L D G & rectangulum D G C quadrato G F quod eſt triplum quadrati L D. Ergo rectangulum L D G ad quadrata ſingularum eſt vt rectangulum L D G ad rectangulum ſub B C in D G. Sed propter eamdem altitudinem D G rectangulum L D G ad rectangulum ſub B C in G D eſt in ratione data A B ad B C. Ergo cum rectangulum L D G ſit æquale interuallo quadratorum mediæ & minoris: erit eiuſmodi interuallum ad quadrata ſingularum in ratione data A B ad B C. Quod erat demonſtrandum. *1. ſecundi.* *9. quinti.* *1. ſexti.*

Hinc patet quomodo inueniri poſſint tres quantitates proportionales data quacumque ex illis vel ſumma vel differentia, cum prædicta planorum ratione.

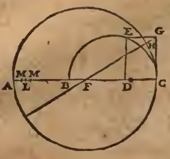
Deinde data ratione ſummæ quadrati maioris plus duplo quadrati minoris ad interuallum quadratorum minoris & mediæ poſſunt inueniri tres proportionales componendo enim & inuertendo erit eadem, quæ hic, ratio data.

Tertiò inueniri quoque poſſunt tres data ratione quadratorum à ſingulis ad quadratum maioris plus duplo minoris quadrato: nam per conuerſionem rationis & inuertendo, habebitur ratio præſens.

Denique hinc etiam colligitur poſſe circiter octodecim aliis modis procedi in operatione Algebrica, vnde totidem Canones & Effectiones elicerentur.

8. ſexti. B D, & differentia terminorum D C. Rectangulum au-
4. ſexti. tem illud B D C, hoc eſt quadratum D E, hoc eſt G C,
17. ſexti. additur quadrato quod fit ab F C, dimidia terminorum ſumma, & fit quadratum F G, cuius latus F G multatum F H exhibet H G.

Dico autem H G fore minorem extremam de tribus quæſitis proportionalibus, priore termino rationis A B, exiſtente maiore extrema.



Sumatur enim A L æqualis H G. Et ſit, ſi fieri poteſt minor extrema inæqualis A L, & æqualis A M. Igitur ex Corol. Prop. 23. huius, rectangulum A B M ſub maiore in differentiam extremarum æquabitur interuallo quadratorum mediæ & maioris; eſt autem propter eamdem altitudinem B M, vt
1. ſexti. A B ad B C ita rectangulum A B M ad rectangulum C B M; igitur cum ſit vt A B ad B C ita rectangulum
9. quinti. A B M ad quadrata ſingularum, erit rectangulum C B M æquale aggregato quadratorum à ſingulis.

Atqui ſi ex quadratis ſingularum tollatur interuallum quadratorum mediæ & maioris, reſtat duplum quadratum mediæ plus quadrato minoris; igitur cum rectangu-
1. ſecundi. lum C B M æquetur rectangulis ex C D in B M & D B M; ſit autem rectangulum D B M, hoc eſt A B M æquale interuallo quadratorum mediæ & maioris, erit rectangulum ex C D in B M æquale duplo quadrato mediæ, hoc eſt duplo rectangulo ſub extremis B A M, hoc eſt rectangulo ſimplici D A M plus quadrato A M. Ergo
1. ſecundi. ſi vtrobique addatur rectangulum ex C B in A M,
8. ſexti. fiet rectangulum C A M plus quadrato A M æquale re-
4. ſexti. ctangulo ex C D in A B, hoc eſt ex C D B hoc eſt qua-
17. ſexti. drato D E, hoc eſt C G. Eſt autem C G perpendicu-
16. tertij.
36. tertii. laris ad extremitatem diametri, & proinde tangens, ergo

quadratum C G æquatur rectangulo I G H, hoc eſt re- *3 ſecundi.*
ctangulo I H G plus quadrato H G, hoc eſt C A L plus quadrato A L. Igitur rectangulum C A M plus quadrato A M æquatur rectangulo C A L plus quadrato A L, pars toti, ſi M ſumatur intra A L, vel totum parti, ſi M ſumatur intra L B, quod eſt abſurdum. Igitur minor extrema non poteſt eſſe inæqualis A L, ſeu H G, & proinde erit illi æqualis. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LVI.

Hoc idem problema aliter perficere.

ESto data eadem ratio 4 ad 7. Ponatur 1 R pro differentia extremorum, & ſumatur prior proportionis terminus 4 pro maiore. Ergo 4 - 1 R erit minor. Et productus ſub extremis 16 - 4 R æqualis erit quadrato medij, cui ſi addas quadrata extremorum 16 - 8 R † 1 Q & 16. Fiet aggregatum quadratorum à ſingulis 48 - 12 R † 1 Q. Et ſi tollas 16 - 4 R quadratum medij de quadrato maioris 16, relinquitur 4 R pro interuallo quadratorum medij & maioris. Igitur 4 R ad 48 - 12 R † 1 Q eſt in data ratione 4 ad 7. Et ſic productus ſub extremis 28 R æquatur producto ſub mediis *Lem. 6.* 192 - 48 R † 4 Q. Et poſt debitam reductionem 1 Q eſt æquale 19 R - 48. Vnde 1 R ſiue differentia extremorum eſt 3. maiore exiſtente priore termino rationis 4. Singulique ſunt 1. 2. 4.

Similiter data ratione 1 ad 3. Poſitaque 1 R pro differentia extremorum, & priori termino rationis 1 ſumpto pro maiore, diſcurrendo vt ſupra fit 1 R, ſiue differentia extremorum 3 - ℞ 6. Singulique ℞ 6 - 2. ℞ (℞ 6 - 2.) 1.

ſingulis,erit rectangulum ex B C in E L æquale quadratis ſingularum. *9. quinti.*

Sed quoniam ex eodem Corollario Prop. 23. huius rectangulum D L E ſub minore in differentiam extremarum æquatur interuallo quadratorum mediæ & minoris, & D B dupla eſt E D, erit rectangulum B L E æquale duplo interuallo quadratorum mediæ & maioris plus interuallo quadratorum mediæ & minoris. Et propterea rectangulum C L E æquale quadratis ſingulorum plus duplo interuallo quadratorum maioris & mediæ, plus ſimplici interuallo quadratorum mediæ & minoris, quæ tria æqualia ſunt triplo quadrato maioris extremæ, vt ex 2. lib. Elementorum perſpicuum eſt. Ergo rectangulum C L E æquatur quadrato E F, hoc eſt H G, hoc eſt rectangulo E H C, pars toti, vel totum parti, quod eſt abſurdum, & contra quintam ſecundi. Igitur differentia extremarum non poteſt eſſe maior vel minor E H. Ergo eſt illi æqualis. Quod erat demonſtrandum. *1. ſecundi.* *1. ſecundi.* *8. ſexti.* *4. ſexti.* *17. ſexti.*

Appendix.

HInc patet quomodo data quacumque ſumma vel differentia ex tribus quantitatibus proportionalibus inueniri poſſint ſingulæ, in data ratione prædictorum planorum. Colligitur etiam data ratione quadrati minoris plus duplo mediæ quadrato ad differentiam quadratorum mediæ & maioris inueniri poſſe tres proportionales: nam componendo & inuertendo erit quoque data eadem, quæ hic, ratio. Deinde data ratione quadratorum à ſingulis ad quadratum minoris plus duplo mediæ quadrato, inuenientur tres quantitates per conuerſionem rationis, & inuertendo. Demum multis aliis viis procedi potuiſſet in operatione Algebrica; vnde circiter octodecim alii Canones, & Effectiones Geometricæ orirentur.

PROPOSITIO LVII.

Data ratione interualli quadratorum mediæ & minoris ad quadrata trium quantitatum proportionalium, inuenire ſingulas.

ESto data ratio 2 ad 13. Ponatur maior 1 R, & ſumatur prior terminus rationis 2 pro minore. Igitur productus ſub extremis 2 R æqualis erit quadrato medij, cui ſi addas quadrata extremorum 4 & 1 Q. Fiet ſumma quadratorum à ſingulis 2 R + 4 + 1 Q. Si autem tollas quadratum minoris de quadrato medij relinquetur 2 R - 4. Ergo 2 R - 4 ad 2 R + 4 + 1 Q eſt in ratione data 2 ad 13. Et ita productus ſub extremis 26 R - 52 æquabitur producto ſub mediis 8 + 4 R + 2 Q. Vnde poſt debitam reductionem, 1 Q eſt æquale 11 R - 30. Et fit 1 R ſiue maior 6 vel 5. Singulique 2. ℞ 12. 6. vel 2. ℞ 10. 5.

Lem. 6.

Lem. 6.

Hinc Canon.

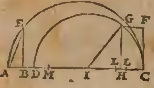
EX quadrato dimidiæ differentiæ terminorum rationis datæ, tolle productum ſub ſumma terminorum in priorem: reſidui enim radix quadrata dimidiæ terminorum differentiæ addita & detracta, exhibet maiorem, priore termino rationis exiſtente minore.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data ratio A B ad B C. Sumatur D B æqualis A B. Et fiant duo ſemicirculi ſupra A C & D C. Tum erecta B E perpendicularis ad diametrum nectatur A E, cui æqualis ponatur C F perpendiculariter ad C A. Et ducta F G parallela C A, occurrat minori peripheriæ in puncto

punƈto G, ex quo demittatur G H ad angulos reƈtos ipſi D C.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis partes, ſiquidem duƈta G I ad centrum



I minoris ſemicirculi, erit dimidium D C quæ eſt differentia terminorum rationis datæ : ex quadrato autem G I tollitur quadratum G H, *47. primi.* *8. ſexti.* *4. ſexti.* *17. ſexti.*
hoc eſt F C, hoc eſt A E, hoc eſt reƈtangulum C A B ſub ſumma terminorum in priorem; & relinquitur quadratum I H, cuius latus I H additum & detraƈtum dimidiæ D C, exhibet D H & H C.

Dico autem D H vel H C fore maiorem ex tribus quæſitis, priore termino rationis A B exiſtente minore. Sit enim, ſi fieri poteſt, maior inæqualis D H. Et æqualis D L itaut vel ſimpliciter ſuperet D H vel deficiat ſuperando H C vt vides in figura, ſumaturque D M æqualis A B. Igitur ex Corol. Propoſ. 23. huius reƈtangulum D M L ſub minori & differentia extremarum erit æquale interuallo quadratorum minoris & mediæ : eſt autem vt A B, hoc eſt D M ad B C, ita propter eamdem altitudinem M L, reƈtangulum D M L ad reƈtangulum ex B C in M L. *1. ſexti.* Ergo cum ſit vt A B ad B C; ita reƈtangulum D M L ad aggregatum quadratorum à ſingulis, erit reƈtangulum ex B C in M L æquale quadratis ſingularum.

Sed quadrata ſingularum ſunt etiam æqualia quadratis *9. quinti.*
D L, D M & reƈtangulo L D M ſub extremis, ergo reƈtangulum ex B C in M L, æquatur quadratis D L, D M, *17. ſexti.*
& reƈtangulo L D M. Cum igitur quadratum D L æ- *4. ſecundi.*
quale ſit quadratis partium D M, M L & duplo reƈtanguli ſub partibus D M L, ſi tum ex reƈtangulo ex B C in M L, tum ex quadratis D L, D M, & reƈtangulo L D M tollas quadratum M L plus duplo reƈtangulo D M L, *1. ſecundi.*
relinquitur reƈtangulum C L M æquale reƈtangulo *16. ſexti.*

LAB. Quare eſt reciprocè vt LA ad CL; ita LM ad DM. Et componendo, vt AC ad CL; ita LD ad
16. ſexti. DM, hoc eſt AB. Ergo rectangulum ſub extremis CAB, hoc eſt quadratum AE, hoc eſt CF, hoc eſt HG, æquabitur rectangulo ſub mediis CLD.

8. ſexti. Quadratum verò GH eſt æquale rectangulo CHD.
4. ſexti. Igitur rectangulum CLD æquatur rectangulo CHD.
17. ſexti. Quod eſt abſurdum & contra quintam ſecundi. Et proinde minore extrema exiſtente AB non poteſt maior ſuperare DH, nec deficere ab illa ſuperando HC, & proinde erit illi æqualis. Quod erat demonſtrandum.

Poſſet ſimiliter iuxta poſtremam Canonis partem oſtendi eadem AB exiſtente minore extrema HC fore maiorem. Sed hoc relinquitur exercitationi lectoris.

PROPOSITIO LVIII.

Hoc idem problema aliter ſoluere.

DAta eadem ratione 2 ad 13. Ponatur 1 R pro differentia extremorum, & ſumatur prior terminus rationis 2 pro minore. Ergo productus ſub extremis
Lem. 6. 4 † 2 R erit æqualis quadrato medii, cui ſi addas quadrata extremorum 4 & 4 † 1 Q † 4 R fiet ſumma quadratorum à ſingulis 12 † 1 Q † 6 R; ſi autem tollas quadratum minoris 4 de quadrato medij 4 † 2 R, reſtabit interuallum quadratorum medii & minoris 2 R. Ergo 2 R ad 12 † 1 Q † 6 R eſt in ratione data 2 ad 13. Et ita pro-
Lem. 6. ductus ſub extremis 26 R æquatur producto ſub mediis 24 † 2 Q † 12 R, & poſt debitam reductionem 1 Q eſt æquale 7 R - 12. Vnde 1 R ſiue differentia extremorum eſt 4 vel 3. Priore termino rationis 2 exiſtente minore. Igitur ſinguli erunt 2. ℞ 12. 6 vel 2. ℞ 10. 5.

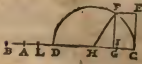
Hinc Canon.

EX poſteriori termino rationis datæ tolle triplum prioris, reſiduique cape dimidium, & ex huius dimidij quadrato tolle triplum quadratum prioris termini: huius enim relicti radix quadrata ſupradicto addita & detracta dimidio exhibet differentiam extremorum, priore termino rationis exiſtente minore.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data ratio A B ad B C. Sumatur A D dupla ipſius A B. Et ſupra reliquam D C fiat ſemicirculus, & ad diametri extremitatem erigatur perpendicularis C E potens triplum quadratum A B, ductaque E F parallela diametro, occurrat peripheriæ in puncto F, ex quo demittatur F G perpendicularis ad D C.

Manifeſtum eſt obſeruati ſingulas Canonis Algebrici partes, ſiquidem ex poſteriori termino rationis B C, tollitur triplum prioris A B, & relinquitur D C. Ductaque F H ad centrum ſemicirculi H, erit dimidium D C.



Ex quadrato autem F H tollitur quadratum F G hoc eſt C E, hoc eſt triplum quadrati A B, & relinquitur quadratum H G, cuius latus H G additum & detractum dimidio ipſius D C exhibet D G & G C.

Dico autem D G vel G C fore differentiam extremarum, A B exiſtente minore extrema. Sit enim, ſi fieri poteſt differentia extremarum maior D G & æqualis D I. Cum A D ſit dupla B A, diuiſa illa bifariam in L erit D L æqualis A B. Ergo per Corol. Propoſ. 23. huius rectangulum L D I ſub minore in differentiam extremarum æquabitur interuallo quadratorum mediæ & mi-

noris. Eſt autem vt A B hoc eſt L D ad B C; ita propter camdem altitudinem D I, rectangulum L D I ad rectangulum ex B C in D I. Ergo cum ſit vt A B ad B C, ita rectangulum L D I ad aggregatum quadratorum à ſingulis, erit rectangulum ex B C in D I, æquale quadratis ſingularum, & proinde illud rectangulum æquabitur quadratis maioris L I & minoris L D & rectangulo ſub extremis I L D.

I. ſexti.

9. quinti.

Si ergo ex illis duobus æqualibus tollatur aliquid commune nempe quadratum differentiæ D I, plus triplo rectangulo L D I. Quod eſt iam oſtenſum æquale interuallo quadratorum mediæ & minoris, remanebit rectangulum C I D æquale triplo quadrato L D hoc eſt A B. Sed ſumpta eſt linea C E potens triplum quadratum A B. Ergo quadratum C E, hoc eſt G F, hoc eſt rectangulum D G C æquatur rectangulo D I C. Quod eſt abſurdum & contra quintam ſecundi. Eodem modo diſcurrendum foret ſi punctum I ſumptum eſſet intra H & G. Ergo cum differentia extremarum non poſſit eſſe maior D G nec minor ſuperando G C, erit æqualis D G. Quod erat demonſtrandum.

3. ſecundi. *1. ſecundi.* *4. ſecundi.* *17. ſexti.* *5. ſexti.* *4. ſexti.* *17. ſexti.*

Similiter oſtendi poſſet G C fore differentiam extremarum eadem A B exiſtente minore. Verum hæc demonſtratio, cum eodem modo abſolui poſſit, relinquitur exercitationi lectoris.

Appendix.

POtuit hęc propoſitio, ſicut & plerǫque præcedentes demonſtrari poſitiuè hoc modo. Nam exiſtente L G maiore & L D minore quadrata ſingularum æquantur quadrato L D quadrato L G & rectangulo ſub extremis G L D quadratum autem L G æquale eſt quadratis partium L D, D G & duplo rectanguli L D G, rectangulum vero G L D ęquatur rectangulo L D G & quadrato L D. Igitur quadrata ſingularum æquantur qua-

17. ſexti. *4 ſecundi.* *3. ſecundi.*

drato D G plus triplo quadrato L D, plus triplo rectangulo L D G. Sed rectangulum ex B C in D G æquatur quadrato D G plus rectangulo B D G plus rectangulo D G C, rectangulum autem B D G eſt æquale triplo rectangulo L D G & rectangulum D G C quadrato G F quod eſt triplum quadrati L D. Ergo rectangulum L D G ad quadrata ſingularum eſt vt rectangulum L D G ad rectangulum ſub B C in D G. Sed propter eamdem altitudinem D G rectangulum L D G ad rectangulum ſub B C in G D eſt in ratione data A B ad B C. Ergo cum rectangulum L D G ſit æquale interuallo quadratorum mediæ & minoris: erit eiuſmodi interuallum ad quadrata ſingularum in ratione data A B ad B C. Quod erat demonſtrandum. 1. ſecundi 9. quinti. 1. ſexti.

Hinc patet quomodo inueniri poſſint tres quantitates proportionales data quacumque ex illis vel ſumma vel differentia, cum prædicta planorum ratione.

Deinde data ratione ſummæ quadrati maioris plus duplo quadrati minoris ad interuallum quadratorum minoris & mediæ poſſunt inueniri tres proportionales componendo enim & inuertendo erit eadem, quæ hic, ratio data.

Tertiò inueniri quoque poſſunt tres data ratione quadratorum à ſingulis ad quadratum maioris plus duplo minoris quadrato: nam per conuerſionem rationis & inuertendo, habebitur ratio præſens.

Denique hinc etiam colligitur poſſe circiter octodecim aliis modis procedi in operatione Algebrica, vnde totidem Canones & Effectiones elicerentur.

PROPOSITIO LIX.

Data media ex tribus quantitatibus proportionalibus, & ſolido ſub ſumma quadratorum primæ & ſecundæ in tertiam, inuenire ſingulas.

ESto datus numerus 6 pro medio, & 468 pro ſolido. Ponatur primus 1 R, ergo quoniam medius eſt 6 erit tertius proportionalis $\frac{36}{1R}$. Quadrata primi & ſecundi ſunt 1 Q & 36 quæ ſi multiplices per tertium, fiet ſolidum $\frac{36 Q + 1296}{1 R}$, quod proinde erit æquale ſolido dato 468. Igitur poſt debitam reductionem 1 Q æquabitur 13 R - 36. Et ita 1 R ſiue primus erit 4 vel 9. Similiter ſi iiſdem datis poſuiſſes 1 R pro tertio. Quadrata ſecundi & primi eſſent $36 + \frac{1296}{1 Q}$ quæ multiplicata per tertium 1 R, facerent ſolidum $\frac{1296 R + 36 C}{1 Q}$ æquale ſolido dato 468. Et proinde 1 Q æquaretur vt ſupra 13 R - 36. Et ita 1 R ſiue tertius foret 4 vel 9.

Hinc Canon.

DIuide ſolidum datum per quadratum dati medij, & habebis ſummam extremorum. Vnde ſinguli non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

ESto media data linea A. Linea verò B ſit potens ſolidum ſub aggregato quadratorum primæ & ſecundæ in tertiam. Hoc eſt cubus B ſit æqualis tali ſolido. (Sicut enim poteſtas lineæ in planis eſt eius quadratum,

ita poteſtas lineæ in ſolidis eſt eius cubus) fiat vt quadratum A ad quadratum B; ita linea A ad aliam quæ ſit C.

Manifeſtum eſt obſeruari in hac praxi integrum Canonem, ſiquidem hoc poſito ſolidum rectangulum ſub quadrato A in lineam C æquabitur cubo B & proinde cubus B diuiditur per quadratum A, & fit linea C pro quotiente Geometrico. *14 vndecimi*

Dico autem lineam C fore ſummam extremarum: nam cum quadrata ſint in duplicata ratione laterum, erit vt prima ad tertiam, ita quadratum ſecundæ ad quadratum tertiæ; & componendo, vt ſumma primæ & tertiæ ad tertiam; ita aggregatum quadratorum ſecundæ & tertiæ ad tertiam. Et per conuerſionem rationis, vt ſumma primæ & tertiæ ad primam; ita aggregatum quadratorum ſecundæ & tertiæ ad quadratum ſecundæ. Ergo ſolidum ſub extremis, hoc eſt ſub quadrato ſecundæ in ſummam primæ & tertiæ æquabitur ſolido ſub mediis, hoc eſt ſub prima in aggregatum quadratorum ſecundæ & tertiæ. *20. ſexti.* *34 vndecimi*

Atqui quadrata primæ & ſecundæ ad quadrata ſecundæ & tertiæ ſunt, vt prima ad tertiam, igitur per eamdem Propoſ. Euclidis ſolidum ſub quadratis primæ & ſecunda in tertiam ęquale erit ſolido ſub quadratis ſecundę & tertię in primam. Quod poſtremum ſolidum iam probatum eſt æquari ſolido ſub quadrato mediæ in ſummam extremarum. Igitur cum linea B poſſit ſolidum ſub quadratis primæ & ſecundæ in tertiam; poterit etiam ſolidum ſub quadrato A in ſummam extremarum; ſed ex conſtructione poteſt ſolidum ſub quadrato A in lineam C. Ergo linea C eſt ſumma extremarum. Quod erat demonſtrandum. *34. vndec*

Corollarium.

SI fuerint tres quantitates proportionales, æqualia erunt inter ſe tria ſequentia ſolida. Primò ſolidum

ſub quadrato ſecundæ in ſummam extremarum. Secundò ſolidum ſub quadratis primæ & ſecundæ in tertiam. Tertiò ſolidum ſub quadratis ſecundæ & tertiæ in primam.

PROPOSITIO LX.

Data ſumma extremarum, & ſolido ſub quadratis ſecundæ & tertiæ in primam, inuenire tres quantitates proportionales.

ESto datus numerus 13 pro ſumma extremorum & 468 pro ſolido. Ponatur 1 R pro medio. Igitur per Corollarium præcedens multiplicando 13 per 1 Q, erit æquatio inter 13 Q & 468. Et proinde 1 Q æquatur 36. Fitque 1 R ſiue medius 6. Dato autem medio 6. & ſumma extremarum 13, diſtinguuntur extremi per Prop. 2. huius.

Lem 6. Potuit quoque aliter ſolui problema ponendo 1 R pro vno extremo. Sic enim alter foret 13 - 1 R. Horum productus 13 R - 1 Q æquatur quadrato medii cui ſi addas quadratum tertii nempe 169 + 1 Q - 26 R, fiet ſumma 169 - 13 R, qua multiplicata per primum 1 R, orietur productus 169 R - 13 Q æqualis dato ſolido 468. Et poſt debitam reductionem & diuiſionem 1 Q æquatur 13 R - 36. Igitur 1 R ſiue alter extremus eſt 4 vel 9.

Hinc Canon.

DAtum ſolidum diuide per ſummam extremorum, & habebis quadratum medii ex quæſitis. Vnde nec medius, nec ſinguli latebunt.

Hinc

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data linea A pro ſumma extremarum & linea B poſſit ſolidum ſub quadratis ſecundæ & tertiæ in primam. Fiat vt A ab B; ita quadratum B ad aliud quadratum, quod ſit C.

Manifeſtum eſt in hac praxi obſeruari integrum Canonem, ſiquidem hoc poſito ſolidum rectangulum ſub quadrato C in lineam A æquabitur cubo B. Et proinde cubus B diuidetur per lineam A, & fiet quadratum B pro quotiente Geometrico. 34. vndeci.

Dico autem lineam C. fore mediam ex quæſitis, Demonſtratio eſt ſimilis præcedenti.

PROPOSITIO LXI.

Data prima, & ſolido ſub quadrato mediæ in ſummam extremarum, inuenire tres quantitates proportionales.

ESto datus numerus 2 pro primo, & 160 pro ſolido. ponaturque 1 R pro aggregato quadratorum ſecundi & tertii. Igitur multiplicando 2 per 1 R, fiet ſolidum 2 R æquale ſolido dato 160. Et ita 1 R, ſiue aggregatum quadratorum ſecundi & tertii erit 80. Dato autem primo 2 & ſumma quadratorum à reliquis 80. Inueniuntur ſecundus & tertius ſigillatim per Propoſ. 21. & 22. Eruntque ſinguli quæſiti 2. 4. 8. Corol. prop. 59. huius.

Hinc Canon.

DAtum ſolidum diuide per primum, & habebis ſummam quadratorum ſecundi & tertii. Vnde ſinguli non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data linea A pro prima, ſiue ſit maior extrema ſiue minor. Linea verò B poſſit ſolidum ſub quadrato mediæ & ſumma extremarum. Fiat vt A ad B; ita quadratum B ad aliud quadratum quod ſit C.

Manifeſtum eſt obſeruari integrum Canonem, ſiquidem hoc poſito ſolidum rectangulum ſub quadrato C in lineam A æquabitur cubo B, & proinde diuiſo cubo B per lineam A fiet quadratum C pro quotiente Geometrico. *34. vndec.*

Dico autem lineam C fore potentem quadrata ſecundæ & tertiæ. Quoniam enim eſt vt A ad B; ita quadratum B ad quadratum C, erit ſolidum ſub linea A in quadratum C æquale cubo B. Sed ille idem cubus B æquatur ſolido ſub prima & aggregato quadratorum ſecundæ & tertiæ. Ergo cum A ſit prima, erit linea C potens quadrata ſecundæ & tertiæ; quod erat demonſtrandum. Data autem prima A, & linea potente quadrata ſecundæ & tertiæ, facile diſcernuntur ſingulæ. *34. vndec. Coroll. 59. huius. 21. huius.*

Appendix.

HInc facile ſolues iſtud problema. Data quantitate potente quadrata primæ & ſecundæ, vna cum ſolido quod fit ex quadrato mediæ in ſummam extremarum, inuenire tres quantitates proportionales. Nam tum praxis tum demonſtratio innititur Corollario Propoſitionis 59. huius.

PROPOSITIO LXII.

Data media, & ſolido ſub ſumma extremarum in ſummam planorum ex prima in ſecundam & ſecunda in tertiam, inuenire tres quantitates proportionales.

ESto datus numerus 6 pro medio. Et 1014 pro ſolido. Ponatur 1 R pro ſumma extremorum. Ergo quoniam eſt vt ſumma extremorum ad medium; ſic quadratum ſummæ extremorum ad aggregatum planorum ex primo in ſecundum & ſecundo in tertium, erit ſolidum datum æquale ſolido ſub medio in quadratum ſummæ extremorum. Igitur multiplicando 1 Q per 6, habebis ſolidum 6 Q æquale ſolido dato 1014 & proinde 1 Q æquatur 169. Et fit 1 R, ſiue ſumma extremorum 13. Singulique per Prop. 2. huius erunt 4. 6. 9. *Corol. Prop. 9. huius.*

Hinc Canon.

DIuide ſolidum datum per medium, & habebis quadratum ſummæ extremorum. Vnde nec ſumma extremorum nec ſinguli latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

ESto media data linea A. Et linea B poſſit ſolidum ſub ſumma extremarum in aggregatum planorum ex prima in ſecundam, & ſecunda in tertiam. Fiat vt A ad B; ita quadratum B ad aliud quadratum quod ſit C.

Manifeſtum eſt obſeruari integrum Canonem ſiquidem hoc poſito ſolidum rectangulum ſub quadrato C in lineam A æquabitur cubo B. Et proinde cubus B di- *14. vndec.*

uiditur per lineam A, & fit quadratum C pro quotiente Geometrico.

Dico autem lineam C fore ſummam extremarum. Demonſtratio clara eſt ex Corollario Propoſ. 9. huius; ex quo habetur eſſe vt ſumma extremarum ad mediam A ſic quadratum ſummæ extremarum ad aggregatum pla-
14. Quadec. norum ex prima in ſecundam & ſecunda in tertiam. Et conſequenter ſolidum rectangulum ſub extremis hoc eſt cubus B æquabitur ſolido rectangulo ſub medijs.

NOVÆ
CLAVIS
AD
GEOMETRIAM,

LIBER SECVNDVS.

IN QVO PLVRIMA PROPONVNTVR Problemata hactenus non ſoluta, reſoluuntùrque tùm Algebricè, tùm Canonicè, tùm etiam Geometricè, in ſerie quatuor quantitatum continuè proportionalium.

PROPOSITIO I.

Data ſumma extremarum & ſumma mediarum ex quatuor quantitatibus continuè proportionalibus diſtinguere ſingulas.

Eſto datus numerus 9 pro ſum̃a extremorum & numerus 6 pro ſumma mediorum. Ponatur autem vnus medius 1 R. Ergo alter medius erit 6-1R. Ergo ſi huius quadratum 36†1Q-12R diuidatur per 1R, fiet vnus extremus $\frac{36 \dagger 1Q - 12R}{1R}$. Simili-

ter ſi alterius medii quadratum 1 Q diuidatur per 6 - 1 R, fiet alter extremus $\frac{1\,Q}{6 - 1\,R}$. Si igitur duos extremos inuentos addas inter ſe, fiet æquatio inter confectam ſummam $\frac{216 - 108\,R + 18\,Q}{6\,R - 1\,Q}$, & datam extremorum ſummam 9. Et poſt debitam reductionem 1 Q erit æquale 6 R - 8. Et proinde 1 R, ſiue vnus mediorum quæſitorum eſt 2 vel 4.

Iam autem duobus modis potes inuenire reliquos, vel ſumendo vtrinque tertium proportionalem, numeris inuentis 2 & 4. Vel ſane quoniam duorum inuentorum productus eſt 8, diuidendo ſummam extremorum 9 in duos quorum productus ſit 8. Id autem abſoluitur per Prop. 2.11. Vnde ſinguli erunt 1.2.4.8.

Hinc Canon.

Diuide cubum ſummæ mediorum per ſummam extremorum plus triplo ſummæ mediorum; quotientemque tolle ex quadrato dimidiæ mediorum ſummæ: huius enim reſidui radix quadrata dimidiæ mediorum ſummæ addita & detracta exhibebit medios ſigillatim.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data ſumma extrematum G. Et ſumma mediarum A B. Fiat autem vt G plus tripla A B ad A B, ita quadratum A B ad aliud quadratum, quod ſit B C.



Et ponatur linea B C perpendicularis ad A B ducaturque C D parallela B A donec occurrat peripheriæ in puncto D, ex quo demittatur perpendiculariter ad diametrum D E.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes, ſiquidem cum ſit vt G plus tripla A B ad A B; ita quadratum A B ad quadratum B C, erit cubus A B æqualis ſolido rectangulo ſub quadrato B C in lineam G plus tripla A B. Et ſic cubus ſummæ mediarum A B diuiditur per ſummam extremarum G plus tripla mediarum ſumma A B, & fit quadratum B C pro quotiente Geometrico. Ducta vero D F ad centrum ſemicirculi F, erit dimidium ipſius A B: & ex quadrato D F, tollitur quadratum D E, hoc eſt C B, remanetque quadratum F E, cuius latus F E, additum & detractum dimidio ipſius A B exhibet A E & E B. *34 vndec.* *47 primi.*

Dico autem A E & E B fore medias quæſitas, nam cum quatuor lineæ quæſitæ ſint proportionales continuè, erit quadratum tertię ęquale rectangulo ſub ſecunda & quarta: & proinde rectangulum ſub ſecunda & ſumma ſecundę & quartę æquabitur quadratis mediarum. Atqui rectangulum ſub ſecunda & ſumma ſecundæ & quartę eſt ad rectangulum ſub mediis, propter eamdem ſecundæ altitudinem, vt ſumma ſecundæ & quartæ ad tertiam; hoc eſt vt ſumma primę & tertię ad ſecundam; hoc eſt vt ſumma extremarum plus ſumma mediarum ad ſummam mediarum. Ergo componendo bis, eſt vt ſumma extremarum G plus tripla mediarum ſumma A B ad ſummam mediarum A B; ita ſumma quadratorum à mediis plus duplo rectangulo ſub mediis (hoc eſt quadratum ſummæ mediarum A B) ad rectangulum ſub mediis. *17 ſexti.* *3 ſecundi.* *1. ſexti.* *12. quinti.*

Sed factum eſt vt G plus tripla A B ad A B; ita quadratum A B ad quadratum B C; igitur quadratum B C, hoc eſt E D, hoc eſt rectangulum A E B erit æquale rectangulo ſub mediis. Ergo cum A E & E B ſimul ſumptæ æquentur ſummæ mediarum A B, erunt A E & E B mediæ quæſitæ. Quod erat demonſtrandum. *4 ſecundi.* *9. quinti.* *8. ſexti.* *4 ſexti.* *17 ſexti.*

Iam autem ipſæ extremæ poſſunt multis modis inue-

niri ſigillatim; vel per Prop. 2. lib. 1. Vel duabus mediis inuentis reperiendo vtrinque tertiam proportionalem.

Corollarium.

HInc collige tria theoremata quorum primum eſt. Si fuerint quatuor quantitates continuè proportionales, erit aggregatum quadratorum à mediis ad planum ſub mediis vel extremis; ita ſumma omnium ad ſummam mediarum. Secundum: in eadem ſerie, erit vt ſumma extremarum plus triplo ſummæ mediarum ad ſummam mediarum; ita quadratum ſummæ mediarum ad planum ſub mediis vel extremis. Tertium: in eadem ſerie cubus ſummæ mediarum æqualis eſt ſolido ſub plano ex mediis vel extremis in ſummam extremarum plus triplo ſummæ mediarum. Et proinde cubus ſummæ mediarum adplicatus ſummæ extremarum plus tripla mediarum ſumma, exhibet planum ſub mediis vel extremis; adplicatus verò plano ſub mediis vel extremis, exhibet ſummam extremarum plus triplo ſummæ mediarum. Hæc omnia breuiter hic demonſtrata ſunt; eaque adnotaſſe operæ pretium erit.

PROPOSITIO II.

Hoc idem problema aliter perficere.

DAta eadem ſumma extremorum 9, & ſumma mediorum 6. Ponatur vnus extremus 1 R, erit ergo alter extremus 9 - 1 R. Igitur productus ſub extremis vel mediis eſt 9 R - 1 Q. Et quia in ſerie quatuor continuè proportionalium, ſi productus ſub mediis vel extremis ducatur in ſummam extremorum, fit ſolidus æqualis ſummæ cuborum à mediis, multiplicando 9 R - 1 Q per 9, habebis 81 R - 9 Q pro ſumma cuborum à mediis. Igitur ſi hanc ſummam tollas de cubo ſummæ medio- Lem. 31.

rum

rum 216; reſiduum 216 † 9 Q - 81 R æquabitur triplo ſo- *Lem. 18.*
lidi qui fit à ſumma mediorum in planum ſub medijs vel extremis. Quare ſi illud planum ſupra inuentum 9R - 1Q reſumas, ipſumque ducas in ſummam mediorum 6, productumque 54 R - 6 Q triplices, vt fiant 162 R - 18 Q. Erit æquatio inter 162 R - 18 Q & 216 † 9 Q - 81 R. Ergo, poſt debitam reductionem, 1 Q æquabitur 9 R - 8. Et ita 1 R, ſiue vnus extremorum erit 1 vel 8.

Iam autem duobus modis potes inuenire medios, vel ſumendo duos medios proportionales inter 1 & 8, per methodum Clauij: vel ſane quoniam productus illorum eſt 8. Oportebit diuidere ſummam mediorum 6 in duos, quorum productus ſit 8. Id autem fit per Prop. 2. l. 1.

Hinc idem Canon & eadem Effectio Geometrica, quæ in Propoſ. præcedente: niſi quod vbi diuiſa eſt illic ſumma mediarum, debet hic diuidi ſumma extremarum: vnde ſemicirculus debebit fieri ſupra ſummam extremarum G.

PROPOSITIO III.

Hoc idem problema aliter ſoluere.

ESto vt prius data ſumma extremorum 9, & ſumma mediorum 6. Ponatur 1 R pro differentia mediorum, erit igitur 6 † 1 R duplum maioris medii & 6 - 1 R duplum minoris medii. Et proinde medii erunt $\frac{6 \dagger 1 R}{2}$ & $\frac{6 - 1 R}{2}$. *Lem. 1.* Ergo ſi quadratum minoris medii diuidas per maiorem medium habebis $\frac{36 \dagger 1 Q - 12 R}{12 \dagger 2 R}$ pro minore extremo. Si verò quadratum maioris medii diuidas per minorem medium, habebis $\frac{36 \dagger 1 Q \dagger 12 R}{12 - 2 R}$ pro maiore ex-

tremo. Ergo illi duo quotientes ſimul iuncti debent æquari ſummæ extremorum, quæ data eſt 9. Quotientum autem illorum ſumma eſt $\frac{804 + 72 Q}{141 - 4 Q}$. Igitur eſt æquatio inter hanc ſummam & 9. Proindeque poſt debitam reductionem 1 Q æquabitur 4. Et ita 1 R, ſiue differentia mediorum eſt 2. Vnde ſinguli non latebunt. Siquidem ſumma mediorum plus differentia mediorum æquatur duplo maioris medii minus eadem, duplo minoris, vt ſæpius dictum eſt in lib. præced. Vnde ſinguli erunt. 1. 2. 4. 8.

Hinc Canon.

QVadratum quod fit à ſumma mediorum multiplicā per differentiam ſummarum datarum: productumque ſolidum diuide per ſummam extremorum plus triplo ſummæ mediorum, & habebis quadratum differentiæ mediorum.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data linea A pro ſumma extremarum, & linea B pro ſumma mediarum. Fiat autem vt A plus triplo B ad differentiam A & B; ſic quadratum B ad aliud quadratum quod ſit C.

Manifeſtum eſt obſeruari integrum Canonem; ſiquidem cum ſit vt A plus triplo B ad differentiam A & B; ſic quadratum B ad quadratum C; erit ſolidum rectangulum ſub quadrato C in lineam A plus triplo B, æquale ſolido rectangulo ex quadrato B in differentiam A & B: & proinde ſolidum ſub quadrato B in differentiam A & B diuiditur per lineam A plus triplo B, & fit quadratum C pro quotiente Geometrico.

Dico autem lineam C fore differentiam mediarum quæſitarum; nam cum demonſtratum ſit in Propoſ. prima huius, quadratum ſummæ mediarum B ad rectangu-

lum ſub mediis vel extremis, eſſe vt ſumma extremarum A plus triplo ſummæ mediarum B, ad ſummam B, cumque quadratum B æquetur quadrato differentiæ mediarum plus quadruplo rectangulo ſub mediis; erit diuidendo quater, vt quadratum differentiæ mediarum ad rectangulum ſub mediis vel extremis; ita A minus B ad B. Quoniam ergo eſt vt quadratum B ad rectangulum ſub mediis vel extremis; ſic A plus triplo B ad B: & vt rectangulum ſub mediis vel extremis ad quadratum differentiæ mediarum, ita ſumma mediarum B ad A minus B; erit ex æquo vt quadratum B ad quadratum differentiæ mediarum; ita A plus triplo B ad differentiam A & B. Sed factum eſt vt A plus triplo B ad differentiam A & B ſic quadratum B ad quadratum C. Ergo quadratum C erit quadratum differentiæ mediarum. Quod erat demonſtrandum.

8. ſecundi. *Coroll. Prop. 1.* *22 quinti.* *9. quinti.*

Corollarium.

Hinc collige aliquot theoremata quorum primum eſt: ſi fuerint quatuor quantitates continuè proportionales; erit vt ſumma mediarum ad differentiam ſummæ extremarum & ſummæ mediarum; ita planum ſub mediis vel extremis ad quadratum differentiæ mediarum. Secundum: in eadem ſerie, eſt vt ſumma extremarum plus triplo ſummæ mediarum ad differentiam ſummæ extremarum & ſummæ mediarum; ita quadratum ſummæ mediarum ad quadratum differentiæ mediarum. Tertium: in eadem ſerie, ſolidum ſub quadrato ſummæ mediarum in differentiam ſummæ mediarum & ſummæ extremarum, æquatur ſolido ſub quadrato differentiæ mediarum in ſummam extremarum plus triplo ſummæ mediarum. Quartum: in eadem ſerie, ſolidum ſub plano mediarum vel extremarum in differentiam ſummæ extremarum & ſummæ mediarum, æquatur ſolido ſub quadrato differentiæ mediarum in ſummam mediarum.

PROPOSITIO IV.

Hoc idem problema aliter perficere.

ESto data eadem ſumma extremorum 9 & eadem ſumma mediorum 6. Ponatur differentia extremorum 1 R. Ergo 9 † 1 R erit duplum maioris extremi & 9 - 1 R erit duplum minoris. Et proinde extremi erunt $\frac{9 \dagger 1 R}{2}$ & $\frac{9 - 1 R}{2}$. Quorum productus eſt $\frac{81 - 1 Q}{4}$. Igitur ſi illum multiplices per ſummam extremorum 9, habebis $\frac{729 - 9 Q}{4}$ pro ſumma cuborum à mediis. Ergo ſi hanc ſummam ſuſtuleris de cubo ſummæ mediorum 216; reſiduum $\frac{135 \dagger 9 Q}{4}$ æquatur triplo ſolidi qui fit ex producto ſub mediis vel extremis in ſummam mediorum. Quare ſi reſumas productum ſub extremis vel mediis ſupra inuentum $\frac{81 - 1 Q}{4}$ ipſumque ducas in ſummam mediorum 6, productumque $\frac{486 - 6 Q}{4}$ triplices, vt fiant $\frac{1458 - 18 Q}{4}$; erit æquatio inter illa duo $\frac{1458 - 18 Q}{4}$ & $\frac{135 \dagger 9 Q}{4}$. Igitur quoniam illæ duæ fractiones habentes eumdem denominatorem ſunt æquales; erunt numeratores 1458 - 18 Q & 135 † 9 Q inter ſe æquales. Et proinde 1 Q æquatur 49. Et 1 R, ſiue differentia extremorum erit 7. Singulique vt ſupra 1. 2. 4. 8.

Lem. 1.

Lem. 31.

Lem. 28.

Hinc Canon.

QVadratum quod fit à ſumma extremorum plus duplo ſummæ mediorum multiplica per differentiam ſummæ extremorum & ſummæ mediorum: productumque ſolidum diuide per ſummam extremorum plus tri-

plo ſummę mediorum & habebis quadratum differentiæ extremorum.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data linea A pro ſumma extremarum & linea B pro ſumma mediarum. Fiat vt A plus triplo B ad differentiam A & B ; ita quadratum compoſitæ ex A & dupla B ad aliud quadratum quod ſit C.

Manifeſtum eſt obſeruari integrum Canonem, ſiquidem cum ſit A plus triplo B ad differentiam A & B vt quadratum compoſitæ ex A & dupla B ad quadratum C ; erit ſolidum rectangulum ſub quadrato C in A plus 34 vndecimi triplo B, æquale ſolido rectangulo ſub quadrato compoſitæ ex A & dupla B in differentiam A & B. Et proinde ſolidum rectangulum ſub quadrato compoſitæ ex A & dupla B in differentiam A & B, diuiditur per lineam A plus triplo B, & fit quadratum C pro quotiente Geometrico.

Dico autem lineam C fore differentiam extremarum. quia enim eſt vt maior extrema ad mediam maiorem ; ita maior media ad mediam minorem ; erit diuidendo, vt differentia primæ & ſecundæ ad ſecundam ; ita differentia ſecundæ & tertiæ ad tertiam. Et permutando, vt differentia primæ & ſecundæ ad differentiam ſecundæ & tertię ; ita ſecunda ad tertiam & proinde differentiæ linearum quæſitarum ſunt in eadem cum lineis quæſitis proportione. Ergo vt prima ſecunda & tertia ad ſecundam ; ita differentiæ ſingularum linearum ſimul ſumptæ ad differentiam mediarum. Differentiæ autem ſingularum linearum quæſitarum ſimul ſumptæ æquantur differentiæ extremarum : ergo vt differentia extremarum ad differentiam mediarum ; ita aggregatum primæ, ſecundæ, & tertiæ lineæ ad ſecundam ; hoc eſt, aggregatum ſecundę, tertę, & quartæ ad tertiam ; hoc 12. quinti. eſt ſumma extremarum A plus duplo ſummæ media-

rum B ad ſummam mediarum B. Et permutando, vt differentia extremarum ad lineam A plus dupla B, ita differentia mediarum ad B. Ergo illarum quadrata erunt
20. ſexti. quoque proportionalia. Et inuertendo, vt quadratum compoſitæ ex A & dupla B ad quadratum differentię extremarum, ſic quadratum ſummæ mediarum ad quadratum differentiæ mediarum.

Sed iam demonſtratum eſt eſſe vt quadratum ſummæ mediarum B ad quadratum differentiæ mediarum, ita
3 huius. ſummam A plus triplo B ad differentiam A & B; ergo erit vt ſumma A plus triplo B ad differentiam A & B; ita quadratum compoſitæ ex A & dupla B ad quadratum differentiæ extremarum: ſed factum eſt in praxi, vt A plus triplo B ad differentiam A & B; ita quadratum compoſitæ ex A & dupla B ad quadratum C; igitur quadratum
9. quinti. C, erit quadratum differentiæ extremarum, & proinde linea C. Erit differentia extremarum. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

Hinc collige aliquot theoremata. Primum; ſi fuerint quatuor (imò quotcumque) quantitates continuè proportionales, differentiæ ſingularum erunt inter ſe in continua & eadem cum propoſitis quantitatibus ratione. Secundum; in eadem ſerie quatuor quantitatum erit vt differentia extremarum ad differentiam mediarum; ita ſumma extremarum plus duplo ſummæ mediarum ad ſummam mediarum. Tertium: in eadem ſerie, erit vt quadratum compoſitæ ex ſumma extremarum & duplo ſummæ mediarum ad quadratum differentiæ extremarum; ſic ſumma extremarum plus triplo ſummæ mediarum ad differentiam ſummę mediarum & ſummæ extremarum. Quæ omnia adnotaſſe operæ pretium erit.

PROPOSITIO V.

Hoc idem problema alio modo perficere.

DAta eadem ſumma extremorum 9, & ſumma eadem mediorum 6. Ponatur 1 R pro aggregato primi & ſecundi. Ergo, quoniam ſumma omnium quatuor eſt 15, erit aggregatum tertii & quarti 15 - 1 R. Et quia in ſerie quatuor proportionalium, eſt vt aggregatum primi & ſecundi ad ſummam mediorum; ita ſumma mediorum ad aggregatum tertii & quarti; erit vt 1 R ad 6; ita 6 ad 15 - 1 R. Ergo productus ſub extremis 15 - 1 Q æquabitur quadrato medii 36. Et proinde 1 Q eſt æquale 15 R - 36. Vnde 1 R ſiue aggregatum primi & ſecundi eſt 3 vel 12.

Quoniam ergo aggregatum primi & ſecundi eſt 3 & ſumma ſecundi & tertii 6. Ponatur 1 R pro ſecundo. Igitur primus erit 3 - 1 R. Et tertius 6 - 1 R. Ergo eſt vt 3 - 1 R ad 1 R; ita 1 R ad 6 - 1 R. Et propterea quadratum medii 1 Q æquatur producto ſub extremis 18 - 9 R † 1 Q. Igitur 9 R æquantur 18. Et fit 1 R, ſiue ſecundus 2. Ergo ſinguli ſunt. 1.2.4.8.

Potuit ſimiliter ſumi 12 pro aggregato primi & ſecundi; ponique 1 R pro ſecundo igitur primus erit 12 - 1 R. Et tertius 6 - 1 R. Ergo quadratum medii 1 Q æquabitur producto ſub primo in tertium 72 - 18 R † 1 Q. Et fit 1 R 4. Singulique 8.4.2.1.

Hinc Canon.

AGgregatum ex duabus ſummis datis, diuide in duos numeros quorum medius proportionalis, ſit minor duorum datorum. Tum ex illis tribus, fiat vt ſumma duorum collaterialium ad extremos; ita minor ſumma data ad alios, & habebis medios ſigillatim.

Hinc Effectio Geometrica.

ESto data linea A B pro ſumma extremarum & B C pro ſumma mediarum. Diuidatur tota A C in duas quarum media proportionalis ſit B C. Id autem abſoluitur per Propoſ. 2. lib. 1. Supponamus ergo punctum diuiſionis in D, eſſeque vt A D ad B C; ſic B C ad D C. Tum fiat vt B C plus D C ad D C, ita B C ad B E. Vel vt B C plus A D ad A D, ita B C ad E C.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis partes.



Demonstratio Resolutiva

Dico autem B E & E C fore medias quæſitas nam cum ex quatuor lineis proportionalibus ſit vt prima ad ſecundam, ita ſecunda ad tertiam, erit componendo vt prima & ſecunda ad ſecundam, ita ſecunda & tertia ad tertiam. Et permutando, vt prima & ſecunda ad ſecundam & tertiam, ita ſecunda ad tertiam. Similiterque probabitur fore vt ſecunda ad tertiam ſic ſumma ſecundæ & tertiæ ad ſummam tertiæ & quartæ, igitur cum ſit vt A D ad ſummam ſecundæ & tertiæ B C, ita ſumma ſecundæ & tertiæ B C ad D C. Erit A D ſumma primæ & ſecundæ, & D C ſumma tertiæ & quartæ. Iam autem cum ſit vt B C plus D C ad D C, ita B C ad B E, erit diuidendo vt B C ad D C, ita C E ad E B. Probatum autem iam eſt debere eſſe vt ſumma ſecundæ & tertiæ B C ad ſummam tertiæ & quartæ D C ita ſecunda ad tertiam. Igitur cum C E & E B æquentur aggregato ſecundæ & tertię, erunt C E & E B medię ſigillatim. Quod erat demonſtrandum.

PRO-

PROPOSITIO VI.

Hoc idem problema alio modo ſoluere.

Esto data eadem ſumma extremorum 9. Et eadem ſumma mediorum 6. Ponatur 1 R pro differentia mediorum, & quia ex Coroll. Prop. 4. huius in ſerie quatuor proportionalium, eſt vt ſumma mediorum ad ſummam extremorum plus dupla mediorum ſumma, ſic differentia mediorum ad differentiam extremorum, ſi fiat vt ſumma mediorum 6, ad ſummam extremorum plus duplo ſummæ mediorum 21, ita differentia mediorum 1 R ad aliud, fiet quotiens $\frac{21\,R}{6}$ pro differentia extremorum. Quoniam autem in ſerie quatuor proportionalium ſimpliciter, quadratum ſummæ extremorum plus quadrato differentiæ mediorum, æquatur quadrato ſummę mediorum plus quadrato differentiæ extremorum, ſequitur 81 † 1 Q æquari 36 † $\frac{441\,Q}{36}$. Et proinde 1620 ęquabuntur 405 Q. Igitur 1 Q eſt 4. Et fit 1 R ſiue differentia mediorum 2. Singulique vt ſuprà. 1. 2. 4. 8.

Hinc Canon.

Qvadratum ſummæ mediorum tolle de quadrato ſummæ extremorum, reſiduum multiplica per quadratum ſummæ mediorum: productumque plano-planum, diuide per quadratum ſummæ omnium plus duplo plani ſub ſumma omnium in ſummam mediorum: & habebis quadratum differentiæ mediorum.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data linea A B pro ſumma extremarum & A C pro ſumma mediarum. Supra A B fiat ſemicirculus,

in quo inſcribatur A C & nectatur C B. Tum producatur C B donec C E poſſit quadratum compoſitæ ex A B & A C plus duplo rectanguli ſub illa eadem compoſita & A C. Fiatque vt E C ad C A; ita B C ad C D.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis partes nam ex quadrato A B tollitur quadratum A C, & reſtat quadratum B C. Quoniam verò eſt vt E C ad C A; ita B C ad C D; erunt etiam earum quadrata proportionalia. Ergo idem eſt ac ſi plano-planum ſub quadrato C A in quadratum B C, diuideretur per quadratum E C, & fit quadratum C D.

47. primi.



22. ſexti.

Dico autem lineam C D fore differentiam mediarum. Sit enim ſi fieri poteſt illa mediarum differentia maior vel minor C D & æqualis C F. Igitur quadratum C F plus quadrato C B æquatur quadrato differentiæ extremarum quia quadratum differentiæ extremarum æquale eſt differentiæ quadratorum ſummæ ab extremis, & ſummæ à mediis plus quadrato differentiæ mediarum vt oſtendetur in appendice ſequenti. Sed quadratum C F & quadratum C B æquantur quadrato B F; igitur B F eſt differentia extremarum.

47. primi.

Similiter quadratum E A æquatur quadratis E C, C A ergo quadratum E A eſt æquale quadratis ſummæ omnium & ſummæ mediarum plus duplo rectangulo ſub ſumma omnium in ſummam mediarum, & propterea linea E A æqualis erit ſummæ extremarum plus dupla mediarum ſumma. Ergo erit vt E A ad A C; ita B F ad F C. Et proinde earum quadrata erunt quoque proportionalia. Igitur diuidendo, erit vt quadratum E C ad quadratum C A; ita quadratum B C ad quadratum C F. Igitur vt E C ad C A; ita B C ad C F. Sed

4. ſecundi. *Corol. Prop. 4. huius.* *22. ſexti.* *22. ſexti.*

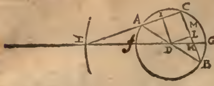
factum eſt in praxi vt E C ad C A; ita B C ad C D, ergo C F & C D erunt æquales pars toti vel totum parti. *9. quinti.* Quod eſt abſurdum. Cum ergo differentia mediarum nec poſſit eſſe maior nec minor C D, erit illi æqualis, Quod erat demonſtrandum.

Appendix.

SI fuerint quatuor quantitates proportionales, quadratum ſummæ extremarum plus quadrato differentiæ mediarum; itemque quadratum ſummæ mediarum plus quadrato differentiæ extremarum æquabitur aggregato quadratorum à ſingulis. Nam quadratum ſummæ extremarum æquatur quadratis extremarum plus duplo rectanguli ſub mediis vel extremis; ſed duplum rectanguli ſub mediis plus quadrato differentię mediarum æquatur quadratis mediarum. *4. ſecundi. 16. ſexti.* Ergo quadratum ſummæ extremarum plus quadrato differentiæ mediarum æquale eſt quadratis extremarum & quadratis mediarum. Idem eodem modo oſtendetur de quadrato ſummæ mediarum plus quadrato differentiæ extremarum. Inde autem colligitur quadratum ſummæ extremarum tanto interuallo quadratum ſummæ mediarum ſuperare, quanto quadratum differentię extremarum ſuperat quadratum differentiæ mediarum. Et proinde quadratum differentiæ mediarum iunctum cum interuallo quadratorum ſummæ ab extremis & ſummę à mediis æquatur quadrato differentiæ extremarum.

Atque hinc patet qua arte Vieta ſoluerit iſtud problema in pſeudomeſolabo. Iubet enim ſupra datam ſummam extremarum A B confici circulum cuius centrum D, in quo ex puncto B inſcribatur ſumma mediarum B C, connexamque C A produci. Tum centro D interuallo C B plus B D fieri arcum ſecantem productam C A in puncto E. Et quod [illegible] E D per centrum ſecet peripheriam in punctis F. G. & C B in H. His poſitis de-

terminatur F H, H C, H B, H G fore quatuor continuè proportionales. Ratio clara eſt, nam ducta D I perpendiculariter ad C A & D L perpendiculariter ad C B erunt duo triangula E I D & D L H ęquiangula, & proinde proportionalia, ergo vt E I ad I D; ita D L ad L H.



22. ſexti. Igitur vt quadratum E I ad quadratum I D ita quadratum D L ad quadratum L H. Tria autem priora quadrata ſunt quadrantes trium prædictorum quadratorum in propoſitione ſignatorum per lineas E C, C A, C B, ergo ſicut in illa propoſitione quadratum C D eſt quadratum differentiæ mediarum; ita hic quartum quadratum L H eſt quadrans quadrati differentiæ mediarum, ſumpta enim C M æquali H B, erit M H differentia mediarum; cumque M H dupla ſit L H, erit quadratum H L quadrans quadrati differentiæ mediarum, & proin-
4. ſecundi. de H L erit dimidia differentia mediarum ex quatuor continuè proportionalibus. Quod erat oſtendendum.

Potuit poni 1 R pro differentia extremorum & vtendo iiſdem theorematibus, quibus vſi ſumus in operatione Algebrica peruenire ad æquationem, vnde nouus Canon, & noua Effectio Geometrica orirentur.

[illegible] hac figura [illegible] ſubquadruplum eſt [illegible] compoſitum [illegible] = CA quater + AC [illegible] hoc eſt + AB [illegible] = [illegible] ergo [illegible] quater + [illegible] BC vel [illegible] ergo [illegible] quater = [illegible] in antecedenti figura q.e.d.

PROPOSITIO VII.

Data differentia extremarum & differentia mediarum ex quatuor quantitatibus continuè proportionalibus, inuenire ſingulas.

ESto datus numerus 26 pro differentia extremorum & 6 pro differentia mediorum. Ponaturque medius minor 1 R. Ergo medius maior, erit 1 R + 6 huius quadratum 1 Q + 36 + 12 R ſi diuidatur per 1 R, fiet $\frac{1Q + 36 + 12R}{1R}$ pro maiore extremo. Si verò minoris medii quadratum 1 Q, diuidatur per maiorem medium, fiet minor extemus $\frac{1Q}{1R + 6}$. Qui ſi tollatur à maiori extremo iam inuento, habebis $\frac{18Q + 216 + 108R}{1Q + 6R}$ pro interuallo extremorum. Et proinde erit æquatio inter $\frac{18Q + 216 + 108R}{1Q + 6R}$ & datam extremorum differentiam 26. Igitur 1 Q æquatur 27 - 6 R. Fitque 1 R, ſiue minor medius 3. Vnde ſinguli erunt 1. 3. 9. 27.

Si verò poſita fuiſſet 1 R pro maiore medio, inueniſſes 1 Q æquale 27 + 6 R. Vnde 1 R ſiue maior medius foret 9.

Hinc Canon.

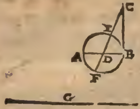
DIuide cubum differentiæ mediorum per id quo differentia extremorum ſuperat triplum differentiæ mediorum: quotientem adde quadrato quod fit à dimidia mediorum differentia: huius enim ſummæ radix quata aucta & multata dimidio differentię mediorum, exhibet medios ſigillatim.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data extremarum differentia G, & differentia mediarum A B. Fiat autem vt G multata triplo A B ad A B, ita quadratum A B ad aliud quadratum quod ſit B C, & ponatur linea B C perpendicularis ad A B. Tum ſupra A B fiat circulus cuius centrum D, connexaque & producta C D ſecet peripheriam in punctis E & F.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes, ſiquidem cum ſit vt G multata triplo A B ad A B. ita quadratum A B ad quadratum B C, erit ſolidum rectangulum ſub quadrato B C in lineam G multatam triplo A B æquale cubo A B, ergo cubus A B diuiditur per G multatam triplo A B & fit quadratum B C pro quotiente Geometrico. Quadratum autem B C additur quadrato B D, & fit quadratum D C, cuius latus D C auctum & multatum dimidio ipſius A B exhibet F C & E C.

34. Vndec.



47. primi.

Dico autem F C & E C fore medias quæſitas ſigillatim: nam vt iam demonſtratum eſt, ſumma extremarum plus duplo ſummæ mediarum ad ſummam mediarum eſt vt differentia extremarum G ad differentiam mediarum A B; & componendo, vt ſumma extremarum plus triplo ſummę mediarum ad ſummam mediarum, ita G plus A B ad A B. Eſt autem vt ſumma extremarum plus tripla mediarum ſumma ad ſummam mediarum, ſic quadratum ſummæ mediarum: ad rectangulum ſub mediis vel extremis: ergo vt quadratum ſummæ mediarum ad rectangulum ſub mediis vel extremis, ita G plus A B ad A B. Atqui quadratum ſummæ

Corol. prop. 4. huius.

Corol. prop. 3. huius.

mediarum æquatur quadrato differentiæ mediarum A B *8. ſecundi.* plus quadruplo rectangulo ſub mediis vel extremis; igitur vt G plus A B ad A B; ita quadratum differentiæ mediarum A B plus quadruplo rectangulo ſub mediis vel extremis ad illud idem rectangulum ſub mediis vel extremis. Et diuidendo quater, vt G multata triplo A B ad A B; ita quadratum A B ad rectangulum ſub mediis vel extremis.

Sed factum eſt vt G multata triplo A B ad A B; ita quadratum A B ad quadratum B C. Ergo quadratum *9. quinti.* B C eſt æquale rectangulo ſub mediis vel extremis. Atqui linea B C eſt perpendicularis ad extremitatem *16. tertii.* diametri & proinde tangens. Et ita quadratum B C æ- *36 tertii.* quatur rectangulo F C E. Ergo rectangulum F C E eſt æquale rectangulo ſub mediis vel extremis. Igitur cum F C, E C differant per F E hoc eſt A B differentiam me- *1 prop: l. 1. huius.* diarum, erunt F C, E C mediæ ſigillatim. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

HInc collige aliquot theoremata. Primum: ſi fuerint quatuor quantitates continuè proportionales, erit vt differentia extremarum plus differentia mediarum ad differentiam mediarum; ſic quadratum ſummæ mediarum ad planum ſub mediis vel extremis. Secundum: in eadem ſerie erit vt ſumma extremarum ad ſummam mediarum; ita quadratum differentiæ mediarum plus plano ſub mediis vel extremis ad illud idem planum. Tertium in eadem ſerie, erit vt differentia extremarum minus tripla mediarum differentia, ad differentiam mediarum; ſic quadratum differentiæ mediarum ad planum ſub mediis vel extremis. Quartum quod inde oritur, cubus differentiæ mediarum æquabitur ſolido ſub plano mediarum vel extremarum in differentiam extremarum multatam tripla mediarum differentia. Et proinde cubus

differentiæ mediarum adplicatus differentiæ extremarum multatæ tripla mediarum differentia, exhibet planum ſub mediis vel extremis: adplicatus verò plano ſub mediis vel extremis exhibet differentiam extremarum multatam tripla mediarum differentia. Hæc omnia breuiter hic ſunt demonſtrata, eaque adnotaſſe operæ pretium erit.

PROPOSITIO VIII.

Hoc idem problema alio modo perficere.

DAta eadem differentia extremorum 26, & differentia mediorum 6. Ponatur minor extremus 1 R. Erit ergo maior extremus 1 R † 26. Horum productus eſt 1 Q † 26 R. Et quoniam in ſerie quatuor continuè proportionalium productus ſub mediis vel extremis
Lem. 32. multiplicatus in differentiam extremorum, facit differentiam cuborum à mediis; ſi multiplices 1 Q † 26 R per 26, productus 26 Q † 676 R erit differentia cubo-
Lem 19. rum à mediis. Igitur ſi de hac differentia tollas cubum datæ differentiæ mediorum, reſiduum 26 Q † 676 R - 216 æquabitur triplo ſolidi quod fit ex producto ſub mediis vel extremis in differentiam mediorum. Quare ſi illum productum 1 Q † 26 R reſumas, & ducas in differentiam mediorum 6, vt fiant 6 Q † 156 R, atque hunc productum triplices vt habeantur 18 Q † 468 R, erit çquatio inter 18 Q † 468 R & 26 Q † 676 R - 216. Ergo poſt debitam reductionem 1 Q erit æquale 27 - 26 R. Et ita 1 R ſiue minor extremus eſt 1, ſingulique vt ſupra 1. 3. 9. 27.

Si fuiſſet poſita 1 R pro maiori extremo, inuenta foret æquatio inter 1 Q & 27 † 26 R valorque 1 R foret 27.

Hinc idem Canon & eadem Effectio Geometrica quæ in pręcedente propoſitione, niſiquod vbi diuiſa eſt, illic

illic differentia mediarum, hic debet diuidi differentia extremarum; vnde circulus debebit fieri ſupra differentiam extremarum G.

PROPOSITIO IX.

Idem problema alia ratione ſoluere.

SIt data eadem differentia extremorum 25, & eadem differentia mediorum 6. Ponaturque 1 R pro ſumma mediorum. Erit ergo 1 R + 6 duplum maioris medii, & 1 R - 6 duplum minoris medii. Et proinde medii erunt $\frac{1R + 6}{2}$ & $\frac{1R - 6}{2}$. Igitur ſi quadratum minoris medii diuidatur per maiorem medium, fiet quotiens $\frac{1Q + 36 - 12R}{2R + 12}$ pro minore extremo. Si autem quadratum maioris medii diuidatur per minorem medium, fiet quotiens $\frac{1Q + 36 + 12R}{2R - 12}$ pro maiore extremo, ex quo ſi tollatur minor extremus, reſtabunt $\frac{18Q + 216}{1Q - 36}$ æqualia differentiæ extremorum datæ 26. Et poſt debitam reductionem erit 1 Q æquale 144. Et 1 R ſiue ſumma mediorum 12.

Hinc Canon.

QVadratum quod fit à differentia mediorum multiplica per ſummam differentiarũ datarum; productumque ſolidum diuide per differentiam extremorum multatam triplo differentiæ mediorum: & habebis quadratum ſummæ mediorum.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data differentia extremarum A, & differentia mediarum B. Fiat autem vt A minus triplo B, ad ſum-

mam A & B; ita quadratum B ad aliud quadratum, quod ſit C.

34 vndec. Manifeſtum eſt obſeruari integrum Canonem: nam hinc ſequitur ſolidum rectangulum ſub quadrato C in lineam A multatam tripla B fore æquale ſolido rectangulo ex quadrato B in ſummam linearum A & B & proinde ſolidum rectangulum ſub quadrato B in ſummam linearum A & B diuiditur per lineam A multatam tripla B, & fit quadratum C pro quotiente Geometrico.

Dico autem lineam C fore ſummam mediarum.
6 Prop huius. Nam vt demonſtratum eſt, A multata triplo B ad B eſt vt quadratum differentiæ mediarum ad rectangulum ſub mediis vel extremis. Ergo componendo quater, erit vt ſumma differentiarum ab extremis & à mediis ad differentiam mediarum, ita quadratum ſummæ mediarum ad rectangulum ſub mediis vel extremis; & ſumptis conſequentium quadruplis, erit vt quadratum ſummæ
8 ſecundi. mediarum (hoc eſt vt quadratum differentiæ mediarum plus quadruplo ſub mediis vel extremis rectangulo) ad quadruplum rectangulum ſub mediis vel extremis; ſic A & B ad quadruplam B. Ergo per conuerſionem rationis, vt quadratum ſummæ mediarum ad quadratum differentiæ mediarum; ita A & B ad A multatam tripla B. Et inuertendo vt A multata triplo B ad A & B; ita quadratum B ad quadratum ſummæ mediarum. Sed factum eſt in praxi vt A multata triplo B ad A & B; ita quadratum B ad quadratum C. Ergo
9. quinti. quadratum C eſt quadratum ſummæ mediarum. Igitur linea C erit ſumma mediarum. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

SI fuerint quatuor quantitates continuè proportionales, erit vt ſumma differentiarum ab extremis & à mediis ad differentiam extremarum multatam tripla

mediarum differentia ; ſic ſumma extremarum plus tripla ſumma mediarum ad differentiam ſummæ extremarum & ſummæ mediarum : ſiquidem illæ duæ proportiones in præcedentibus propoſitionibus, oſtenſæ ſunt æquales vni & eidem, ſcilicet proportioni quadrati ſummæ mediarum ad quadratum differentiæ mediarum.

PROPOSITIO X.

Hoc idem problema aliter ſoluere.

ESto data eadem differentia extremorum 26. Et mediorum 6. Ponatur ſumma extremorum 1 R. Ergo 1 R † 26 erit duplum maioris extremi, & 1 R - 26 Lem. 1.
duplum minoris extremi. Et proinde extremi erunt $\frac{1 R + 26}{2}$ & $\frac{1 R - 26}{2}$. Horum productus eſt $\frac{1 Q - 676}{4}$ quo multiplicato per differentiam extremorum 26, habebis Lem. 32.
$\frac{26 Q - 17576}{4}$ pro differentia cuborum à mediis. Igitur ſi de hac differentia tollas cubum differentiæ mediorum 216 ; reſiduum $\frac{26 Q - 18440}{4}$ æquabitur triplo ſolidi quod Lem. 27.
fit ex producto ſub mediis vel extremis in differentiam mediorum. Quare ſi reſumas productum ſub mediis vel extremis $\frac{1 Q - 676}{4}$ illumque multiplices per 6, productumque $\frac{6 Q - 4056}{4}$ triplices vt habeantur $\frac{18 Q - 12168}{4}$ erit æquatio inter $\frac{18 Q - 12168}{4}$ & $\frac{26 Q - 18440}{4}$. Et quia illæ duæ fractiones ſunt æquales & habent eundem denominatorem, erunt eorum numeratores 26 Q - 18440 & 18 Q 12168 inter ſe æquales. Ergo poſt debitam reductionem 1 Q æquabitur 784. Eritque 1 R, ſiue ſumma extremorum 28. Et proinde ſinguli ſunt 1. 3. 9. 27

Hinc Canon.

QVadratum quod fit à differentia extremorum multata duplo differentiæ mediorum, multiplica per ſummam differentiarum datarum; productumque ſolidum diuide per differentiam extremorum multatam tripla mediorum differentia, & habebis quadratum ſummæ extremorum.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data differentia extremarum A, & differentia mediarum B. Fiat autem vt A minus triplo B ad A & B; ita quadratum lineæ A multatæ duplo B ad aliud quadratum quod ſit C.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis partes; ſiquidem hinc ſequitur ſolidum rectangulum ſub quadrato C in lineam A multatam triplo B fore æquale ſolido rectangulo ſub quadrato lineæ A multatæ duplo B in ſummam A & B. Et proinde ſolidum rectangulum ſub quadrato lineæ A multatæ duplo B in ſummam A & B, diuiditur per lineam A multatam triplo B, & fit quadratum C. *34. vndec.*

Dico autem lineam C fore ſummam extremarum de quatuor quæſitis: nam cum probatum ſit, eſſe vt ſumma extremarum plus duplo ſummæ mediarum ad ſummam mediarum, ita differentiam extremarum ad differentiam mediarum, erit diuidendo bis, vt ſumma extremarum ad ſummam mediarum; ita differentia extremarum multata duplo differentiæ mediarum ad differentiam mediarum. Ergo permutando, vt ſumma extremarum ad differentiam extremarum multatam duplo differentiæ mediarum, ita ſumma mediarum ad differentiam mediarum. Igitur earum quadrata erunt quoque proportionalia. *4. Prop. huius.* *22 ſexti. 9. huius.*

Atqui oſtenſum eſt vt quadratum ſummæ mediarum

ad quadratum differentiæ mediarum B; ita eſſe differentiam A plus B ad differentiam A multatam tripla B. Ergo inuertendo, erit vt A multata triplo B ad A & B; ita quadratum lineæ A multatæ duplo B ad quadratum ſummæ extremarum. Sed factum eſt in praxi vt A minus triplo B ad A & B; ita quadratum lineæ A multatæ duplo B ad quadratum C. Ergo quadratum C eſt quadratum ſummæ extremarum & linea C ſumma extremarum. Quod erat demonſtrandum. 9. quinti.

Corollarium.

SI fuerint quatuor quantitates continuè proportionales, erit vt ſumma extremarum plus triplo ſummæ mediarum ad differentiam ſummæ extremarum & ſummę mediarum; ita quadratum ſummę extremarum ad quadratum differentiæ extremarum multatæ duplo differentiæ mediarum. Iſtę enim duę proportiones oſtenſæ ſunt ęquales vni & eidem; nimirum proportioni quadrati ſummæ mediarum ad quadratum differentiæ mediarum.

PROPOSITIO XI.

Hoc idem problema aliter ſoluere.

DAta eadem differentia extremorum 26, & differentia mediorum 6. Ponatur differentia primi & ſecundi 1 R. Et quia in ſerie quatuor proportionalium continuè; ſingulæ differentiæ ſunt etiam in continua proportione; & inſuper differentia extremarum ſingulis differentiis æquatur. Si ex differentia extremorum 26 tollatur differentia mediorum 6; reſiduum 20 æquabitur differentiis primi à ſecundo, & tertii à quarto. Igitur quoniam poſita eſt 1 R pro differentia primi & ſecundi, erit 20 - 1 R differentia tertii & quarti. Ergo Lem. 11. Lem. 1.

productus ex 20 - 1 R in 1 R, nempe 20 R - 1 Q æquatur quadrato differentiæ mediorum 36. Et ita 1 Q eſt æquale 20 R - 36. Ergo 1 R, ſiue differentia primi & ſecundi erit 2 vel 18.

Lem. 6.

Ponatur ergo 1 R pro minore medio. Ergo 1 R † 6 erit maior medius & 1 R - 2 minor extremus. Et proinde productus ſub 1 R † 6 & 1 R - 2, nempe 1 Q † 4 R - 12 æquatur 1 Q. Igitur 4 R æquantur 12. Et ita 1 R ſiue minor medius eſt 3. Proindeque ſinguli erunt 1. 3. 9. 27.

Hinc Canon.

INteruallum datarum differentiarum diuide in duos numeros quorum minor datus ſit medio loco proportionalis; tum fiat vt differentia duorum collateralium ex tribus inuentis ad extremos; ita minor datus ad alios, & habebis medios ſigillatim.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data differentia extremarum A B, & A C differentia mediarum. Diuidatur C B in puncto D taliter vt ſit C D ad A C; ſicut A C ad D B: id autem abſoluitur per Prop. 2. lib. 1. Tum ſumpta C E æquali C D, fiat vt A E ad E C; ita A C ad C F.



Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis partes.

4. Prop. 5. huius.

Dico autem A F & F C fore medias quæſitas, nam vt demonſtratum eſt, differentiæ quatuor linearum continuè proportionalium ſunt in eadem cum illis proportione ergo cum differentia extremarum A B æquetur ſingulis, tollendo differentiam mediarum A C, erit C B æqualis differentiis primæ à ſecunda & tertiæ a quarta

Igitur cum C D, A C, & D B ſunt continuè proportionales, erunt differentiæ primæ à ſecunda & tertiæ à quarta æquales C D & D F. Sed E C eſt æqualis C D, eſt autem vt A E ad E C; ita A C ad C F. Ergo componendo, vt A C ad E C; ita A F ad C F. Igitur cum A F & C F, ſint in eadem cum differentiis ratione, cumque habeant pro ſua differentia, A C differentiam mediarum, erunt A F & C F mediæ quæſitæ. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XII.

Idem problema aliter efficere.

DAta ſit eadem differentia extremorum 26; & differentia mediorum 6. Ponatur ſumma mediorum 1 R. Et quoniam ex Corol. Prop. 4. huius, in ſerie quatuor proportionalium, eſt vt differentia mediorum ad differentiam extremorum; ita ſumma mediorum ad ſummam extremorum plus dupla mediorum ſumma; ſi fiat vt 6 ad 26; ita 1 R ad aliud, habebis $\frac{13\,R}{3}$ pro ſumma extremorum plus duplo ſummæ mediorum. Ergo ſi ex $\frac{13\,R}{3}$ tollas 2 R, reſtabunt $\frac{7\,R}{3}$ pro ſumma extremorum. Igitur quadratum ſummæ extremorum plus quadrato differentiæ mediorum æquabitur quadrato ſummæ mediorum plus quadrato differentiæ extremorum: & ita $\frac{49\,Q}{9}$ † 36 æquantur 1 Q † 676. Igitur 1 Q eſt æquale 144, & fit 1 R, ſiue ſumma mediorum 12. Et proinde ſinguli erunt vt ſupra. 1. 3. 9. 27.

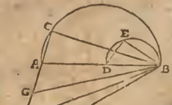
Hinc Canon.

EX differentia extremorum tolle duplam mediorum differentiam; & ex reſidui quadrato tolle quadratum

differentiæ mediorum: reſiduo vtere ad diuidendum plano-planum, qui fit ex quadrato differentiæ mediorum in interuallum quadrati differentiæ mediorum & quadrati differentiæ extremorum, habebiſque quadratum ſummæ mediorum.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data differentia extremarum A B, & differentia mediarum A C. Supra A B fiat ſemicirculus in quo inſcribatur A C. Tum ſumpta A D dupla ipſius A C, deſcribatur ſupra D B minor ſemicirculus, in quo inſcribatur D E æqualis A C. Connexiſque B C & B E, fiat vt B E ad E D; ita B C ad C F.



Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes; ſiquidem ex differentia A B tollitur duplum ipſius A C, & relinquitur D B.

47. *primi.* Ex cuius quadrato tollitur quadratum D E hoc eſt A C, & reſtat quadratum B E. Quoniam vero fit vt B E ad E D; ita B C ad C F, erunt etiam earum quadrata pro-

22. *ſexti.* portionalia. Igitur idem fit ac ſi plano-planum ſub quadrato D E in quadratum B C diuideretur per quadratum B E, & exhibetur quadratum C F.

Dico autem lineam C F eſſe ſummam mediatum, ſit enim, ſi fieri poteſt, ſumma mediarum maior aut minor

Append. Prop. 6. huius. C F & æqualis C G. Ergo quadratum C G plus quadrato differentię extremarum A B æquatur quadratis ſingularum.

47. *primi.* Eſt autem quadratum A B æquale quadratis A C & C B; igitur quadrata C G, A C, C B ęqualia

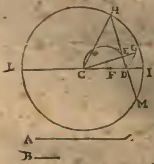
Append. Propoſ. 6. huius. ſunt quadratis ſingularum; ſed quadrata ſingularum ſunt etiam æqualia quadratis differentiæ mediarum & ſummæ

ſummę extremarum : igitur dempto quadrato differentiæ mediarum A C, remanent quadrata C G & C B ęqualia quadrato ſummę extremarum ; ſed æquantur quadrato G B ergo G B eſt ſumma extremarum. Igitur vt differentia extremarum A B ad differentiam mediarum A C. 47 primi. sic G B plus dupla G C ad G C. Et diuidendo bis vt B D Corol Prop. 4 huius. ad A C, hoc eſt D E, ita G B ad G C.

Ergo earum quadrata erunt quoque proportionalia. 22. ſexti. Et diuidendo, vt quadratum B E ad quadratum B E; ita quadratum B C ad quadratum C G. Ergo illorum quadratorum latera erunt etiam proportionalia ; eritque vt B E ad D E ; ita B C ad C G. Sed factum eſt in praxi vt B F ad D E, ita B C ad C F. Igitur eſt vt B C ad C G, ita B C ad C F. Et proinde C G & C F erunt 9. quinti. æquales pars toti vel totum parti. Quod eſt abſurdum. Ergo ſumma mediarum non poteſt eſſe maior vel minor C F. Igitur erit illi æqualis. Quod erat demonſtrandum.

Appendix.

ATque hinc patet qua arte vſus ſit Franciſcus Vieta ad ſolutionem iſtius problematis in Propoſ. 18. pſeudomeſolabi. Sit enim A differentia extremarum & B differentia mediarum. Supra C D æqualem dimidiæ A fiat ſemicirculus in quo inſcribatur D E æqualis dimidiæ B. Et connexa C E producatur. Tum ex C D tollatur C F dupla D E ſumaturque D G æqualis D F (quod fieri poterit, ſiquidem oſtenſum



eſt ſupra differentiam extremarum ſuperare triplam mediarum differentiam) tùm ducta C H parallela D G occurrat productæ D E in puncto H. Et tandem centro

C interuallo C H deſcribatur circulus integer ſecans C D productam in punctis I. L. Et D E productam in puncto M. Dico quatuor lineas quæſitas continue proportionales, fore L D, D H, D M, D I.

Demonſtratio huius clara eſt ex praxi noſtra: nam quod illic factum eſt ſupra totas differentias, hic fit ſupra dimidia illarum; ſiquidem ex quadrato dimidiæ differentiæ extremarum C D, tollitur quadratum dimidiæ differentiæ D E. Item, ex dimidia extremarum differentia, tollitur dupla dimidia mediarum differentia D E. Item ex reſiduæ F D hoc eſt D G quadrato tollitur quadratum dimidiæ differentiæ mediarum D E & remanet quadratum G E. Item propter æquianguleitatem triangulorum D E G & C E H. Fit vt G E ad D E; ita C E ad E H. In quibus omnibus nemo non videt obſeruari diſtrictè ſingulas Canonis noſtri partes, & fieri E H dimidiam mediarum ſummam; eſt enim eadem ratio totius ad totum, quæ dimidii ad dimidium.

Potuit aliter quoque procedi in operatione Algebrica, ponendo 1 R pro ſumma extremorum numerorum, ex qua poſitione nouus Canon, & noua Effectio Geometrica orirentur. Sed hæc indicaſſe ſatis erit.

PROPOSITIO XIII.

Data ſumma quadratorum à ſingulis, ex quatuor quantitatibus continue proportionalibus, & aggregato planorum ex prima in ſecundam, & ex tertia in quartam inuenire ſingulas.

Esto datus numerus 85 pro ſumma quadratorum à ſingulis, & 34 pro aggregato planorum ex primo in ſecundum, & tertio in quartum. Tollatur 34 & 85, & remanebit 51. Et quia in ſerie quatuor continuè propor-

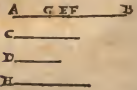
tionalium ſumma quadratorum à ſingulis ad aggregatum planorum ex primo in ſecundum & tertio in quartum; eſt vt ſumma omnium ad ſummam mediorum, erit diuidendo, vt 51 ad 34; ita ſumma extremorum ad ſummam mediorum. Si ergo vtaris 51, tamquam ſumma extremorum & 34, tamquam ſumma mediorum, & per ſex priores Propoſitiones huius, quæras quatuor proportionales, inuenies illos eſſe $\frac{17}{3}$. $\frac{34}{3}$. $\frac{68}{3}$. $\frac{136}{3}$. Poſito ergo minori numero ex quatuor quæſitis $\frac{17\ R}{3}$, erit ſecundus $\frac{34\ R}{3}$, & tertius $\frac{68\ R}{3}$ & quartus $\frac{136\ R}{3}$. Ergo illorum quadrata ſimul ſumpta debent æquari aggregato quadratorum dato 85. Quadratum autem primi eſt $\frac{289\ Q}{9}$, ſecundi $\frac{1156\ Q}{9}$, tertii $\frac{4614\ Q}{9}$, & quarti $\frac{18496\ Q}{9}$. Horum quadratorum ſumma eſt $\frac{24596\ Q}{9}$. Quæ proinde debet eſſe æqualis 85. Igitur 1 Q eſt æquale $\frac{9}{286}$, & fit 1 R $\frac{3}{17}$. Et quia primus poſitus eſt $\frac{17\ R}{3}$. Erit primus quæſitus 1 & reliqui 2. 4. 8.

Hinc Canon.

Tolle minorem numerum datum de maiore: deinde tùm reſiduo, tùm minore vtere tamquam ſumma extremorum & ſumma mediorum ad inueniendum quatuor numeros continuè proportionales. Illis inuentis, ſume quadrata eaque in vnam ſummam collige, & fac vt illud aggregatum quadratorum ad ſingula quadrata; ita aggregatum quadratorum datum ad aliud, & habebis ſingulorum numerorum quadrata, proindeque ipſorum radices non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data linea A B potens quadrata quatuor linearum continuè proportionalium. Data quoque ſit linea C potens ſummam rectangulorum ex prima in ſecundam, & tertia in quartam. Illis duabus ſumatur tertia proportionalis D, cui æquales abſcindatur A E. Tum vtere reſiduo E B & A E, tamquam ſumma extremarum & ſumma mediarum, ad inueniendum quatuor lineas continuè proportionales, quæ ſint B F maior extrema, F E minor extrema, A G media maior, G E media minor. Deinde quadrata illarum continuè proportionalium B F, A G, G E, E F, collige in vnum, poſſitque illa quatuor linea H. Poſtea fiat vt H ad ſingulas quatuor; ita A B, ad quatuor alias.



Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes, ſiquidem cum tres illæ
17 ſexti. A B, C, D, ſint continuè proportionales, erit quadratum mediæ C æquale rectangulo ex A B in D, hoc eſt rectangulo B A E. Quo
2. ſecundi. ſublato de quadrato A B, relinquitur rectangulum A E E; rectangulum autem A B E ad rectangulum B A E eſt propter eamdem altitudinem vt B E ad A E. Reliqua
1. ſexti. plana ſunt.

Dico autem quatuor illas alias poſtremò inuentas fore proportionales quæſitas. Nam in ſerie quatuor continuè
17. ſexti. proportionalium, cum quadratum ſecundæ æquale ſit rectangulo ſub prima in tertiam, erit propter eamdem
1. ſexti. altitudinem, vt rectangulum ſub prima in ſecundam ad quadrata primæ & ſecundæ, ſic ſecunda ad primam & tertiam ſimul: pariter cum quadratum tertiæ ſit æquale
17. ſexti. rectangulo ex ſecunda in quartam, erit propter eamdem

altitudinem, vt rectangulum ſub tertia in quartam ad quadrata tertię & quartę; ita tertia ad ſecundam & quartam ſimul. Ergo componendo antecedentia & conſequentia, eſt vt ſumma rectangulorum ex prima in ſecundam, & tertia in quartam ad ſummam quadratorum a ſingulis; ſic ſumma mediarum ad ſummam omnium. Ergo erit vt A E ad A B, ita ſumma rectanguli G E F additi cum rectangulo ex B F in A G, ad quadrata B F, A G, G E, E F, ſimul ſumpta. *ſexti.* *11. quinti.*

Sed aliæ quatuor inuentæ ſunt in eadem cum iſtis proportione vt patet ex praxi, & inſuper illorũ quadrata æquantur quadrato A B & rectangula ex prima in ſecundam & tertia in quartam quadrato C. Quia erit vt ſumma omnium ad ſummam mediarum, ita quadratum A B ad quadratum C. Igitur data ſumma quadratorum à ſingulis & ſumma rectangulorum ex prima in ſecundam & tertia in quartam, inuentæ ſunt quatuor proportionales. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

SI fuerint quatuor quantitates continuè proportionales, erit vt ſumma quadratorum à ſingulis ad ſummam planorum ex prima in ſecundam & tertia in quartam, ita ſumma omnium ad ſummam mediarum vel quadrata mediarum ad planum ſub mediis vel extremis; vel differentia extremarum multata differentia mediarum ad differentiam mediarum; vel ſumma primæ & tertiæ ad ſecundam; vel ſumma ſecundæ & quartæ ad tertiam: illæ enim omnes proportiones ſunt ſupra oſtenſæ æquales. Item in eadem ſerie, eſt vt ſumma quadratorum ab extremis ad ſummam planorum primæ & ſecundæ, itemque tertiæ & quartæ multatam plano ſub mediis vel extremis, ita ſumma omnium ad ſummam mediarum vel quadrata mediarum ad planum ſub mediis vel extremis &c. vt ſupra. Nam ex præced. theor.

eſt vt ſumma quadratorum à ſingulis ad ſummam planorum ex prima in ſecundam & tertia in quartam; ita quadrata mediarum ad planum ſub mediis vel extremis, ergo cum ſit vt totum, nempe ſumma quadratorum à ſingulis, ad totum nempe ſummam planorum ex prima in ſecundam & tertia in quartam, ita ablatum, nempe quadrata mediarum, ad ablatum nempe planum ſub mediis vel extremis, erit & reliquum ad reliquum nempe quadrata extremarum ad ſummam planorum primæ & ſecundæ, itemque tertiæ & quartæ mul-
19 quinti. tatam plano ſub mediis vel extremis vt totum ad totum, quod iam eſt oſtenſum eſſe, vt ſumma omnium ad ſummam mediarum: igitur vt ſumma omnium ad ſummam mediarum, ita aggregatum quadratorum ab extremis ad aggregatum planorum primæ & ſecundæ, itemque tertiæ & quartæ, multatum plano ſub mediis vel extremis. Quod adnotaſſe diligenter, operæ pretium erit.

Appendix.

HInc poteſt ſolui illud problema eadem omnino arte qua præcedens: data ſumma quadratorum ab extremis, ex quatuor quantitatibus continuè proportionalibus, & aggregato planorum ex prima in ſecundam & tertia in quartam minus plano ſub mediis vel extremis, inuenire ſingulas.

PROPOSITIO XIV.

Data ſumma quatuor quantitatum continuè proportionalium, & aggregato quadratorum à ſingulis, diſtinguere ſingulas.

ESto datus numerus 15 pro ſumma quatuor numerorum continuè proportionalium. Et 85 pro aggrega-

to quadratorum à ſingulis. Ponatur ſumma mediorum 1 R. Igitur ſumma extremorum erit 15 - 1 R. Et quia in ſerie quatuor proportionalium, ſi ex quadrato ſummæ omnium auferatur aggregatum quadratorum à ſingulis, & ex reſidui dimidio tollatur quadratum ſummæ mediorum; hoc vltimum reſiduum (quod eſt ſumma productorum ex primo in ſecundum & ex tertio in quartum) eſt ad aggregatum quadratorum à ſingulis; vt ſumma mediorum ad ſummam omnium; fit, vt ſi tollas quadrata à ſingulis 85 de quadrato ſummæ omnium 225, & ex dimidio reſidui 70, ſubtrahas 1 Q, quod eſt quadratum ſummæ mediorum; hoc vltimum reſiduum 70 - 1 Q eſt ad quadrata ſingulorum 85, ſicut ſumma mediorum 1 R ad ſummam omnium 15. Ergo productus ſub extremis 1050 - 15 Q æquatur producto ſub mediis 85 R. *Lem.* 12. *Lem.* 6

Et proinde 1 Q eſt æquale $70 - \frac{85\,R}{15}$. Igitur 1 R ſiue ſumma mediorum eſt *6*.

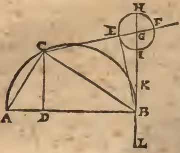
Iam autem inuenta ſumma mediorum *6*, tollatur de ſumma omnium *15*, & habebis ſummam extremorum *9*. Data autem ſumma extremorum *9*, & ſumma mediorum *6*, multis modis diſtinguuntur ſinguli numeri ex ſex prioribus propoſitionibus huius.

Hinc Canon.

Tolle aggregatum quadratorum à ſingulis de quadrato ſummæ omnium, & reſiduum ſerua. Tum diuide idem aggregatum quadratorum à ſingulis per ſummam omnium, & quotientis ſume dimidium, cuius quadratum adde dimidio reſidui ſupra ſeruati: huius enim ſummæ radix quadrata ſupradicto multata quotientis dimidio exhibet ſummam mediorum. Vnde nec extremorum ſumma, nec ſinguli latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data A B ſumma quatuor linearum continuè proportionalium, & linea A C poſſit quadrata ſingularum quatuor. Supra A B fiat ſemicirculus in quo inſcribatur A C, & demiſſa perpendiculari C D, nectatur C B. Tùm ſupra baſim C B fiat triangulum C E B rectangulum & iſoſceles, productoque latere C E, donec E F ſit æqualis A D, & diuiſa E F bifariam in G, centro G, interuallo G E, deſcribatur circulus, connexaque B G & producta ſecet circuli peripheriam in punctis H & I.



Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici
47. primi pattes, ſiquidem tollitur quadratum A C de quadrato A B, & remanet quadratum C B; cum autem triangulum C E B ſit rectangulum, erit quadratum C B æquale quadratis C E, B E, cumque ſit iſoſceles, erunt latera C E, B E, æqualia, & proinde quadratum C B erit du-
11. tertij. plum quadrati C E aut B E. Deinde cum C D ſit per-
8 ſexti. pendicularis & angulus in ſemicirculo A C B rectus,
4. ſexti. erunt triangula A C B & C A D æquiangula, & proinde proportionalia ſunt illorum latera. Igitur vt A B ad A C, ita A C ad A D. Ergo quadratum A C equatur rectan-
17. ſexti. gulo B A D. Et propterea quadratum A C diuiditur per ſummam omnium A B & fit A D, hoc eſt E F pro quotiente Geometrico. Huius dimidium eſt E G, cuius quadratum additur cum dimidio quadrati C B, hoc
47 primi. eſt cum quadrato B E, & fit quadratum B G, cuius latus B G multatum G I, exhibet I B.

Dico autem lineam I B fore ſummam mediarum ex

quatuor

quatuor quæſitis. Sit enim ſumma mediarum, ſi fieri poteſt, minor I B, & æqualis I K, ergo erit vt ſumma omnium A B ad ſummam mediarum I K, ſic propter eamdem altitudinem I H, rectangulum ſub A B & I H ad rectangulum K I H. Sed I H æqualis eſt A D, eſt autem rectangulum B A D æquale quadrato A C, quod æquatur quadratis ſingularum Ergo rectangulum ſub A B & I H, eſt æquale aggregato quadratorum à ſingulis; igitur vt ſumma omnium A B ad ſummam mediarum I K, ſic ſumma quadratorum à ſingulis quæ eſt æqualis rectangulo ſub A B & I H, ad rectangulum K I H. Sed eſt vt ſumma omnium A B ad ſummam mediarum I K; ita ſumma quadratorum à ſingulis hoc eſt rectangulum ſub A B, I H, ad aggregatum rectangulorum ſub prima in ſecundam, & tertia in quartam. Igitur vt rectangulum ſub A B, I H, ad rectangulum K I H; ſic rectangulum ſub A B, I H, ad aggregatum rectangulorum ex prima in ſecundam & tertia in quartam. Et proinde rectangulum K I H æquatur aggregato rectangulorum ex prima in ſecundam & tertia in quartam.

1. ſexti. *13. huius.* *9 quinti.*

Sed quadratum ſummæ omnium A B æquatur quadratis aggregati primæ & ſecundæ, & aggregati tertiæ & quartæ, & inſuper duplo rectanguli ſub aggregato primæ & ſecundæ in aggregatum tertiæ & quartæ. Quadratum autem aggregati primæ & ſecundæ eſt æquale quadratis primæ & ſecundæ & duplo rectanguli ſub prima in ſecundam, ſicut quadratum aggregati tertiæ & quartæ æquale eſt quadratis tertiæ & quartæ & duplo rectanguli ſub tertia in quartam; ergo quadratum ſummæ omnium A B æquatur quadratis ſingularum plus duplo rectangulorum ex prima in ſecundam & tertia in quartam plus duplo rectanguli ſub aggregato primæ & ſecundæ in aggregatum tertiæ & quartæ; hoc verò poſtremum rectangulum eſt æquale quadrato ſummæ mediarum, quia cum ſint quatuor proportionales, erit vt

4. ſecundi. *4. ſecundi.*

prima ad ſecundam ; ita ſecunda ad tertiam & componendo permutandoque, vt prima & ſecunda ad ſummam mediarum ; ita ſecunda ad tertiam. Similiterque probabitur fore vt ſecunda ad tertiam ; ita ſumma mediarum ad ſummam tertiæ & quartæ. Igitur vt ſumma primę & ſecundę ad ſummam mediarum ; ita ſumma mediarum ad ſummam tertiæ & quartæ ; & proinde quadratum ſummæ mediarum eſt æquale rectangulo ſub ſumma primæ & ſecundæ in ſummam tertiæ & quartæ.

17. ſexti.

Ergo quadratum ſummæ omnium A B ęquatur quadratis ſingularum plus duplo quadrato ſummæ mediarum plus duplo rectangulorum ex prima in ſecundam & tertia in quartam. Ergo rectangulum K I H plus quadrato ſummæ mediarum I K æquatur dimidio reſidui, quod relinquitur poſt ſubſtractionem quadratorum à ſingulis de quadrato ſummæ omnium, ſed iam probatum eſt dimidium illius reſidui eſſe quadratum B E. Igitur quadratum B E eſt æquale rectangulo K I H plus quadrato I H, hoc eſt rectangulo H K I. Eſt autem linea B E perpendicularis ad extremitatem diametri E F. Ergo tangens. Ergo quadratum B E ęquatur rectangulo H B I. Igitur rectangulum H B I, æquale eſt rectangulo H K I, totum parti. Quod eſt abſurdum. Et proinde ſumma mediarum non poteſt eſſe minor B I.

3. ſecundi. *16 tertij.* *36. tertii.*

Sed neque maior, ſit enim : ſi fieri poteſt æqualis I L. Ergo vt ſumma omnium A B ad ſummam mediarum I L ; ita propter eamdem altitudinem I H, rectangulum ſub A B, I H ad rectangulum L I H. Ergo cum iam ſit probatum rectangulum A B, I H æquari quadratis ſingularum, cumque ſit vt ſumma omnium ad ſummam mediarum ; ita quadrata ſingularum ad aggregatum rectangulorum ex prima in ſecundam, & tertia in quartam, erit rectangulum L I H ęquale aggregato rectangulorum ex prima in ſecundam & tertia in quartam. Et

1. ſexti. *ij. huius.* *9. quinti.*

proinde ſi coniungatur cum quadrato ſummæ mediarum, fiet rectangulum H L I æquale dimidio eius quod relinquitur poſt ſubtractionem quadratorum à ſingulis de quadrato ſummæ omnium. Et proinde rectangulum H L I æquatur quadrato B E. Quadratum autem B E eſt æquale rectangulo H B I. Ergo rectangulum H B I æquatur rectangulo H L I, pars toti. Quod eſt abſurdum. Igitur ſumma mediarum non poteſt eſſe maior I B. Cum ergo ſumma mediarum nec poſſit eſſe minor nec maior I B, erit illi æqualis. Quod erat demonſtrandum. *3. ſecundi.* *16. tertii.* *36. tertii.*

Corollarium.

SI fuerint quatuor quantitates continuè proportionales, & à quadrato ſummæ omnium, ſublata fuerint quadrata ſingularum; reſidui dimidium multatum quadrato ſummæ mediarum, ita ſe habet ad aggregatum quadratorum à ſingulis, ſicut ſumma mediarum ad ſummam omnium. Sequitur tum ex præſenti diſcurſu, tùm ex Coroll. Propoſ. 13. huius.

PROPOSITIO XV.

Hoc idem problema aliter ſoluere.

ESto datus idem numerus 15 pro ſumma numerorum, & 85 pro aggregato quadratorum. Ponatur ſumma mediorum 1 R. Ergo ſumma extremorum erit 15 − 1 R. Horum quadrata ſunt 1 Q & 225 † 1 Q − 30 R, quæ ſimul addita faciunt ſummam 225 † 2 Q − 30 R à qua ſi tollas aggregatum quadratorum à ſingulis 85, reſiduum 140 † 2 Q − 30 R æquabitur quadruplo producti ſub mediis vel extremis. Igitur $\frac{140 \dagger 2 Q - 30 R}{4}$ erit productus ſub mediis vel extremis. Et quia, vt dictum eſt in Propoſ. 1. huius, cubus ſummę mediorum *Lem. 3.*

diuiſus per ſummam extremorum plus tripla mediorum ſumma, exhibet productum ſub mediis vel extremis ſi diuidas 1 C per 15 † 2 R, fiet productus ſub mediis vel extremis $\frac{1\,C}{15 \dagger 2\,R}$. Igitur erit æquatio inter $\frac{1\,C}{15 \dagger 2\,R}$ & $\frac{140 \dagger 2\,Q - 30\,R}{4}$. Ergo 4 C, æquabuntur 2100 - 170 R † 4 C - 30 Q. Et poſt debitam reductionem 1 Q erit ęquale $70 - \frac{85\,R}{15}$. Fitque 1 R, ſiue ſumma mediorum, 6. Singulique 1. 2. 4. 8.

Hinc idem oritur Canon & eadem Effectio Geometrica quę in præcedente Propoſitione.

PROPOSITIO XVI.

Hoc idem problema alio modo ſoluere.

DAto eadem numero 15 pro ſumma numerorum, & 85 pro aggregato quadratorum, ponatur 1 R pro ſumma mediorum. Ergo vt in præcedenti erit ſumma extremorum 15 - 1 R. Et productus ſub mediis vel extremis $\frac{140 \dagger 2\,Q - 30\,R}{4}$. Cuius duplum 70 † 1 Q - 15 R ſi tollatur à quadrato ſummę mediorum 1 Q, reſtabit
Lem. 3. 15 R - 70 pro aggregato quadratorum à mediis. Quoniam autem demonſtratum eſt in Propoſ. 1. huius, eſſe ſummam mediorum ad ſummam omnium; ſicut productus ſub mediis vel extremis ad aggregatum quadratorum à mediis, erit vt 1 R ad 15; ita $\frac{70 \dagger 1\,Q - 15\,R}{2}$ ad 15 R - 70. Ergo productus ſub 15 Q - 70 R æquabitur
Lem. 6. producto ſub mediis $\frac{1050 \dagger 15\,Q - 225\,R}{2}$. Et poſt debitam reductionem, 1 Q æquale erit $70 - \frac{85\,R}{15}$. Et ita 1 R, ſiue ſumma mediorum eſt 6. Singulique vt ſupra 1. 2. 4. 8.

Hinc idem exurgit Canon, eademque Effectio Geometrica.

PROPOSITIO XVII.

Hoc idem problema aliter perficere.

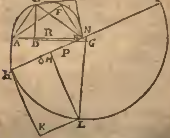
Esto datus idem numerus 15 pro ſumma numerorum & 85 pro aggregato quadratorum. Ponatur 1 R pro ſumma extremorum ; igitur ſumma mediorum erit 15 - 1 R. Ergo ſi vt prius in Propoſ. 14. huius, ex quadrato ſummæ omnium 225 tollas quadrata ſingulorum 85 & ex reſidui dimidio 70 auferas quadratum ſummæ mediorum 225 † 1 Q - 30 R, reſiduum 30 R - 1 Q - 155 ad quadrata ſingulorum 85, erit vt ſumma mediorum 15 - 1 R ad 1 R. Igitur productus ſub extremis 450 R - 15 Q - 2325 æquatur producto ſub medijs *Lem. 6.* 1275 - 85 R. Et proinde 1 Q eſt æquale $\frac{535\,R}{15}$ - 240. Et fit 1 R, ſiue ſumma extremorum 9. Quæ ſi tollatur à ſumma omnium 15, habebis ſummam mediorum 6. Data autem ſumma extremorum & ſumma mediorum, multis modis diſtinguuntur ſinguli ex ſex prioribus Propoſ. huius.

Hinc Canon.

Ex quadrato ſummæ omnium, tolle quadrata ſingulorum : reſidui dimidium tolle ex quadrato ſummę omnium. Atque hoc relictum adde cum quadratis ſingulorum, & ſummam ſerua. Tùm aggregatum ex duplo quadrato ſummæ omnium & quadratis ſingulorum diuide per ſummam omnium ; quotientis cape dimidium ex cuius dimidii quadrato tolle ſummam ſuprà ſeruatam : iſtius enim reſidui radix quadrata ſupradicto quotientis detracta dimidio exhibet ſummam extremorum ; vnde nec mediorum ſumma, nec ſinguli latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data linea A B pro ſumma quatuor linearum continuè proportionalium, & A C poſſit illarum earumdem quatuor quadrata. Supra A B fiat ſemicirculus, in quo inſcribatur A C, & nectatur C B demittaturque C D perpendicularis ad A B. Tum ſupra C B fiat triangulum rectangulum & iſoſceles C E B, & in prædicto ſemicirculo inſcribatur B F æqualis C E vel B E, connexaque F A, accipiatur C G æqualis F A, & nectatur A G. Tum ponatur A H perpendicularis ad A B & potens dimidium quadratum A C, ductaque H B; fiat vt dimidia A B ad H B, ita H B ad H I. Deinde ſupra H I deſcribatur ſemicirculus, poſitaque H K perpendiculari ad H I, & æquali A G, ducatur K L parallela ipſi H I, donec occurrat peripheriæ in puncto L, ex quo ducatur L M perpendiculariter ad H I.



Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes; ſiquidem ex quadrato ſummæ omnium A B, tolluntur quadrata ſingularum æqualia quadrato A C, & relinquitur quadratum C B, quoniam vero triangulum C B E eſt rectangulum quadratum C B, eſt æquale quadratis C E, B E, & quia eſt iſoſceles quadratum alterutrius lateris, æquale erit dimidio quadrati CB. Cum ergo B F æqualis ſit B E vel C E, reſidui quadrati C B, dimidium, nempe quadratum B F tollitur de quadrato ſummæ omnium A B, & relinquitur quadratum F A hoc eſt C G: quoniam ergo angulus A C G rectus eſt, quadratum C G additur cum quadratis ſingularum æqualibus quadrato A C, & fit quadratum A G. Quia

47. primi.

autem A H poteſt dimidium quadratum A C, ſitque vt dimidia A B ad H B; ita H B ad H I diuiditur quadratum H B (quod eſt æquale dimidio quadratorum à ſingulis, plus quadrato ſummæ omnium) per dimidiam A B, & fit idem ac ſi diuideretur aggregatum quadrati A C & dupli quadrati A B per totam A B, ſiquidem eadem eſt ratio totius ad totum, quæ dimidii ad dimidium; fitque vtrobique linea H I pro quotiente Geometrico. diuiſa autem H I bifariam in N, ducta N L erit æqualis dimidiæ H I: ex quadrato autem N L tollitur quadratum M L, hoc eſt K H, hoc eſt A G, & relinquitur quadratum M N, cuius latus M N detractum ex dimidia H I, exhibet H M.

Dico autem H M fore ſummam extremarum de quatuor proportionalibus quæſitis. Sit enim, ſi fieri poteſt ſumma extremarum minor H M & æqualis H O. Quoniam ergo eſt vt A R ad H B; ita H B ad H I; rectangulum ſub A R & H I æquabitur quadrato H B *17 ſexti.* quadratum autem H B eſt æquale quadratis A B, A H. *47. primi.* Et quadratum A B æquatur quadruplo quadrato A R *4 ſecundi.* quadratum vero A H, (quod eſt dimidium quadrati A C, hoc eſt rectanguli B A D) eſt æquale rectangulo *8. ſexti.* R A D. Ergo quadratum H B æquatur rectangulo ſub *4 ſexti. 17. ſexti.* A R in duplam A B plus A D. Igitur rectangulum ſub *1. ſecundi.* A R in H I æquatur rectangulo ſub A R in duplam A B plus A D. Et proinde H I æqualis eſt duplæ A B plus A D.

Igitur cum H O ponatur ſumma extremarum, erit O I compoſita ex ſumma extremarum, dupla mediarum ſumma, & inſuper linea A D. Ergo rectangulum H O I erit çquale quadrato ſummæ extremarum, duplo re- *1. ſecundi.* ctangulo ſub ſumma extremarum in ſummam mediarum, & inſuper rectangulo ſub ſumma extremarum in A D. Quadratum autem ſummæ extremarum æqua- *4 ſecundi.* tur quadratis extremarum & duplo rectanguli ſub mediis vel extremis, rectangulum verò ſub ſumma extre- *1. ſecundi*

17. *ſexti.* marum in ſummam mediarum eſt æquale quadratis ſecundæ & quartæ plus rectangulis ex prima in ſecundam & tertia in quartam, & rectangulum ſub ſumma extremarum in A D æquatur quadratis ſingularum multatis ſumma rectangulorum ex prima in ſecundam & tertia in quartam: quia rectangulum B A D vt iam probatum eſt, æquatur quadrato A C, rectangulum vero ſub ſumma mediarum in A D, vt dictum eſt in Prop. 14. huius eſt æquale rectangulis ex prima in ſecundam & tertia in quartam. Ergo rectangulum H O I æquatur duplis quadratis ſingularum plus quadrato ſummæ mediarum plus rectangulis ex prima in ſecundam, & tertia
4 *ſecundi.* in quartam.

Atqui ex Propoſ. 14. huius quadratum ſummę omnium A B æquatur quadratis ſingularum & duplo quadrato mediarum ſummæ, plus duplo rectangulorum ex prima in ſecundam, & tertia in quartam. Ergo cum qua-
47. *primi.* dratum A B ęquetur quadratis A C & C B, cumque quadratum C B duplum ſit quadrati C E vel B E, erit quadratum B E vel C E vel B F æquale quadrato ſummæ mediarum plus rectangulis ex prima in ſecundam, & tertia in quartam. Igitur cum quadratum A B æquetur quadratis A F & F B, erit quadratum A F hoc eſt C G ęquale quadratis ſingularum, plus quadrato ſummæ mediarum, plus ſumma rectangulorum ex prima in ſecundam, & tertia in quartam. Ergo cum quadratum A G hoc eſt H K, hoc eſt L M, ęquetur quadratis A C &
8. *ſexti.* C G, erit quadratum L M, hoc eſt, rectangulum
4. *ſexti.* H M I æquale duplo quadratorum à ſingulis, plus
17. *ſexti.* quadrato ſummæ mediarum plus rectangulis ex prima in ſecundam, & tertia in quartam. Ergo cum iis omnibus ęquetur rectangulum H O I, erit rectangulum H M I æquale rectangulo H O I. Quod eſt abſurdum, & contra quintam ſecundi. Et proinde ſumma extremarum non poteſt eſſe minor H M.

Sed neque maior, ſi enim poneretur ęqualis H P,

proba-

probaretur, vt ſuprà rectangulum H P I æquari duplo quadratorum à ſingulis, plus quadrato ſummæ mediarum, plus rectangulis ex prima in ſecundam, & tertia in quartam. Igitur rectangulum H P I æquaretur rectangulo H M I. Quod eſt abſurdum, & contra quintam ſecundi. Cum ergo ſumma extremarum nec poſſit eſſe minor nec maior H M, erit illi æqualis. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XVIII.

Hoc idem problema alio modo perficere.

DAtis iiſdem 15 & 85. Ponatur 1 R pro ſumma extremorum. Ergo 15 - 1 R erit ſumma mediorum. Horum quadrata ſimul iuncta faciunt 225 † 2 Q - 30 R. ex qua, ſi tollatur aggregatum quadratorum à ſingulis 85, & reſiduum diuidatur per 4, fit quotiens *Lem. 3.* $\frac{140 \dagger 2 Q - 30 R}{4}$ æqualis producto ſub mediis vel extremis. Et quia, cubus ſummæ mediorum diuiſus per ſummam *Corollar. 1. huius.* extremorum plus tripla mediorum ſumma exhibet eumdem productum; cape cubum ſummæ mediorum 15 - 1 R; qui cubus eſt 3375 675 R - 1 C † 45 Q. Eumque diuide per 45 - 2 R & habebis pro quotiente $\frac{3375 - 676 R - 1 C \dagger 45 Q}{45 - 2 R}$. Proindeque hic quotiens æquabitur producto ſub extremis vel mediis ſupra inuento $\frac{140 \dagger 2 Q - 30 R}{4}$. Igitur 6300 - 1630 R - 4 C † 150 Q æquabuntur 13500 - 2700 R - 4 C † 180 Q. Et poſt debitam reductionem 1 Q erit æquale $\frac{107 R}{3}$ - 240. Ergo 1 R fit 9. Proindeque ſinguli vt ſuprà inuenientur 1.2.4.8.

Hinc idem Canon & Effectio Geometrica, quæ in Propoſ. præcedenti.

PROPOSITIO XIX.

Hoc idem problema aliter ſoluere.

DAtis iiſdem 15 & 85. Ponatur 1 R pro ſumma extremorum. Ergo 15 - 1 R erit ſumma mediorum. Igitur vt in præcedenti inuenietur productus mediis vel extremis $\frac{140 \dagger 2 Q - 30 R}{4}$, cuius duplum 70 † 1 Q - 15 R, ſi tollatur à quadrato ſummæ mediorum 225 † 1 Q - 30 R. Reſiduum 155 - 15 R æquabitur aggregato quadratorum à mediis. Ergo ex Corol. Prop. 1. huius, erit vt aggregatum quadratorum à mediis 155 - 15 R ad productum ſub mediis vel extremis $\frac{70 \dagger 1 Q - 15 R}{2}$; ita ſumma omnium 15 ad ſummam mediorum 15 - 1 R. Igitur productus ſub extremis 2325 - 380 R † 15 Q æquabitur producto ſub mediis $\frac{1050 \dagger 15 Q - 225 R}{2}$. Et proinde 1050 † 15 Q - 225 R æquantur 4650 - 760 R † 30 Q. & poſt debitam reductionem, 1 Q erit æquale $\frac{535 R}{15}$ - 240. Et fit 1 R, ſiue ſumma extremorum 9. Singulique vt ſupra. 1. 2. 4. 8.

Hinc idem Canon & eadem Effectio Geometrica quæ in Propoſitione 17. huius.

PROPOSITIO XX.

Data ſumma quatuor quantitatum continuè proportionalium, & aggregato quadratorum à mediis, diſtinguere ſingulas.

ESto datus numerus 40 pro ſumma numerorum & 90 pro aggregato quadratorum à mediis. Ponatur

1 R pro ſumma mediorum eius quadratum eſt 1 Q. à quo ſi tollas aggregatum quadratorum à mediis 90. Reſiduum $1Q - 90$ æquabitur duplo producti ſub mediis vel extremis. Et proinde ille productus erit $\frac{1Q - 90}{2}$. Sed cubus ſummæ mediorum diuiſus per ſummam extremorum plus tripla mediorum ſumma, exhibet eumdem productum ſub mediis vel extremis, igitur erit æquatio inter $\frac{1Q - 90}{2}$ & $\frac{1C}{40 + 2R}$. Ergo 2 C æquabuntur $40Q - 3600 + 2C - 180R$. Et proinde 1 Q eſt æquale $\frac{180R}{40} + 90$. Et fit 1 R, ſiue ſumma mediorum 12. Ergo ſumma extremorum erit 28. Et ſinguli 1. 3. 9. 27. Per alteram è ſex prioribus propoſitionibus huius. *Corollar. 1. huius.*

Hinc Canon.

SVmmam quadratorum à mediis diuide per ſummam omnium: huius quotientis quadrato adde quadrata mediorum, & habebis aggregatum, cuius radix quadrata ſupradicto addita quotienti exhibet ſummam mediorum. Vnde nec extremorum ſumma nec ſinguli latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data linea A B pro ſumma quatuor linearum continuè proportionalium. Sit verò A C potens quadrata mediarum. Ponantur illæ ad angulos rectos, tùm duabus A B, A C, inueniatur tertia proportionalis A D. Et centro D, interuallo D C, fiat ſemicirculus ſecans A B productam in punctis E & F.



Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici

17. *ſexti.* partes, cum enim tres illę A B, A C, A D, ſint continuè proportionales rectangulum B A D æquabitur quadrato A C. Igitur quadratum A C, quod eſt æquale quadratis mediarum, diuiditur per ſummam omnium A B, & fit linea A D pro quotiente Geometrico: cuius
47. *primi.* quadrato additur quadratum A C, & fit quadratum D C cuius latus D C, hoc eſt D F, additum D A, exhibet A F.

Dico autem lineam A F fore ſummam mediarum; ſit enim, ſi fieri poteſt, ſumma mediarum minor A F & æqualis A G, ergo ſumpta A D pro communi altitudine, erit rectangulum B A D ad rectangulum G A D,
1. *ſexti.* vt ſumma omnium A B ad ſummam mediarum G A; ſed quoniam illæ tres A B, A C, A D, ſunt continue
17. *ſexti.* proportionales, erit quadratum A C æquale rectangulo B A D. Igitur vt quadratum A C ad rectangulum G A D; ita ſumma omnium A B ad ſummam mediarum
Corol prop. 1. huius. A G. Sed vt ſumma omnium A B ad ſummam mediarum A G; ita quadrata mediarum æqualia quadrato A C ad rectangulum ſub mediis vel extremis; ergo vt quadratum A C ad rectangulum G A D; ita quadratum A C ad rectangulum ſub mediis vel extremis. Et proinde
9. *quinti.* rectangulum G A D æquabitur rectangulo ſub mediis vel extremis.

Igitur duplum rectangulum G A D cum quadrato
4. *ſecundi.* A C æquali quadratis mediarum, eſt æquale quadrato
3. *ſecundi.* ſummæ mediarum A G. Sed rectangulum G A D æquatur quadrato A D plus rectangulo G D A. Qua-
47. *primi.* dratum autem D C ęquale eſt quadratis A D, A C, ergo quadratum A G æquale erit quadrato A D plus quadrato D C, hoc eſt D F, plus duplo rectangulo A D G.
4. *ſecundi.* Sed idem quadratum A G ęquatur quadratis partium A D, D G, plus duplo rectanguli A D G. Igitur demptis iis quæ ſunt communia, reſtabit quadratum D G æquale quadrato D F pars toti. Quod eſt abſurdum. Ergo ſumma mediarum non poterit eſſe minor A F,

Sed neque maior, ſit enim, ſi fieri poteſt, æqualis A H, pari modo probaretur quadratum D H fore æquale quadrato D F. Totum parti. Quod eſt abſurdum. Cum igitur ſumma mediarum nec poſſit eſſe minor, nec maior D F, erit illi ęqualis. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXI.

Hoc idem problema aliter ſoluere.

DAtis iiſdem ſummis 40 & 90. Ponatur 1 R pro ſumma mediorum. Et quia in ſerie quatuor continuè proportionalium, ſi ſumma omnium ducatur in ſummam mediorum, & ex producto tollatur aggregatum quadratorum à mediis remanebit numerus, cuius duplo ſubſtracto de quadrato ſummæ omnium, relinquitur aggregatum quadratorum à ſingulis; fit vt ſi ducas 40 in 1 R, & ex producto 40 R tollas quadrata mediorum 90, reſidui 40 R - 90 duplo ſubſtracto de 1600 quadrato ſummæ omnium, exhibentur quadrata ſingulorum 1780 - 80 R. Igitur ex Propoſ. 13. huius, eſt vt 40 ad 1 R; ita 1780 - 80 R ad 40 R - 90 - 1 Q. Et ita productus ſub extremis 1600 R - 3600 - 40 Q æquatur producto ſub mediis 1780 R - 80 Q. Ergo 1 Q æquale eſt $\frac{180\,R}{40}$ + 90. Et fit 1 R, ſiue ſumma mediorum 12. Singulique 1. 3. 9. 27. *Lem. 6.*

Hinc idem Canon, & eadem Effectio Geometrica; quæ in Propoſitione præcedente.

PROPOSITIO XXII.

Idem problema alio modo perficere.

Dentur eædem ſummæ 40 & 90. Ponatur 1 R pro ſumma mediorum. Et quia, vt dictum eſt, ſumma omnium ad ſummam mediorum eſt vt quadrata mediorum ad productum ſub mediis vel extremis: ſi fiat vt 40 ad 1 R, ſic 90 ad aliud, habebis productum ſub mediis vel extremis $\frac{90\ R}{40}$. Sed quadratum ſummæ mediorum multatum quadratis mediorum æquale eſt duplo producto ſub mediis vel extremis; ergo idem productus erit $\frac{1\ Q - 90}{2}$. Et proinde erit æquatio inter $\frac{90\ R}{40}$ & $\frac{1\ Q - 90}{2}$. Igitur 1 Q æquatur vt antea $\frac{180\ R}{40} + 90$. Et fit 1 R, ſiue ſumma mediorum 12. Singulique 1. 3. 9. 27.

Corol. huius 1.

Lem. 3.

Hinc idem Canon, & eadem Effectio Geometrica quę in Propoſ. 20.

PROPOSITIO XXIII.

Aliter idem problema ſoluere.

Datis iiſdem numeris 40 & 90. Ponatur ſumma mediorum 1 R. Ergo 1 Q - 90 erit duplum producti ſub mediis vel extremis, & 40 - 1 R eſt ſumma extremorum ex cuius quadrato 1600 + 1 Q - 80 R ſi tollatur 1 Q - 90, reſtabit ſumma quadratorum ab extremis 1690 - 80 R. Et quoniam ex Propoſ. 13. huius, eſt vt ſumma omnium 40 ad ſummam mediorum 1 R, ſic aggregatum quadratorum ab extremis 1690 - 80 R ad aggregatum productorum ex primo in ſecundam, & tertio in quartam minus producto ſub mediis. Si ex

Lem 3.

Lem. 3.

13. huius.

40 R tollatur aggregatum quadratorum à mediis, plus quadrato ſummæ mediorum plus producto ſub mediis vel extremis, reſiduum erit $80\ R - \frac{90}{2} - 3\ Q$ æquale aggregato productorum ex primo in ſecundum, & tertio in quartum minus producto ſub mediis vel extremis. Igitur 40 ad 1 R; eſt vt 1690 - 80 R ad $\frac{80\ R\ 90 - 3\ Q}{2}$. Ergo productus ſub extremis $\frac{3200\ R - 3600 - 120\ Q}{2}$ æqualis erit producto ſub mediis 1690 R - 80 Q. Ergo 1 Q æquatur $\frac{180\ R}{40} + 90$. Et proinde 1 R, ſiue ſumma mediorum eſt 12. *Lem. 6.*

Hinc idem Canon & eadem Effectio Geometrica orietur quæ in Propoſ. 20.

PROPOSITIO XXIV.

Hoc idem problema aliter ſoluere.

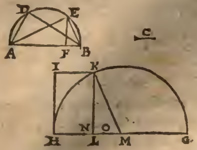
SIt data ſumma omnium 15, & aggregatum quadratorum à mediis 20. Ponatur ſumma extremorum 1 R. Igitur ſumma mediorum 15 - 1 R. Ergo per Corol. Propoſ. 1. huius, ſi fiat vt 15 ad 15 - 1 R; ita 20 ad aliud, habebis $\frac{300 - 20\ R}{15}$ pro producto ſub mediis vel extremis. Sed quadratum ſummæ mediorum 225 + 1 Q - 30 R multatum quadratis mediorum 20, exhibet duplum productum ſub mediis vel extremis 205 + 1 Q - 30 R igitur eius dimidium $\frac{205 + 1Q - 30\ R}{2}$ æquale eſt $\frac{300 - 20\ R}{15}$. Ergo poſt debitam reductionem 1 Q æquatur $\frac{410\ R}{15} - 165$. Et fit 1 R, ſiue ſumma extremorum 9. Quæ ſi tollatur ex 15, reſtabit 6, pro ſumma mediorum. Vnde ſinguli inuenientur. 1. 2. 4. 8. *Corollar. 1. huius.* *Lem. 3.*

Hinc Canon.

EX quadrato ſummæ omnium tolle triplam quadratorum à mediis ſummam, & reſiduum ſerua. Tùm ex duplo quadrato ſummæ omnium tolle duplam quadratorum à mediis ſummam, reſiduumque diuide per ſummam omnium: deinde huius quotientis cape dimidium ex cuius dimidii quadrato tolle reſiduum ſupra ſeruatum; huius enim relicti radix quadrata ſupradicto detracta dimidio exhibet ſummam extremorum; vnde nec ſumma mediorum nec ſinguli latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data linea A B pro ſumma omnium, & linea C poſſit quadrata mediarum. Supra A B fiat ſemicirculus in quo inſcribatur A D potens triplum quadrati C, & nectatur D B. Tùm ſumatur B E potens duplum quadrati C, & inſcribatur ex alia parte in eodem ſemicirculo demittaturque E F perpendiculariter ad diametrum A B. Deinde ſumatur H G æqualis compoſitæ ex A F & A B. Et ſupra HG fiat ſemicirculus, poſitaque H I perpendiculari ad H G & æquali D B, ducatur I K parallela ipſi H G, & producatur donec occurrat peripheriæ in puncto K, ex quo demittatur K L perpendicularis ad H G.



Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes, ſiquidem ex quadrato ſummæ omnium A B tollitur quadratum A D æquale triplo quadrati C, & reſiduum eſt quadratum B D. Tum ex quadrato ſummæ 47. primi.

omnium

omnium A B tollitur quadratum B E, & relinquitur qua- *8. ſexti.*
dratum A E hoc eſt rectangulum B A F, igitur rectan- *4. ſexti.* *17. ſexti.*
gulum B A F plus quadrata B A, hoc eſt rectangulum ſub A B in compoſitam ex A B & A F, æquatur duplo quadrato ſummæ omnium multato dupla quadratorum à mediis ſumma. Illud autem rectangulum diuiſum per ſummam omnium A B, quæ eſt eius altitudo exhibet pro quotiente Geometrico baſim A B plus A F, hoc eſt H G, ducta autem K M ad centrum M eſt æqualis dimidio H G, & ex quadrato K M tollitur quadratum K L, hoc eſt H I, hoc D B, remanetque quadratum L M, cuius latus L M detractum ex dimidio H G relinquit H L.

Dico autem H L fore ſummam extremarum: ſit enim, ſi fieri poteſt ſumma extremarum minor H L & æqualis H N. Ergo cum H G ſit æqualis compoſitæ ex A B & A F, erit N G compoſita ex ſumma mediarum & A F.
Igitur rectangulum H N G æquabitur rectangulis ex *1. ſecundi.*
H N in ſummam mediarum & H N in A F. Atqui
rectangulum ex ſumma extremarum H N in ſummam *1. ſecundi.*
mediarum, æquatur quadratis mediarum & rectangulis *17. ſexti.*
ex prima in ſecundam, & tertia in quartam. Rectangulum verò ex ſumma extremarum H N in A F, eſt æquale quadruplo rectangulo ſub mediis vel extremis, plus rectangulis ex prima in ſecundam & tertia in quartam, plus quadratis extremarum minus quadratis mediarum: ſiquidem ex præcedenti Propoſ. 20, cum ſit vt ſumma omnium ad lineam potentem quadrata mediarum, ita hæc linea ad aliam tertiam proportionalem ſumma mediarum ducta in illam tertiam proportionalem facit rectangulum æquale rectangulo ſub mediis vel extremis.

Igitur cum ſit vt ſumma omnium A B ad B E potentem duplum quadratorum à mediis, ita B E ad B F; ſumma mediarum in B F, faciet rectangulum æquale duplo rectangulo ſub mediis vel extremis. Sed rectangulum

1. *ſecundi.* ſub ſumma mediarum in ſummam omnium, æquatur
4. *ſecundi.* duplo quadratorum à mediis plus duplo rectangulorum
17. *ſexti.* ex prima in ſecundam, & tertia in quartam plus duplo rectangulo ſub mediis vel extremis. Ergo tollendo rectangulum ſub ſumma mediarum in F B ex rectangu-
1. *ſecundi.* lo ſub ſumma mediarum in A B remanet rectangulum ex ſumma mediarum in A F æquale duplo quadratorum à mediis plus ſumma rectangulorum ex prima in ſecundam & tertia in quartam; ſed cum quadratum A B
2. *ſecundi.* æquetur rectangulis A B F & B A F cumque rectangulum A B F ſit æquale duplo quadratorum à mediis, erit rectangulum B A F æquale quadrato ſummæ omnium multato dupla quadratorum à mediis ſumma. Hoc eſt rectangulum B A F æquabitur quadratis ſingularum plus quadruplo rectangulo ſub mediis, plus duplo rectangulorum ex prima in ſecundam, & tertia in quartam. Ergo ſi ex rectangulo B A F ſub ſumma omnium in A F, tollatur rectangulum ſub ſumma mediarum in
1. *ſecundi.* A F, reſtabit rectangulum ſub ſumma extremarum in A F, æquale quadratis extremarum plus quadruplo rectangulo ſub mediis plus rectangulis ex prima in ſecundam, & tertia in quartam, quibus ſi addas rectangulum ex ſumma mediarum in ſummam extremarum (quod iam probatum eſt æquari quadratis mediarum plus rectangulis ex prima in ſecundam, & tertia in quartam) fiet ſumma rectangulorum ex aggregato extremarum in A F & ex aggregato extremarum in aggregatum mediarum æqualis quadratis extremarum plus quadruplo rectangulo ſub mediis vel extremis, plus duplo rectangulorum ex prima in ſecundam, & tertia in quartam: hæc autem ſumma æquatur quadrato ſummæ omnium multato tripla quadratorum à mediis ſumma, vt dictum eſt in Propoſ. 14. huius, ergo rectangulum H N G eſt æquale quadrato ſummæ omnium A B multato tripla quadratorum à mediis ſumma, ſed quadratum
47. *primi.* B D æquatur quadrato A B multato quadrato A D

quod eſt æquale triplo quadratorum à mediis, igitur re-ctangulum H N G æquatur quadrato B D hoc eſt H I, hoc eſt K L, hoc eſt rectangulo K L G. Quod eſt abſurdum, & contra quintam ſecundi. Igitur, ſumma extremarum non poteſt eſſe minor H L. *8 ſexti. 4 ſexti. 17 ſexti.*

Sed neque maior, quia ſi poneretur æqualis O G, eodem plane modo probaretur rectangulum H O G ęquari rectangulo H L G. Cum ergo ſumma extremarum nec poſſit eſſe maior nec minor H L, erit illi ęqualis. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXV.

Idem problema aliter ſoluere.

DAta eadem ſumma omnium 5, & ſumma quadratorum a mediis 20. Ponatur ſumma extremorum 1 R, ergo 5 - 1 R erit ſumma mediorum ex cuius quadrato 225 † 1 Q - 30 R ſi tollas aggregatum quadratorum à mediis 20, habebis 205 † 1 Q 30 R pro duplo producto ſub mediis vel extremis. Et ita hic productus erit $\frac{205 \dagger 1 Q - 10 R}{2}$. Igitur diuidendo cubum ſummæ mediorum 15 - 1 R, qui cubus eſt 3375 - 675 R - 1 C † 45 Q, per ſummam extremorum plus tripla mediorum ſumma 45 † 2 R, fit iterum productus ſub mediis vel extremis. $\frac{3375 - 675 R - C \dagger 4 Q}{45 \dagger 2 R}$. Igitur erit æquatio inter $\frac{205 \dagger 1 Q - 10 R}{2}$ & $\frac{3375 \dagger 675 R - C \dagger 4 Q}{45 \dagger 2 R}$. Et proinde, poſt debitam reductionem 1 Q æquabitur $\frac{410 R}{5}$ - 165. Et fit 1 R, ſiue ſumma extremorum, 9. Singulique 1. 2. 4. 8. *Lem. 3. Corol. 2 huius.*

Hinc idem Canon & eadem Effectio Geometrica, quę in Propoſitione præcedente.

PROPOSITIO XXVI.

Hoc idem problema alio modo ſoluere.

DAtis iiſdem numeris 15 & 20. Ponatur 1 R pro ſumma extremorum Ergo ſumma mediorum erit 15 - 1 R quæ ſi ducatur in ſummam omnium, fit productus 225 15 R, ex quo ſi tollas quadratum ſummæ mediorum plus quadratis mediorum nempe 225 † 1 Q - 30 R & 20, reſiduum 15 R - 1 Q - 20 ad quadrata ſingulorum; erit vt ſumma mediorum 15 - 1 R ad ſummam omnium 15. Quæramus ergo quadrata extremorum hoc modo. Ex quadrato ſummæ mediorum tollantur quadrata mediorum, hoc eſt ex 225 † 1 Q - 30 R
Lem. 5. tollantur 20, reſiduum 205 † 1 Q - 30 R æquatur duplo producti ſub mediis vel extremis. Igitur ſi illud duplum tollatur de quadrato ſummæ extremorum 1 Q, habe-
Lem. 3. bis 30 R - 205 pro quadratis extremorum. Quibus ſi addas quadrata mediorum 20, fiet ſumma quadratorum
Lem. 11. à ſingulis 30 R - 185. Ergo erit vt 15 R - 1 Q - 20 ad 30 R - 185; ita 15 - 1 R ad 15. Igitur productus ſub ex-
Lem. 6. tremis 225 R - 15 Q - 300 æquabitur producto ſub mediis 635 R - 30 Q - 2775. Et proinde 1 Q eſt æquale $\frac{410\ R}{15}$ - 165. Fitque 1 R, ſiue ſumma extremorum 9. Et ſinguli 1. 2. 4. 8.

Hinc idem Canon & eadem Effectio Geometrica, quę in Propoſ. 24.

PROPOSITIO XXVII.

Data ſumma quatuor quantitatum continue proportionalium, & aggregato quadratorum ab extremis, diſtinguere ſingulas.

ESto data ſumma numerorum 15. Et aggregatum quadratorum 65. Ponatur 1 R pro ſumma mediorum. Ergo erit ſumma extremorum 15 - 1 R. Cuius quadratum eſt 225 † 1 Q - 30 R, vnde ſi tollas aggregatum quadratorum ab extremis 65. Reſtabit 160 † 1 Q 30 R pro duplo producti ſub mediis vel extremis. Igitur ille productus erit $\frac{6 \dagger \ Q \quad o R}{2}$. At verò ſi cubus ſummæ mediorum diuidatur per ſummam extremorum plus triplo ſummæ mediorum habebitur quoque productus ſub mediis vel extremis $\frac{15 \dagger 2 R}{1 C}$. Ex Propoſ. 1. huius. Igitur $\frac{260 \dagger 1 Q - 30 R}{2}$ æquabuntur $\frac{1 C}{15 \dagger 2 R}$ & proinde multiplicando illas fractiones decuſſatim, erunt 2 C æquales 2400 - 130 R - 45 Q † 2 C. Ergo 1 Q eſt æquale $\frac{2400 - 130 R}{45}$. Fitque 1 R, ſiue ſumma mediorum 6 quam ſi tollas de 15, reſtat 9, pro ſumma extremorum. Vnde ſinguli ſunt 1. 2. 4. 8. *Lem. 1.* *Corol. prop. 1. huius.*

Hinc Canon.

AGgregatum quadratorum ab extremis diuide per triplum ſummæ omnium: huius quotientis quadrato adde quotientem qui fit diuidendo productum ſolidum ex ſumma omnium in differentiam quadrati ſummæ omnium à quadratis extremorum per idem triplum

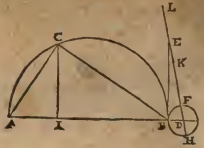
ſummæ omnium : huius enim aggregati radix quadrata multata ſupradicto priore quotiente, exhibet ſummam mediorum, vnde nec extremorum ſumma, nec ſinguli latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt A B ſumma quatuor linearum continuè proportionalium. Et A C poſſit quadrata ab extremis. Supra A B fiat ſemicirculus, in quo inſcribatur A C, & connexa C B, demittatur C I perpendiculariter ad A B, tùm producatur A B donec B D ſit triens ipſius A I, & centro D, interuallo D B, fiat circulus. Deinde ſumpta B E media proportionalis inter A B & trientem ipſius I B, ponatur perpendiculariter ad A B, & ducatur E D ſecans circulum in punctis F & H.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes, ſiquidem cùm triangula A C B & A C I ſint æ-
8. *ſexti.* quiangula, erit vt A B ad A C; ita A C ad A I. Ergo
4. *ſexti.* rectangulum B A I æquatur quadrato A C. Diuiditur
17 *ſexti.* autem rectangulum B A I per triplam A B, faciendo vt tripla A B ad A B; ita A I ad aliud. Igitur ſicut A B eſt triens triplæ A B; ita quotiens Geometricus eſt triens A I, vſi ergo ſumus compendio, capiendo B D trientem
8 *ſexti.* ipſius A I. Similiter oſtendetur rectangulum A B I æ-
4. *ſexti.* quari quadrato C B, quod eſt differentiæ quadrati ſum-
17. *ſexti.* mæ omnium A B & quadrati A C, ſolidum autem ſub
47 *primi.* rectangulo A B I in A B diuiditur per triplam A B, faciendo vt tripla A B ad A B, ita rectangulum A B I ad aliud; ſicut autem A B eſt triens triplæ A B; ita quotiens Geometricus erit triens rectanguli A B I; atqui rectangulum ſub A B & triente B I erit triens rectanguli
1. *ſexti.* A B I, quare iterùm vſi ſumus compendio, capiendo B E mediam proportionalem inter A B & trientem B I. ſic
17. *ſexti.* enim quadratum B E æquatur rectangulo ſub A B in trientem B I qui eſt quotiens Geometricus ex diuiſione

imperata; quadratum autem B E additur quadrato B D 47 primi.



& fit quadratum D E, cuius latus D E multatum D F hoc eſt B D exhibet F E.

Dico autem lineam F E fore ſummam mediarum. Sit enim ſi fieri poteſt ſumma mediarum minor F E, & æqualis F K; erit ergo vt ſumma omnium A B ad ſummam mediarum F K; ita quadratum A C, hoc eſt rectangulum B A I ad ſummam rectangulorum ex prima in ſecundam, & tertia in quartam minus rectangulo ſub mediis vel extremis. Sed eſt vt A B ad F K, ita propter eamdem altitudinem A I, rectangulum B A I ad rectangulum ſub F K in A I, igitur vt rectangulum B A I ad rectangulum ſub F K in A I; ita rectangulum B A I ad ſummam rectangulorum ex prima in ſecundam, & tertia in quartam, minus rectangulo ſub mediis vel extremis. Et proinde rectangulum ſub F K in A I æquatur ſummæ rectangulorum ex prima in ſecundam, & tertia in quartam, minus rectangulo ſub mediis vel extremis. Atqui H F continet duos trientes ipſius A I, ergo triplum rectanguli H F K æquatur duplo rectanguli ſub F K in A I. Corollar. Prop. 13 huius. 1. ſexti. 9. quinti.

Sed duplum rectanguli ſub F K in A I plus quadrato A C plus triplo quadrato ſummæ mediarum æquatur quadrato ſummæ omnium A B, vt dictum ſuprà. Et eidem quadrato A B æquantur quadrata A C, C B, hoc eſt quadratum A C & rectangulum A B I. Ergo rectangulum A B I plus quadrato A C æquantur quadrato A C plus triplo quadrato ſummæ mediarum F K, plus triplo rectangulo H F K, & detracto vtrinque communi quadrato A C, reſtabit rectangulum A B I æquale triplo quadrato F K, plus triplo rectangulo K F H, hoc Propoſ. 14. huius.

5. ſecundi. eſt rectangulum A B I æquatur triplo rectangulo H K F Igitur rectangulum ſub A B & triente B I eſt æquale rectangulo H K F, ſed B E ſumpta eſt media proportio- *17. ſexti.* nalis inter A B & trientem B I; igitur quadratum B E æquatur rectangulo ſub A B & triente B I. Et proinde quadratum B E æquatur rectangulo H K F. Sed B E *16. tertii.* eſt perpendicularis ad extremitatem diametri. Ergo *36. tertii.* tangit. Ergo quadratum B E æquale eſt rectangulo H E F. Igitur rectangulum H E F æquatur rectangulo H K F, totum parti, quod eſt abſurdum. Ergo ſumma mediarum non poteſt eſſe minor linea F F.

Sed neque maior, ſi enim poneretur ſummam mediarum eſſe æqualem F L, pari omnino diſcurſu, probaretur rectangulum H E F fore æquale rectangulo L F, partem toti, quod eſt abſurdum. Cum ergo ſumma mediarum neque poſſit eſſe minor neque maior F E, erit illi æqualis. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXVIII.

Idem problema alio modo perficere.

DAtis iiſdem ſummis 15, & 65. Ponatur 1 R pro ſumma mediorum, erit ergo 15 - 1 R ſumma extremorum. Huius quadratum eſt 225 † 1 Q - 30 R *Lem. 5.* vnde ſi tollas 65, habebis 160 † 1 Q - 30 R pro duplo producti ſub mediis vel extremis. Et ita $\frac{160 \dagger 1 Q - 30 R}{2}$ erit eiuſmodi productus. Summa verò quadratorum à mediis 30 R - 160. Et quia vt demon- *Corol. 1. huius* ſtratum eſt in Propoſ. 1. huius. Aggregatum quadratorum à mediis ad productum ſub mediis, eſt vt ſumma omnium ad ſummam mediorum; erit 30 R - 160 ad $\frac{160 \dagger 1 Q - 30 R}{2}$; vt 15 ad 1 R. Ergo productus ſub extre- *Lem. 6.* mis 30 Q - 160 R æqualis erit producto ſub mediis

2400

$\frac{2400 \dagger 15 Q - 450 R}{2}$. Et proinde 1 Q æquatur $\frac{2400 - 130 R}{45}$.
Et fit 1 R, æqualis 6.

Hinc oritur idem Canon & eadem Effectio Geometrica.

PROPOSITIO XXIX.

Hoc idem problema aliter ſoluere.

DAtis iiſdem ſuminis 15 & 65. Ponatur 1 R pro ſumma mediorum, inuenieturque vt prius productus ſub mediis vel extremis $\frac{160 \dagger 1 Q - 30 R}{2}$. Et aggregatum quadratorum à mediis 30 R - 160. Cui ſi addas 65, habebis ſummam quadratorum à ſingulis 30 R - 95 & quia ex Propoſ. 14. huius, ſi in ſerie quatuor proportionalium, ex producto ſub ſumma omnium in ſummam mediorum tollatur aggregatum quadratorum à mediis & quadratum ſummæ mediorum, reſtat numerus, qui ad aggregatum quadratorum à ſingulis, eſt vt ſumma mediorum ad ſummam omnium; erit vt 160 - 15 R - 1 Q ad 30 R - 95; ita 1 R ad 15. Ergo productus ſub extremis 2400 - 225 R - 15 Q æquatur producto ſub mediis 30 Q - 95 R. Et ita 1 Q eſt æquale $\frac{2400 - 130 R}{45}$ & fit 1 R, ſiue ſumma mediorum, 6.

Corollar. 14. huius.

Lem. 6.

Hinc prodit idem Canon Algebricus, & eadem Effectio Geometrica.

PROPOSITIO XXX.

Idem problema alia ratione perficere.

DAtis iiſdem numeris 15 & 65. Ponatur 1 R pro ſumma mediorum, inuenieturque vt ſupra productus ſub mediis vel extremis $\frac{160 \dagger 1 Q - 30 R}{2}$. Et ſumma

productorum ex primo in ſecundum, & tertio in quartum 160 - 15 R - 1 Q. Ab hoc ſi tollas productum ſub mediis vel extremis, reſtabit $\frac{160 - 3 Q}{2}$. Igitur per Propoſ. 13. huius, erit vt $\frac{160 - 1 Q}{2}$ ad 65; ita 1 R ad 5. Ergo productus ſub extremis $\frac{1410 - 45 Q}{2}$ æqualis erit producto ſub mediis 65 R. Igitur, poſt debitam reductionem, 1 Q æquatur $\frac{400 - 130 R}{4}$ & fit 1 R, ſiue ſumma mediorum, 6. Singulique 1. 2. 4. 8.

Corollar. 13. huius.

Hinc oritur idem Canon & eadem Effectio Geometrica, quæ in Propoſ. 27.

PROPOSITIO XXXI.

Hoc idem problema aliter ſoluere.

Datis iiſdem ſummis 15 & 65. Ponatur 1 R pro ſumma extremorum. Igitur 15 - 1 R erit mediorum ſumma. Igitur ſi ex quadrato ſummæ extremorum 1 Q, tollantur quadrata extremorum 65 reſiduum 1 Q - 65 æquabitur duplo producti ſub mediis vel extremis. Et proinde ſi hoc reſiduum 1 Q - 65 tollatur ex quadrato ſummæ mediorum 225 † 1 Q - 30 R, habebis 290 30 R pro quadratis mediorum. Igitur erit vt productus ſub mediis vel extremis $\frac{1 Q - 65}{2}$ ad quadrata mediorum 290 30 R; ita ſumma mediorum 15 - 1 R ad ſummam omnium 15 ex Propoſ. 1. huius. Ergo productus ſub extremis $\frac{15 Q - 975}{2}$ æqualis producto ſub mediis 4350 - 740 R † 30 Q. Et proinde poſt debitam reductionem 1 Q erit æquale $\frac{1480 R}{5}$ - 215. Et fit 1 R ſiue ſumma extremorum 5. Quæ ſi tollatur à ſumma omnium 15, reſtabit ſumma mediorum 6, vnde ſinguli ſunt 1. 2. 4. 8.

Lem. 3.

Lem. 3.
Lem. 6.

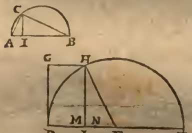
Lem. 6.

Hinc Canon.

ADde ſextuplum quadratum ſummæ omnium cum duplo quadratorum ab extremis, & hanc ſummam diuide per triplum ſummæ omnium: quotientis inde nati cape dimidium, ex cuius quadrato tolle quotientem qui fit diuidendo duplum cubum ſummæ omnium plus triplo ſolido ſub quadratis extremorum in ſummam omnium, per triplam omnium ſummam: huius enim reſidui radix quadrata ſupradicto detracta dimidio exhibet ſummam extremorum. Vnde nec mediorum ſumma, nec ſinguli latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt A B ſumma omnium, & A C potens quadrata extremarum. Fiat ſemicirculus ſuper A B in quo inſcribatur A C, & connexa C B, demittatur C I perpendicularis ad A B. Tùm ſumatur D G media proportionalis inter A B, & compoſitam ex A I & duobus trientibus A B; eique D G ſtatuatur perpendicularis D E compoſita ex duplo A B, & duobus trientibus ipſius A I, diuiſaque D E bifariam in F, centro F, interuallo F D vel F E deſcribatur ſemicirculus, & ducatur D H parallela D E, producaturque donec occurrat peripheriæ in puncto H, ex quo demittatur H L perpendicularis ad D E.



Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes; ſiquidem ſi addatur ſextuplum quadratum A B cum duplo rectangulo B A I fiet rectangulum ſub A B

1. ſexti. in compoſitam ex ſextupla A B & dupla A I, æquale ſextuplo quadrato A B plus duplo quadrato A C; hoc autem
4. ſexti.
17. ſexti. rectangulum ſub A B in compoſitam ex ſextupla A B & dupla A I, diuiditur per triplam A B, faciendo vt tripla A B ad A B; ita compoſita ex ſextupla A B & dupla A I ad aliud, ſicut ergo A B eſt triens triplę A B; ita quotiens Geometricus debebit eſſe triens compoſitæ ex ſextupla A B & dupla A I; ac proinde vſi ſumus compendio capiendo D E æqualē duplæ A B, & duobus trientibus A I. Et quoniam rectangulum B A I æquatur quadratis extremarum æqualibus quadrato A C, rectangulum ſub A B in compoſitam ex dupla A B & tripla A I
1. ſecun li. erit æquale duplo quadrato ſummæ omnium plus triplo quadratorum ab extremis, igitur ſolidum rectangulum ſub linea A B & rectangulo ſub A B in compoſitam ex dupla A B & tripla A I æquatur duplo cubo ſummæ omnium plus triplo ſolido ſub quadratis extremarum in ſummam omnium. Hoc autem ſolidum diuiditur per triplam A B, faciendo vt tripla A B ad A B; ita rectangulum ſub A B in compoſitam ex dupla A B & tripla A I ad aliud; ſicut ergo A B eſt triens triplæ A B; ita
1. ſexti. quotiens Geometricus debebit eſſe triens rectanguli ſub A B in compoſitam ex dupla A B & tripla A I. Huius autem rectanguli triens eſt rectangulum ſub A B &
17. ſexti. triente baſeos, qui triens baſeos æquatur duobus trientibus A B & tota A I; ac proinde rectangulum ſub A B in compoſitam ex duobus trientibus A B & tota A I, erit quotiens Geometricus. huic autem rectangulo æquatur quadratum D G quæ ſumpta eſt media proportionalis inter A B & compoſitam ex duobus trientibus A B & tota A I. Vnde patet maximo nos eſſe vſos compendio. Ducta igitur H F erit dimidium prioris quotientis D E. Et ex quadrato H F tollitur quadratum H L, hoc eſt D G, & remanet quadratum L F, cuius latus L F detractum ex H F, hoc eſt H F, exhibet D L

Dico autem D L fore ſummam extremarum, ſit

enim, ſi fieri poteſt, ſumma extremarum minor D L & æqualis D M, ex Propoſ. præcedente, rectangulum ſub ſumma mediarum in duos trientes A I æquatur duobus trientibus rectangulorum ex prima in ſecundam, & tertia in quartam multatis duplo triente rectanguli ſub mediis vel extremis; item rectangulrum ſub A B ſumma omnium in duos trientes A I eſt æquale duobus trientibus quadratorum ab extremis; igitur, tollendo de rectangulo ſub ſumma omnium in duos trientes A I, rectangulum ſub ſumma mediarum in duos trientes A I. *1. ſecundi.* Reſtabit rectangulum ſub ſumma extremarum in duos trientes A I æquale duplo trientis quadratorum ab extremis, plus duplo trientis rectanguli ſub mediis, minus duplo trientis rectangulorum ex prima in ſecundam, & tertia in quartam. Rectangulum autem ex ſumma extremarum in ſummam extremarum plus dupla mediarum ſumma æquatur quadratis extremarum, plus duplo rectangulo ſub mediis vel extremis, plus duplo quadratorum à mediis, plus duplo rectangulorum ex prima in ſecundam, & tertia in quartam. *1. ſecundi.* Igitur ſi rectangulum ſub ſumma extremarum D M in duos trientes A I, addatur cum rectangulo ex ſumma extremarum D M in ſummam extremarum plus dupla mediarum ſumma, habebitur rectangulum ſub ſumma extremarum in compoſitam ex ſumma extremarum, dupla ſumma mediarum, & duobus trientibus A I, æquale quadratis extremarum, plus duobus trientibus quadratorum ab extremis, plus duplo quadratorum à mediis, plus octo trientibus rectanguli ſub mediis vel extremis, plus quatuor trientibus rectangulorum ex prima in ſecundam, & tertia in quartam. *1. ſecundi.*

Ergo cum ſumpta ſit D E æqualis duplæ A B, & duobus trientibus A I. Et ponatur D M ſumma extremarum, erit rectangulum D M E ſub ſumma extremarum in ſummam extremarum, plus dupla mediarum ſumma, plus duobus trientibus A I, æquale vltimo aggregato.

Sed rectangulum ſub A B in compoſitam ex A I & duobus trientibus A B æquatur rectangulo B A I, hoc eſt
1. ſecundi. quadrato A C, & duobus trientibus quadrati A B, hoc
14. huius. eſt duobus trientibus quadratorum ab extremis, plus duplo quadratorum à mediis, plus octo trientibus rectanguli ſub mediis vel extremis, plus quatuor trientibus rectangulorum ex prima in ſecundam, & tertia in quartam. Ergo rectangulum ſub A B in compoſitam ex A I,
27 ſexti. & duobus trientibus A B, hoc eſt quadratum D G hoc
8. ſexti. eſt L H, æquatur rectangulo D M E. Sed quadratum
4 ſexti. H L eſt æquale rectangulo D L E, igitur rectangulum
17. ſexti. D L E æquatur quadrato D M E, quod eſt abſurdum & contra quintam ſecundi. Et proinde ſumma extremarum non poteſt eſſe minor linea D L.

Sed neque maior, ſi enim poneretur æqualis D N, eodem plane diſcurſu probaretur rectangulum D N E æquari rectangulo B L E, quod eſt contra eamdem propoſitionem Euclidis. Cum ergo ſumma extremarum nec poſſit eſſe minor, nec maior D L, erit illi æqualis. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXXII.

Hoc idem problema aliter ſoluere.

Datis iiſdem 15 & 65. ponatur 1 R pro ſumma extremorum, ex cuius quadrato 1 Q ſi tollas quadrata
Lem. 5. extremorum 65, reſiduum 1 Q - 65 erit duplum producti
Lem. 6. ſub mediis vel extremis. Ergo $\frac{1\,Q - 65}{2}$ erit ille productus. Cum ergo ſumma omnium ſit 15, erit 15 - 1 R ſumma mediorum, cuius cubus 3375 - 1 C † 45 Q - 675 R
Corollar. 3. huius. diuiſus per ſummam extremorum plus tripla mediorum ſumma 45 - 2 R, exhibet productum ſub mediis vel extremis $\frac{3375 - 1\,C + 45\,Q - 676\,R}{45 - 2\,R}$. Et proinde erit æquatio inter

$\frac{1 Q - 65}{2}$ & $\frac{3375 - 1 C + 45 Q - 675 R}{45 - 2 R}$. Igitur multiplicando illas duas fractiones decuſſatim, erit quoque æquatio inter $6750 - 2 C + 90 Q - 1350 R$ & $45 Q - 2 C - 2925 + 130 R$. Et poſt debitam reductionem $1 Q$ æquabitur $\frac{1480 R}{45}$ 215. Et fit $1 R$ ſiue ſumma extremorum 9. Singulique 1. 2. 4. 8.

Hinc idem prodit Canon, & eadem Effectio Geometrica, quæ in Propoſ. præced.

PROPOSITIO XXXIII.

Idem problema aliter ſoluere.

DAtis iiſdem numeris 15 & 65. Ponatur $1 R$ pro ſumma extremorum. Ergo ſumma mediorum eſt $15 - 1 R$. Igitur ſi fiat vt 15 ad $15 - 1 R$; ita 65 ad aliud, habebis $\frac{975 - 65 R}{15}$ pro ſumma productorum ex primo in ſecundum, & tertio in quartum, multata producto ſub mediis vel extremis, per Propoſ. 13. huius. Qui idem numerus alio modo ſic inuenietur, ex duplo quadrato ſummæ mediorum $450 + 2 Q - 60 R$ tolle productum ſub mediis vel extremis $\frac{1 Q - 65}{2}$. Reſiduum $\frac{905 + 3 Q - 120 R}{2}$, tolle de producto ſummæ mediorum in ſummam omnium $225 - 15 R$, & habebis $\frac{90 R - 3 Q - 515}{2}$ pro aggregato productorum ex primo in ſecundum, & tertio in quartum, minus producto ſub mediis vel extremis, quod aggregatum iam ſupra inuentum eſt $\frac{975 - 65 R}{15}$. Et proinde $\frac{975 - 65 R}{15}$ æquabuntur $\frac{90 R - 3 Q - 515}{2}$. Igitur $1 Q$ eſt æquale $\frac{1480 R}{45} - 215$. Et fit $1 R$, ſiue ſumma extremorum 9. Singulique 1. 2. 4. 8. Corol. 13. huius.

Hinc idem oritur Canon & eadem Effectio, quæ in Propoſ. 31. huius.

Corollarium.

EX his omnibus collige aliquot theoremata, quorum primum eſt. Si fuerint quatuor quantitates continue proportionales & à quadrato ſummæ omnium tollantur quadrata extremarum plus triplo quadrato ſummæ mediarum, reſidui dimidium eſt ad quadrata ſingularum vt ſumma mediarum ad ſummam omnium. Hoc habetur tum ex Propoſ. 14. Tum ex Propoſ. 27. huius. Secundum: in eadem ſerie, eſt vt aggregatum quadratorum ab extremis ad quadrata mediarum; ita ſumma planorum ex prima in ſecundam, & tertia in quartam, multata plano ſub mediis vel extremis, ad planum ſub mediis vel extremis. Hoc habetur tùm ex Propoſ. 1. tum ex Propoſ. 13. huius Tertium: in eadem ſerie, eſt vt aggregatum quadratorum à ſingulis ad quadrata mediarum; ſic ſumma planorum ex prima in ſecundam, & tertia in quartam, ad planum ſub mediis vel extremis: hoc habetur componendo. Denique vt ſumma quadratorum à ſingulis ad quadrata extremarum; ſic ſumma planorum ex prima in ſecundam, & tertia in quartam, ad ſeipſam multatam plano ſub mediis vel extremis. Hoc habetur per conuerſionem rationis.

PROPO:

PROPOSITIO XXXIV.

Data ſumma omnium ex quatuor quantitatibus continuè proportionalibus, & interuallo quadratorum differentiæ ab extremis, & differentiæ à mediis, inuenire ſingulas.

ESto data ſumma omnium 40. Et interuallum quadratorum 640. Ponatur 1 R pro ſumma mediorum. Ergo 40 - 1 R erit ſumma extremorum: & quia in ſerie quatuor proportionalium differentia quadratorum differentiæ ab extremis, & differentiæ à mediis, æquatur interuallo quadratorum ſummæ ab extremis, & ſummæ à mediis, vt dictum eſt in Propoſ. 6. huius. Si quadrato ſummæ mediorum 1 Q addatur interuallum datum 640 fiet ſumma 1 Q † 640. Æqualis quadrato ſummæ extremorum 1600 † 1 Q 80 R. Igitur poſt debitam reductionem 960 æquabuntur 80 R. Et fit 1 R, ſiue ſumma mediorum 12, quæ ſublata ex 40, relinquit 28 pro ſumma extremorum. Data autem ſumma mediorum 12. Et ſumma extremorum 28, diſtinguuntur ſinguli per primam Propoſit. huius. Eruntque 1. 3. 9. 27. *Append. 6. huius.*

Hinc Canon.

EX quadrato ſummæ omnium, tolle differentiam datam. reſiduum diuide per duplum ſummæ omnium, & habebis ſummam mediorum. Vnde nec extremorum ſumma, nec ſinguli latebunt.

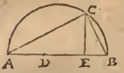
Hinc Effectio Geometrica.

SIt data ſumma omnium A B. Et linea B C poſſit interuallum quadratorum differentiæ ab extremis.

& differentiæ à mediis. Supra A B fiat ſemicirculus in quo inſcribatur B C, & nectatur A C; tum fiat vt dupla A B ad A C; ita A C ad A D

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis partes; ſiquidem cum angulus in ſemicirculo A C B ſit rectus, quadratum B C tollitur ex quadrato A B, & remanet quadratum C A; quoniam autem A C eſt media proportionalis inter A D & duplam A B, erit quadratum A C æquale rectangulo ſub dupla A B in A D. Ergo diuiditur quadratum A C per duplam A B, & fit linea A D pro quotiente Geometrico.

31. *tertij.* 47 *primi.* 17. *ſexti.*



Dico autem verò lineam A D fore ſummam mediarum. Quadratum enim A B æquale eſt quadratis A C, C B, quadratum autem A C æquatur rectangulo ſub dupla A B in A D, hoc eſt duplo quadrato A D & duplo rectangulo A D B. Igitur quadratum A B æquatur quadrato B C, duplo quadrato A D, & duplo rectangulo A D B. Sed idem quadratum A B æquale eſt quadratis partium A D, D B & duplo rectanguli ſub partibus A D B. Ergo quadrata A D, D B plus duplo rectanguli A D B æqualia ſunt quadrato B C duplo quadrato A B, & duplo rectangulo A D B; demptis igitur iis, quæ ſunt communia vtrique parti æquationis, relinquitur quadratum D B æquale quadratis A D & B C. Igitur quadratum B D differt à quadrato D A per quadratum B C

47 *primi.* 17 *ſexti.* 1. *ſecundi.* 30 *ſecundi.* 4 *ſecundi.*

Data ergo ſumma extremarum B D, & ſumma mediarum A D, inueniantur quatuor continuè proportionales per alteram e ſex priorib. Propo . huius. Æquabuntur illæ ſimul ſumptæ, ſummæ omnium A B, & quadratum ſummæ extremarum B D differt à quadrato ſummæ mediarum A D per quadratum B C, atqui

quadratorum differentiæ ab extremis & differentiæ à mediis eadem eſt differentia, quæ quadrati ſummæ extremarum & quadrati ſummę mediarum vt ſuperius dictum eſt. *Append. Prop. 6. huius.* Ergo quadratum differentiæ extremarum differet à quadrato differentiæ mediarum per quadratum B C. Ergo inuentæ ſunt quatuor lineæ proportionales quarum ſumma æquatur A B itaut linea B C poſſit interuallum quadratorum differentię ab extremis, & differentiæ à mediis. Quod erat demonſtrandum.

Appendix.

POtuit quoque abſolui hoc problema paulò aliter, demittendo ex puncto C perpendicularem C E, & diuidendo A E biſariam in D. Sic enim A D, vt prius erit ſumma mediarum; ſiquidem cum triangula A C B *31. tertii.* & A C E ſint æquiangula, erunt proportionalia eorum *8. ſexti.* *4. ſexti.* latera. Igitur rectangulum B A E ęquatur quadrato A C. *17. ſexti.* Rectangulum autem ſub A B & dupla A D, hoc eſt A E, ęquatur rectangulo ſub A D & dupla A B. Ergo qua- *17. ſexti.* dratum A C æquale eſt rectangulo ſub A D in duplam A B. Quod ipſum effectum eſt in propoſitione.

Quod ſi iuberetur exhiberi quatuor quantitates continuè proportionales, ſed tantum quatuor proportionales, ſiue continuè, ſiue diſcretè; inuenta vt prius ſumma mediarum poſſet diuidi pro libito in duas partes, tùm ſumpta inter eas media proportionali deberet ad datam ſummam extremarum & mediam ex tribus proportionalibus inueniri quælibet extrema ſigillatim. Quod fit per Propoſ. 2. lib. 1. verbi gratia, datis iiſdem 40 & 640. Inuentiſque ſumma mediarum 12 & ſumma extremarum 28. Poſſet diuidi 12 pro libito in 4 & 8: inter quos medius proportionalis eſt ℞ 32. Data ergo ſumma extremarum 28, & media, ℞ 32. Inueniantur extremæ per Propoſ. indicatam, & habebis quatuor proportionales 14 + ℞ 164 | 8 | 4 | 14 - ℞ 164. Quorum ſumma eſt

40, & interuallum quadratorum differentiæ ab extremis, & differentiæ à mediis eſt 640. Quod erat faciendum. Similiter procedi debet in Effectione Geometrica.

PROPOSITIO XXXV.

Hoc idem problema alio modo perficere.

Append. 6. huius.

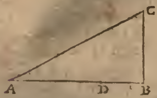
DAtis iiſdem 40 & 640. Ponatur 1 R pro ſumma extremorum. Ergo 40 - 1 R erit ſumma mediorum. Igitur per theorema ſupradictum erit quadratum ſummæ extremorum 1 Q æquale quadrato ſummæ mediorum 1600 † 1 Q - 80 R plus differentia data 640. Ergo 2240 çquabuntur 80 R. Et fit 1 R, ſiue ſumma extremorum 28. Reliqua vt prius.

Hinc Canon.

QVadrato ſummæ omnium adde differentiam datam: ſummam factam diuide per duplum ſummæ omnium, & habebis ſummam extremorum, vnde nec mediorum ſumma, nec ſinguli latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data ſumma omnium A B, & B C poſſit interuallum quadratorum. Connectantur illæ ad angulos rectos & ducatur A C. Tùm fiat vt dupla A B ad A C, ita A C ad A D.



Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis partes, ſiquidem quadratum B C

47. primi.

additur quadrato A B, & fit quadratum A C. Quoniam

17. ſexti.

autem fit vt dupla A B ad A C; ita A C ad A D; erit

quadratum A C æquale rectangulo ex dupla A B in A D. Et propterea quadratum A C diuiditur per duplam A B, & fit linea A D, pro quotiente Geometrico.

Dico verò lineam A D fore ſummam extremarum de quatuor quæſitis. Nam quadratum A C ęquatur quadratis A B & B C, quadratum autem A B eſt æquale quadratis partium A D, D B & duplo rectanguli A D B; ergo quadratum A C æquale eſt quadratis B C, A D, D B & duplo rectanguli A D B. Sed iam probatum eſt idem quadratum A C æquari rectangulo ex dupla A B in A D: hoc vero rectangulum æquatur duplo quadrato A D, & duplo rectangulo A D B. Igitur duplum quadratum A D plus duplo rectangulo A D B eſt æquale quadratis B C, A D, D B, plus duplo rectangulo A D B. Demptis ergo iis, quæ ſunt communia vtrique parti æquationis, reſtabit quadratum A D æquale quadratis B C & D B. Et proinde quadratum A D differt à quadrato D B, per quadratum B C.

4 ſecundi. *1. ſecundi.*

Si ergo ad datam ſummam extremarum A D, & ſummam mediarum D B, inueniantur quatuor continuè proportionales per aliquam è ſex prioribus propoſitionibus huius, erunt illę ſimul ſumptę ęquales ſummę A B, & inſuper quadratum ſummæ extremarum differt à quadrato ſummæ mediarum, per quadratum B C, ſed eadem eſt differentia quadratorum differentiæ ab extremis, & differentiæ à mediis, quæ quadratorum ſummæ ab extremis, & ſummæ à mediis. Ergo inuentæ ſunt quatuor lineæ proportionales quarum ſumma A B, itaut differentia quadratorum differentiæ ab extremis, & differentiæ à mediis æquetur quadrato B C. Quod erat demonſtrandum.

Append. Propoſ. 6. huius.

Appendix.

HIc adnotandum eſt poſſe ſolui tum numericè tum Geometricè duo ſequentia problemata. Primum; data ſumma differentiarum primæ à ſecunda, ſecundæ à tertia, & tertiæ a quarta, & interuallo quadratorum ſummæ ab extremis, & ſummæ à mediis inuenire quatuor quantitates continuè proportionales. Siquidem ſumma differentiarum erit æqualis differentiæ extremarum, item illæ tres differentiæ erunt in continua & in eadem cum quantitatibus quæſitis ratione, & differentia quadratorum data ęquabitur quadrato ſummæ differentiarum datæ minus quadrato differentię mediarum: & proinde ſi ex quadrato ſummæ differentiarum datæ tollatur interuallum datum, habebitur quadratum differentiæ mediarum.

Secundum problema eſt eiuſmodi: data ſumma differentiarum ab extremis & à mediis, & interuallo quadratorum ſummæ extremarum & ſummæ mediarum inuenire ſingulas. Hoc enim problema idem eſt ac ſi iuberetur data ſumma duarum quantitatum & interuallo quadratorum ab ipſis ortorum inuenire ſingulas. Vnde inuenientur differentiæ extremarum, & mediarum, & ita per ſeptimam & ſeq. Propoſ. huius, inuenientur ſingulæ quatuor quantitates.

Corollarium.

SI fuerint quatuor quantitates continuè proportionales, erit vt ſumma omnium ad differentiam ſummę mediarum & ſummæ extremarum; ita quadratum ſummæ omnium ad differentiam quadratorum differentiæ ab extremis & differentiæ à mediis, vel ad differentiam quadratorum ſummæ ab extremis, & ſummæ à mediis. Demonſtratio clara eſt ex figura Propoſitionis precedenꝫ

tis: eſt enim propter æquiangulcitatem triangulorum, vt A B ad B C; ita B C ad B E ergo vt A B ad B E; ita quadratum A B ad quadratum B C. Sed B E eſt differentia ſummæ extremarum D B & ſummæ mediarum D E, hoc eſt A D, ergo vt ſumma omnium ad differentiam, &c. Quod erat demonſtrandum. *8. ſexti. 4. ſexti. 20. ſexti.*

PROPOSITIO XXXVI.

Data ſumma quatuor quantitatum continue proportionalium, & interuallo quadratorum ſummæ mediarum, & ſummæ maioris extremæ & mediæ maioris diſtinguere ſingulas.

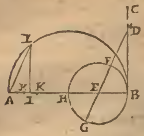
ESto data ſumma quatuor numerorum continuè proportionalium 15 & interuallum quadratorum 108. Ponatur 1 R pro ſumma maioris extremi & medii maioris. Igitur 15 - 1 R erit ſumma aliorum duorum. Ergo illorum productus 15 R - 1 Q æquabitur quadrato ſummæ mediorum. Quare ſi de 1 Q tollas 15 R - 1 Q, *Lem. 18. Lem. 6.* reſiduum 2 Q - 15 R erit æquale interuallo quadratorum dato 108. Igitur 1 Q æquatur $54 + \frac{15 R}{2}$ & fit 1 R, ſiue ſumma duorum maiorum 12; quæ ſi tollatur de 15, reſtabit 3 pro ſumma duorum minorum. Si verò 12 ducatur in 3, fiet 36, cuius latus 6 eſt ſumma mediorum. *Lem. 18.* inde verò multis viis cognoſcuntur ſinguli 1. 2. 4. 8.

Hinc Canon.

CApe quadratum quadrantis ſummæ omnium, & eius quadrato adde dimidium differentiæ datæ: huius enim aggregati radix quadrata quadranti ſupra dicto addita exhibet ſummam maioris extremi & medii maioris.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data A B ſumma omnium. Et B C poſſit interuallum quadratorum ſummæ à duabus maioribus, & ſummæ à duabus mediis. Capiatur B D potens dimidium quadrati B C, & B E quadrans lineæ A B. Tùm centro E, interuallo E B, fiat circulus, & connexa I E producatur, ſecetque peripheriam circuli in punctis F & G.



Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes, ſiquidem quadratum B D quod eſt dimidium quadrati B C additur quadrato B E quadrantis totius A B, & fit quadratum D E cuius latus additum D G quadranti A B exhibet lineam D G. *47. primi.*

Dico autem lineam D G fore ſummam duarum maiorum ex quatuor quæſitis: ſit enim, ſi fieri poteſt, ſumma duarum maiorum inæqualis G D, & æqualis B K, ſumaturque B I æqualis G D. Igitur A K erit ſumma duarum minorum. Ergo rectangulum A K B æquabitur quadrato ſummæ mediarum. Sed cum B I ſit æqualis G D, & H B æqualis G F, erit etiam I H æqualis F D. Ergo rectangulum B I H æquatur rectangulo G D F, & quia B D eſt perpendicularis ad extremitatem diametri, tanget circulum, & rectangulum G D F, hoc eſt B I H æquabitur quadrato B D, ergo duplum rectangulum B I H, æquale erit quadrato B C. Cum igitur quadratum ſummæ mediarum plus quadrato B C debeat æquari quadrato ſummæ B K, erit duplum rectangulum B I H plus rectangulo A K B æquale quadrato B K.

Propoſ. 5. huius.

36. tertii.

36. tertii.

2. ſecundi. Sed quadratum B K æquatur rectangulis B K H & K B H.

K B H. Ergo rectangulum B K H plus rectangulo K B H eſt æquale duplo rectangulo B I H plus rectangulo A K B. Sed cum A H ſit æqualis H B erit rectangulum K B H æqualis duobus rectangulis D K H & A K B. Igitur rectangulum A K B plus duplo rectangulo B K H æquabitur rectangulo A K B plus duplo rectangulo B I H. Ergo dempto vtrinque communi rectangulo A K B, remanebit duplum rectangulum B K H æquale duplo rectangulo B I H pars toti vel totum parti. Quod eſt abſurdum. Igitur cum ſumma duarum maiorum non poſſit eſſe maior, nec minor B I, erit illi æqualis. Quod erat demonſtrandum. *8. ſecun.*

Iam autem his cognitis poteſt multis viis perueniri ad cognitionem ſingularum: ſi enim ſupra totam A B fiat ſemicirculus, & erigatur perpendicularis I L ad diametrum, erit I L ſumma mediarum. Data verò ſumma mediarum I L, & ſumma duarum minorum A I, vel duarum maiorum I B, facile cognoſcuntur ſingulæ, & hoc non ſemel præſtitum.

PROPOSITIO XXXVII.

Hoc idem problema aliter ſoluere.

DAtis iiſdem numeris 15 & 108. Ponatur 1 R pro ſumma duorum minorum, ergo ſumma duorum maiorum erit 15 - 1 R. Igitur 15 R - 1 Q vt ſupra æquabitur quadrato ſummæ mediorum. Et proinde ſi 15 R - 1 Q tollatur de quadrato ſummæ maiorum duorum 225 † 1 Q - 30 R, reſiduum 225 † 2 Q 4 R æquatur Interuallo quadratorum dato 108. Ergo 1 Q eſt æquale $\frac{45 R - 117}{2}$. Et fit 1 R, ſiue ſumma duorum minorum 3. quæ ſublata de 15, exhibet 12 pro ſumma duarum maiorum. Reliqua inuenientur vt prius. *Lem. 18; Lem. 6.*

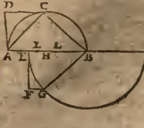
Hinc Canon.

DE quadrato ſummæ omnium tolle differentiam quadratorum datam: reſidui dimidium ſubtrahe ex quadrato tripli quadrantis ſummæ omnium: huius enim poſterioris reſidui radix quadrata ſupradictis tribus quadrantibus detracta, exhibet ſummam duorum minorum. Vnde nec duorum maiorum ſumma, nec ſinguli latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data ſumma omnium A B, & B C poſſit interuallum quadratorum. Supra A B fiat ſemicirculus, in quo inſcribatur B C, & connexa C B, fiat triangulum rectangulum & iſoſceles A D C ſupra baſim A C. Tùm ſumatur A E quadrans totius A B, & centro B, interuallo B E, fiat ſemicirculus inferior, ducaturque E F perpendicularis ad A B, & æqualis A D vel D C. Deinde ducta F G parallela A B producatur, donec occurrat peripheriæ in puncto G, ex quo ducatur G H perpendicularis ad A B.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici



partes, ſiquidem ex quadrato ſummæ omnium A B tollitur quadratum B C, & reſtat quadratum A C, cuius dimidium eſt quadratum A D, vel D C, vel E F vel G H. Ducta autem G B æqualis eſt B E, & quia E A eſt quadrans A B, E B æquatur tribus quadrantibus A B; ex quadrato verò E B, hoc eſt G B, tollitur quadratum G H, & reſtat quadratum H B, cuius latus H B detractum ex E B exhibet E H.

47 primi.

Dico autem E H fore ſummam duarum minorum ex quatuor quæſitis, ſit enim, ſi fieri poteſt, illa ſumma inæqualis E H, & æqualis E L, quoniam rectangulum ſub ſumma duarum minorum in ſummam duarum maiorum, æquatur quadrato ſummæ mediarum, ergo rectangulum ſub ſumma duarum minorum in ſummam omnium erit æquale quadratis ſummæ mediarum & ſummæ duarum minorum; igitur rectangulum ſub ſumma duorum minorum E L, in E B, æqualem tribus quadrantibus A B æquabitur tribus quadrantibus quadrati ſummæ mediarum & quadrati ſumma duarum minorum, & proinde rectangulum E L in E I duplam E B erit æquale ſex quadrantibus quadrati ſummæ mediarum & quadrati ſummæ duarum minorum. Ergo ſi ex rectangulo I E L tollas quadratum E L reſtabit rectangulum E L I æquale ſex quadrantibus quadrati ſummæ mediarum plus dimidio quadrati ſummæ duarum minorum. Igitur duplum quadratum E L I æquabitur triplo quadrato ſummæ mediarum plus quadrato ſummæ duarum minorum.

5 Prop. huius.

3. ſec.

3 ſecundi.

Atqui tollendo interuallum quadratorum ſummæ mediarum de quadrato ſummæ duarum maiorum; remanet quoque triplum quadratum ſummę mediarum plus quadrato ſummæ duarum minorum; igitur tollendo quadratum B C de quadrato A B, reſtat quadratum A C æquale duplo rectangulo E L I. Ergo quadratum A D vel C D, hoc eſt E F, hoc eſt G H, hoc eſt rectangulum E H I, æquatur rectangulo E L I. Quod eſt abſurdum, & contra quintam ſecundi elementorum. Et proinde ſumma duarum minorum nec poterit eſſe maior, nec minor E H. Igitur illi æqualis erit. Quod erat demonſtrandum.

14. Prop. huius.

8. ſexti.

4 ſexti.

7. ſexti.

PROPOSITIO XXXVIII.

Data ſumma omnium, & interuallo quadratorum ſummæ mediarum & ſummæ duarum minorum, inuenire quatuor quantitates continue proportionales.

ESto datus numerus 15 pro ſumma numerorum. Et 27. pro interuallo quadratorum. Ponatur 1 R pro ſumma duorum minorum. Ergo ſumma duorum maiorum erit 15 - 1 R. Et proinde multiplicando 15 - 1 R in 1 R, habebis quadratum ſummę mediorum 15 R - 1 Q. Lem. 18. Lem. 6. Inde igitur ſi tollas 1 Q, reſiduum 15 R - 2 Q æquabitur interuallo quadratorum dato 27. Et ita, 1 Q erit ęquale $\frac{15\,R - 27}{2}$. Et fit 1 R, ſiue ſumma duorum minorum 3. Quæ ſi tollatur de 15, reſtat ſumma duorum maiorum 12. Et multiplicando 12 in 3, habebis 36 pro quadrato ſummæ mediarum. Vnde 6 erit ſumma mediorum. Et ſinguli 1. 2. 4. 8.

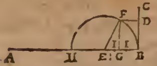
Hinc Canon.

EX quadrato quadrantis ſummę omnium tolle dimidium differentiæ datæ: reſidui radix quadrata ſupradicto detracta quadranti, exhibebit ſummam duorum minorum. Vnde nec duorum maiorum ſumma, nec ſinguli latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data ſumma omnium A B, linea vero B C poſſit interuallum quadratorum ſummę à mediis & ſummę à duabus minoribus conflatę. Sumatur B D potens dimidium quadratum B C, & B E quadrans totius A B,

& centro E, interuallo E B, deſcribatur ſemicirculus, ductaque D F parallela B A occurrat peripheriæ in puncto F, ex quo demittatur F G perpendicularis ad A B.



Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis partes; ſiquidem ex quadrato E F, hoc eſt E B quadrantis totius A B, tollitur quadratum F G, hoc eſt B D, dimidium quadrati B C, & reſtat quadratum E G, cuius latus E G detractum eidem quadranti B E, exhibet G B. *47. primi.*

Dico autem lineam G B fore ſummam duarum minorum ex quatuor quæſitis. Sit enim, ſi fieri poteſt, eiuſmodi ſumma duarum minorum inæqualis B G, & æqualis B I. Ergo A I, erit ſumma duarum maiorum. Igitur rectangulum A I B æquatur quadrato ſummæ mediarum. Sed cum A H ſit æqualis H B, rectangulum A I B æquatur quadrato I B & duplo rectangulo H I B, inde igitur tollendo quadratum I B remanebit duplum rectangulum H I B æquale interuallo quadratorum ſummæ mediarum & ſummæ duarum minorum. Ergo duplum rectangulum H I B æquatur quadrato B C. Ergo rectangulum H I B eſt æquale quadrato B D, hoc eſt F G, hoc eſt rectangulo H G B. Quod eſt abſurdum & contra quintam ſecundi. Et proinde ſumma duarum minorum non poteſt eſſe maior nec minor B G. Igitur erit illi æqualis. Quod erat demonſtrandum. *5. Propoſ. huius.* *1. ſecundi.*

40, & interuallum quadratorum differentię ab extremis, & differentiæ à mediis eſt 640. Quod erat faciendum. Similiter procedi debet in Effectione Geometrica.

PROPOSITIO XXXV.

Hoc idem problema alio modo perficere.

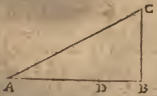
DAtis iiſdem 40 & 640. Ponatur 1 R pro ſumma Append. 6. huius. extremorum. Ergo 40 - 1 R erit ſumma mediorum. Igitur per theorema ſupradictum erit quadratum ſummæ extremorum 1 Q æquale quadrato ſummæ mediorum 1600 ┼ 1 Q - 80 R plus differentia data 640. Ergo 2240 ęquabuntur 80 R. Et fit 1 R, ſiue ſumma extremorum 28. Reliqua vt prius.

Hinc Canon.

QVadrato ſummæ omnium adde differentiam datam: ſummam factam diuide per duplum ſummæ omnium, & habebis ſummam extremorum, vnde nec mediorum ſumma, nec ſinguli latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data ſumma omnium A B, & B C poſſit interuallum quadratorum. Connectantur illæ ad angulos rectos & ducatur A C. Tùm fiat vt dupla A B ad A C, ita A C ad A D.



Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis partes, ſiquidem quadratum B C 47. primi. additur quadrato A B, & fit quadratum A C. Quoniam 17. ſexti. autem fit vt dupla A B ad A C; ita A C ad A D; erit

quadratum A C æquale rectangulo ex dupla A B in A D. Et propterea quadratum A C diuiditur per duplam A B, & fit linea A D, pro quotiente Geometrico.

Dico verò lineam A D fore ſummam extremarum de quatuor quæſitis. Nam quadratum A C ęquatur quadratis A B & B C, quadratum autem A B eſt æquale quadratis partium A D, D B & duplo rectanguli A D B; ergo quadratum A C æquale eſt quadratis B C, A D, D B & duplo rectanguli A D B. Sed iam probatum eſt idem quadratum A C æquari rectangulo ex dupla A B in A D: hoc vero rectangulum æquatur duplo quadrato A D, & duplo rectangulo A D B. Igitur duplum quadratum A D plus duplo rectangulo A D B eſt æquale quadratis B C, A D, D B, plus duplo rectangulo A D B. Demptis ergo iis, quæ ſunt communia vtrique parti æquationis, reſtabit quadratum A D æquale quadratis B C & D B. Et proinde quadratum A D differt à quadrato D B, per quadratum B C. *4 ſecundi.* *1. ſecundi.*

Si ergo ad datam ſummam extremarum A D, & ſummam mediarum D B, inueniantur quatuor continuè proportionales per aliquam è ſex prioribus propoſitionibus huius, erunt illę ſimul ſumptę ęquales ſummę A B, & inſuper quadratum ſummæ extremarum differt à quadrato ſummæ mediarum, per quadratum B C, ſed eadem eſt differentia quadratorum differentiæ ab extremis, & differentiæ à mediis, quæ quadratorum ſummæ ab extremis, & ſummæ à mediis. Ergo inuentæ ſunt quatuor lineæ proportionales quarum ſumma A B, itaut differentia quadratorum differentiæ ab extremis, & differentiæ à mediis æquetur quadrato B C. Quod erat demonſtrandum. *Append. Propoſ. 6. huius.*

Appendix.

HIc adnotandum eſt poſſe ſolui tum numericè tum Geometricè duo ſequentia problemata. Primum: data ſumma differentiarum primæ à ſecunda, ſecundæ à tertia, & tertiæ à quarta, & interuallo quadratorum ſummæ ab extremis, & ſummæ à mediis inuenire quatuor quantitates continuè proportionales. Siquidem ſumma differentiarum erit æqualis differentiæ extremarum, item illæ tres differentiæ erunt in continua & in eadem cum quantitatibus quæſitis ratione, & differentia quadratorum data ęquabitur quadrato ſummæ differentiarum datæ minus quadrato differentię mediarum: & proinde ſi ex quadrato ſummæ differentiarum datæ tollatur interuallum datum, habebitur quadratum differentiæ mediarum.

Secundum problema eſt eiuſmodi: data ſumma differentiarum ab extremis & à mediis, & interuallo quadratorum ſummæ extremarum & ſummæ mediarum inuenire ſingulas. Hoc enim problema idem eſt ac ſi iuberetur data ſumma duarum quantitatum & interuallo quadratorum ab ipſis ortorum inuenire ſingulas. Vnde inuenientur differentiæ extremarum, & mediarum, & ita per ſeptimam & ſeq. Propoſ. huius, inuenientur ſingulæ quatuor quantitates.

Corollarium.

SI fuerint quatuor quantitates continuè proportionales, erit vt ſumma omnium ad differentiam ſummę mediarum & ſummæ extremarum; ita quadratum ſummæ omnium ad differentiam quadratorum differentiæ ab extremis & differentiæ à mediis, vel ad differentiam quadratorum ſummæ ab extremis, & ſummæ à mediis. Demonſtratio clara eſt ex figura Propoſitionis pręceden-

tis: eſt enim propter æquiangulitatem triangulorum, vt A B ad B C; ita B C ad B E ergo vt A B ad B E; ita quadratum A B ad quadratum B C. Sed B E eſt differentia ſummæ extremarum D B & ſummæ mediarum D E, hoc eſt A D, ergo vt ſumma omnium ad differentiam, &c. Quod erat demonſtrandum. *8. ſexti. 4. ſexti. 20. ſexti.*

PROPOSITIO XXXVI.

Data ſumma quatuor quantitatum continue proportionalium, & interuallo quadratorum ſummæ mediarum, & ſummæ maioris extremæ & mediæ maioris diſtinguere ſingulas.

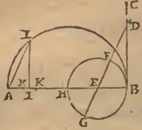
ESto data ſumma quatuor numerorum continuè proportionalium 15 & interuallum quadratorum 108. Ponatur 1 R pro ſumma maioris extremi & medii maioris. Igitur 15 - 1 R erit ſumma aliorum duorum. Ergo illorum productus 15 R - 1 Q æquabitur quadrato ſummæ mediorum. Quare ſi de 1 Q tollas 15 R - 1 Q, *Lem. 18.* reſiduum 2 Q - 15 R erit æquale interuallo quadratorum *Lem. 6.* dato 108. Igitur 1 Q æquatur 54 † $\frac{15\ R}{2}$ & fit 1 R, ſiue ſumma duorum maiorum 12; quæ ſi tollatur de 15, reſtabit 3 pro ſumma duorum minorum. Si verò 12 ducatur in 3, fiet 36, cuius latus 6 eſt ſumma mediorum. *Lem. 18.* inde verò multis viis cognoſcuntur ſinguli 1. 2. 4. 8.

Hinc Canon.

CApe quadratum quadrantis ſummæ omnium, & eius quadrato adde dimidium differentiæ datæ: huius enim aggregati radix quadrata quadranti ſupra dicto addita exhibet ſummam maioris extremi & medii maioris.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data A B ſumma omnium. Et B C poſſit interuallum quadratorum ſummæ à duabus maioribus, & ſummæ à duabus mediis. Capiatur B D potens dimidium quadrati B C, & B E quadrans lineæ A B. Tùm centro E, interuallo E B, fiat circulus, & connexa I E producatur, ſecetque peripheriam circuli in punctis F & G.



Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes, ſiquidem quadratum B D quod eſt dimidium quadrati B C additur quadrato B E quadrantis totius

47. primi. A B, & fit quadratum D E cuius latus additum D G quadranti A B exhibet lineam D G.

Dico autem lineam D G fore ſummam duarum maiorum ex quatuor quæſitis: ſit enim, ſi fieri poteſt, ſumma duarum maiorum inæqualis G D, & æqualis B K, ſumaturque B I æqualis G D. Igitur A K erit ſumma duarum minorum. Ergo rectangulum A K B æquabitur quadrato ſummæ mediarum. Sed cum B I ſit æqualis G D, & H B æqualis G F, erit etiam I H æqualis F D. Ergo rectangulum B I H æquatur rectangulo G D F, & quia B D eſt perpendicularis ad extremitatem diametri, tanget circulum, & rectangulum G D F, hoc eſt B I H æquabitur quadrato B D, ergo duplum rectangulum B I H, æquale erit quadrato B C. Cum igitur quadratum ſummæ mediarum plus quadrato B C debeat æquari quadrato ſummæ B K, erit duplum rectangulum B I H plus rectangulo A K B æquale quadrato B K.

Propoſ. 5. huius. 36. tertii. 36 tertii.

2. ſecundi. Sed quadratum B K æquatur rectangulis B K H & K B H.

K B H. Ergo rectangulum B K H plus rectangulo K B H eſt æquale duplo rectangulo B I H plus rectangulo A K B. Sed cum A H ſit æqualis H B erit rectangulum K B H æqualis duobus rectangulis D K H & A K B. Igitur rectangulum A K B plus duplo rectangulo B K H æquabitur rectangulo A K B plus duplo rectangulo B I H. Ergo dempto vtrinque communi rectangulo A K B, remanebit duplum rectangulum B K H æquale duplo rectangulo B I H pars toti vel totum parti. Quod eſt abſurdum. Igitur cum ſumma duarum maiorum non poſſit eſſe maior, nec minor B I, erit illi æqualis. Quod erat demonſtrandum. *1. ſecun. 7*

Iam autem his cognitis poteſt multis viis perueniri ad cognitionem ſingularum: ſi enim ſupra totam A B fiat ſemicirculus, & erigatur perpendicularis I L ad diametrum, erit I L ſumma mediarum. Data verò ſumma mediarum I L, & ſumma duarum minorum A I, vel duarum maiorum I B, facile cognoſcuntur ſingulæ, & hoc non ſemel præſtitum.

PROPOSITIO XXXVII.

Hoc idem problema aliter ſoluere.

DAtis iiſdem numeris 15 & 108. Ponatur 1 R pro ſumma duorum minorum, ergo ſumma duorum maiorum erit 15 - 1 R. Igitur 15 R - 1 Q vt ſupra æquabitur quadrato ſummæ mediorum. Et proinde ſi 15 R - 1 Q tollatur de quadrato ſummæ maiorum duorum 225 † 1 Q - 30 R, reſiduum 225 † 2 Q 4 R æquatur Interuallo quadratorum dato 108. Ergo 1 Q eſt æquale $\frac{45\,R - 117}{2}$. Et fit 1 R, ſiue ſumma duorum minorum 3. quæ ſublata de 15, exhibet 12 pro ſumma duarum maiorum. Reliqua inuenientur vt prius. *Lem. 18. Lem. 6.*

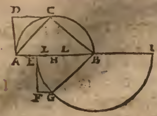
Hinc Canon.

DE quadrato ſummæ omnium tolle differentiam quadratorum datam: reſidui dimidium ſubtrahe ex quadrato tripli quadrantis ſummæ omnium: huius enim poſterioris reſidui radix quadrata ſupradictis tribus quadrantibus detracta, exhibet ſummam duorum minorum. Vnde nec duorum maiorum ſumma, nec ſinguli latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data ſumma omnium A B, & B C poſſit interuallum quadratorum. Supra A B fiat ſemicirculus, in quo inſcribatur B C, & connexa C B, fiat triangulum rectangulum & iſoſceles A D C ſupra baſim A C. Tùm ſumatur A E quadrans totius A B, & centro B, interuallo B E, fiat ſemicirculus inferior, ducaturque E F perpendicularis ad A B, & æqualis A D vel D C. Deinde ducta F G parallela A B producatur, donec occurrat peripheriæ in puncto G, ex quo ducatur G H perpendicularis ad A B.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes, ſiquidem ex quadrato ſummæ omnium A B tollitur quadratum B C, & reſtat quadratum A C, cuius dimidium eſt quadratum A D, vel D C, vel E F vel G H. Ducta autem G B æqualis eſt B E, & quia E A eſt quadrans A B,

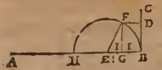


47 primi. E B æquatur tribus quadrantibus A B; ex quadrato verò E B, hoc eſt G B, tollitur quadratum G H, & reſtat quadratum H B, cuius latus H B detractum ex E B exhibet E H.

Dico autem E H fore ſummam duarum minorum ex quatuor quæſitis, ſit enim, ſi fieri poteſt, illa ſumma inæqualis E H, & æqualis E L, quoniam rectangulum ſub ſumma duarum minorum in ſummam duarum maiorum, æquatur quadrato ſummæ mediarum, *5. Prop. huius.* ergo rectangulum ſub ſumma duarum minorum in ſummam omnium erit æquale quadratis ſummæ mediarum *3. ſecu.* & ſummæ duarum minorum; igitur rectangulum ſub ſumma duorum minorum E L, in E B, æqualem tribus quadrantibus A B æquabitur tribus quadrantibus quadrati ſummæ mediarum & quadrati ſumma duarum minorum, & proinde rectangulum E L in E I duplam E B erit æquale ſex quadrantibus quadrati ſummæ mediarum & quadrati ſummæ duarum minorum. Ergo ſi ex rectangulo I E L tollas quadratum E L reſtabit rectangulum E L I æquale ſex quadrantibus quadrati ſummæ mediarum plus dimidio quadrati ſummæ duarum *3 ſecundi.* minorum. Igitur duplum quadratum E L I æquabitur triplo quadrato ſummæ mediarum plus quadrato ſummæ duarum minorum.

Atqui tollendo interuallum quadratorum ſummæ mediarum de quadrato ſummæ duarum maiorum; remanet *14. Prop. huius.* quoque triplum quadratum ſummę mediarum plus quadrato ſummæ duarum minorum; igitur tollendo quadratum B C de quadrato A B, reſtat quadratum A C æquale duplo rectangulo E L I. Ergo quadratum A D vel C D, hoc eſt E F, hoc eſt G H, hoc eſt rectangu- *8. ſexti.* lum E H I, æquatur rectangulo E L I. Quod eſt abſur- *4 ſexti.* dum, & contra quintam ſecundi elementorum. Et proin- *7. ſexti.* de ſumma duarum minorum nec poterit eſſe maior, nec minor E H. Igitur illi æqualis erit. Quod erat demonſtrandum.

& centro E, interuallo E B, deſcribatur ſemicirculus, ductaque D F parallela B A occurrat peripheriæ in puncto F, ex quo demittatur F G perpendicularis ad A B.



Manifeſtum eſt obſeruati ſingulas Canonis partes; ſiquidem ex quadrato E F, hoc eſt E B quadrantis totius A B, tollitur quadratum F G, hoc eſt B D, dimidium quadrati B C, & reſtat quadratum E G, cuius latus E G detractum eidem quadranti B E, exhibet G B. *47. primi.*

Dico autem lineam G B fore ſummam duarum minorum ex quatuor quæſitis. Sit enim, ſi fieri poteſt, eiuſmodi ſumma duarum minorum inæqualis B G, & æqualis B I. Ergo A I, erit ſumma duarum maiorum. Igitur rectangulum A I B æquatur quadrato ſummæ mediarum. Sed cum A H ſit æqualis H B, rectangulum A I B æquatur quadrato I B & duplo rectangulo H I B, inde igitur tollendo quadratum I B remanebit duplum rectangulum H I B æquale interuallo quadratorum ſummæ mediarum & ſummæ duarum minorum. Ergo duplum rectangulum H I B æquatur quadrato B C. Ergo rectangulum H I B eſt æquale quadrato B D, hoc eſt F G, hoc eſt rectangulo H G B. Quod eſt abſurdum & contra quintam ſecundi. Et proinde ſumma duarum minorum non poteſt eſſe maior nec minor B G. Igitur erit illi æqualis. Quod erat demonſtrandum. *5. Propoſ. huius.* *1. ſecundi.*

40, & interuallum quadratorum differentię ab extremis, & differentiæ à mediis eſt 640. Quod erat faciendum. Similiter procedi debet in Effectione Geometrica.

PROPOSITIO XXXV.

Hoc idem problema alio modo perficere.

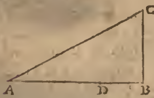
Datis iiſdem 40 & 640. Ponatur 1 R pro ſumma extremorum. Ergo 40 - 1 R erit ſumma mediorum. Append. 6. huius. Igitur per theorema ſupradictum erit quadratum ſummæ extremorum 1 Q æquale quadrato ſummæ mediorum 1600 + 1 Q - 80 R plus differentia data 640. Ergo 2240 ęquabuntur 80 R. Et fit 1 R, ſiue ſumma extremorum 28. Reliqua vt prius.

Hinc Canon.

Quadrato ſummæ omnium adde differentiam datam: ſummam factam diuide per duplum ſummæ omnium, & habebis ſummam extremorum, vnde nec mediorum ſumma, nec ſinguli latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data ſumma omnium A B, & B C poſſit interuallum quadratorum. Connectantur illæ ad angulos rectos & ducatur A C. Tùm fiat vt dupla A B ad A C, ita A C ad A D.



Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis partes, ſiquidem quadratum B C additur quadrato A B, & fit quadratum A C. 47. primi. Quoniam autem fit vt dupla A B ad A C; ita A C ad A D; erit 17. ſexti.

quadratum A C æquale rectangulo ex dupla A B in A D. Et propterea quadratum A C diuiditur per duplam A B, & fit linea A D, pro quotiente Geometrico.

Dico verò lineam A D fore ſummam extremarum de quatuor quæſitis. Nam quadratum A C æquatur quadratis A B & B C, quadratum autem A B eſt æquale quadratis partium A D, D B & duplo rectanguli A D B; ergo quadratum A C æquale eſt quadratis B C, A D, D B & duplo rectanguli A D B. Sed iam probatum eſt idem quadratum A C æquari rectangulo ex dupla A B in A D: hoc vero rectangulum æquatur duplo quadrato A D, & duplo rectangulo A D B. Igitur duplum quadratum A D plus duplo rectangulo A D B eſt æquale quadratis B C, A D, D B, plus duplo rectangulo A D B. Demptis ergo iis, quæ ſunt communia vtrique parti æquationis, reſtabit quadratum A D æquale quadratis B C & D B. Et proinde quadratum A D differt à quadrato D B, per quadratum B C. *4 ſecundi.* *1. ſecundi.*

Si ergo ad datam ſummam extremarum A D, & ſummam mediarum D B, inueniantur quatuor continuè proportionales per aliquam è ſex prioribus propoſitionibus huius, erunt illę ſimul ſumptę ęquales ſummę A B, & inſuper quadratum ſummæ extremarum differt à quadrato ſummæ mediarum, per quadratum B C, ſed eadem eſt differentia quadratorum differentiæ ab extremis, & differentiæ à mediis, quæ quadratorum ſummæ ab extremis, & ſummæ à mediis. Ergo inuentæ ſunt quatuor lineæ proportionales quarum ſumma A B, ita ut differentia quadratorum differentiæ ab extremis, & differentiæ à mediis æquetur quadrato B C. Quod erat demonſtrandum. *Append. Propoſ. 6. huius.*

Appendix.

HIc adnotandum eſt poſſe ſolui tum numericè tum Geometricè duo ſequentia problemata. Primum: data ſumma differentiarum primæ à ſecunda, ſecundæ à tertia, & tertiæ a quarta, & interuallo quadratorum ſummæ ab extremis, & ſummæ à mediis inuenire quatuor quantitates continuè proportionales. Siquidem ſumma differentiarum erit æqualis differentiæ extremarum, item illæ tres differentiæ erunt in continua & in eadem cum quantitatibus quæſitis ratione, & differentia quadratorum data ęquabitur quadrato ſummæ differentiarum datæ minus quadrato differentię mediarum: & proinde ſi ex quadrato ſummæ differentiarum datæ tollatur interuallum datum, habebitur quadratum differentiæ mediarum.

Secundum problema eſt eiuſmodi: data ſumma differentiarum ab extremis & à mediis, & interuallo quadratorum ſummæ extremarum & ſummæ mediarum inuenire ſingulas. Hoc enim problema idem eſt ac ſi iuberetur data ſumma duarum quantitatum & interuallo quadratorum ab ipſis ortorum inuenire ſingulas. Vnde inuenientur differentiæ extremarum, & mediarum, & ita per ſeptimam & ſeq. Propoſ. huius, inuenientur ſingulæ quatuor quantitates.

Corollarium.

SI fuerint quatuor quantitates continuè proportionales, erit vt ſumma omnium ad differentiam ſummę mediarum & ſummæ extremarum; ita quadratum ſummæ omnium ad differentiam quadratorum differentiæ ab extremis & differentiæ à mediis, vel ad differentiam quadratorum ſummæ ab extremis, & ſummæ à mediis. Demonſtratio clara eſt ex figura Propoſitionis pręceden-

tis: eſt enim propter æquiangulcitatem triangulorum, vt A B ad B C; ita B C ad B E ergo vt A B ad B E; ita quadratum A B ad quadratum B C. Sed B E eſt differentia ſummæ extremarum D B & ſummæ mediarum D E, hoc eſt A D, ergo vt ſumma omnium ad differentiam, &c. Quod erat demonſtrandum. *8. ſexti.* *4. ſexti.* *20. ſexti.*

PROPOSITIO XXXVI.

Data ſumma quatuor quantitatum continue proportionalium, & interuallo quadratorum ſummæ mediarum, & ſummæ maioris extremæ & mediæ maioris diſtinguere ſingulas.

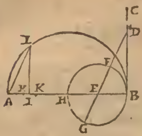
ESto data ſumma quatuor numerorum continuè proportionalium 15 & interuallum quadratorum 108. Ponatur 1 R pro ſumma maioris extremi & medii maioris. Igitur 15 - 1 R erit ſumma aliorum duorum. Ergo illorum productus 15 R - 1 Q æquabitur quadrato ſummæ mediorum. Quare ſi de 1 Q tollas 15 R - 1 Q, reſiduum 2 Q - 15 R erit æquale interuallo quadratorum dato 108. Igitur 1 Q æquatur 54 † $\frac{15\ R}{2}$ & fit 1 R, ſiue ſumma duorum maiorum 12; quæ ſi tollatur de 15, reſtabit 3 pro ſumma duorum minorum. Si verò 12 ducatur in 3, fiet 36, cuius latus 6 eſt ſumma mediorum. inde verò multis viis cognoſcuntur ſinguli 1. 2. 4. 8. *Lem. 18.* *Lem. 6.* *Lem. 18.*

Hinc Canon.

CApe quadratum quadrantis ſummæ omnium, & eius quadrato adde dimidium differentiæ datæ: huius enim aggregati radix quadrata quadranti ſupra dicto addita exhibet ſummam maioris extremi & medii maioris.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data A B ſumma omnium. Et B C poſſit interuallum quadratorum ſummæ à duabus maioribus, & ſummæ à duabus mediis. Capiatur B D potens dimidium quadrati B C, & B E quadrans lineæ A B. Tùm centro E, interuallo E B, fiat circulus, & connexa I E producatur, ſecetque peripheriam circuli in punctis F & G.



Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes, ſiquidem quadratum B D quod eſt dimidium quadrati B C additur quadrato B E quadrantis totius A B, & fit quadratum D E cuius latus additum D G quadranti A B exhibet lineam D G.

47. *primi.*

Dico autem lineam D G fore ſummam duarum maiorum ex quatuor quæſitis: ſit enim, ſi fieri poteſt, ſumma duarum maiorum inæqualis G D, & æqualis B K, ſumaturque B I æqualis G D. Igitur A K erit ſumma duarum minorum. Ergo rectangulum A K B æquabitur quadrato ſummæ mediarum. Sed cum B I ſit æqualis G D, & H B æqualis G F, erit etiam I H æqualis F D. Ergo rectangulum B I H æquatur rectangulo G D F, & quia B D eſt perpendicularis ad extremitatem diametri, tanget circulum, & rectangulum G D F, hoc eſt B I H æquabitur quadrato B D, ergo duplum rectangulum B I H, æquale erit quadrato B C. Cum igitur quadratum ſummæ mediarum plus quadrato B C debeat æquari quadrato ſummæ B K, erit duplum rectangulum B I H plus rectangulo A K B æquale quadrato B K.

Propoſ. 5. huius. *36. tertii.* *36 tertii.*

2. ſecundi. Sed quadratum B K æquatur rectangulis B K H & K B H.

K B H. Ergo rectangulum B K H plus rectangulo K B H eſt æquale duplo rectangulo B I H plus rectangulo A K B. Sed cum A H ſit æqualis H B erit rectangulum K B H æqualis duobus rectangulis D K H & A K B. Igitur rectangulum A K B plus duplo rectangulo B K H æquabitur rectangulo A K B plus duplo rectangulo B I H. Ergo dempto vtrinque communi rectangulo A K B, remanebit duplum rectangulum B K H æquale duplo rectangulo B I H pars toti vel totum parti. Quod eſt abſurdum. Igitur cum ſumma duarum maiorum non poſſit eſſe maior, nec minor B I, erit illi æqualis. Quod erat demonſtrandum. *1. ſecun-*

Iam autem his cognitis poteſt multis viis perueniri ad cognitionem ſingularum: ſi enim ſupra totam A B fiat ſemicirculus, & erigatur perpendicularis I L ad diametrum, erit I L ſumma mediarum. Data verò ſumma mediarum I L, & ſumma duarum minorum A I, vel duarum maiorum I B, facile cognoſcuntur ſingulæ, & hoc non ſemel præſtitum.

PROPOSITIO XXXVII.

Hoc idem problema aliter ſoluere.

DAtis iiſdem numeris 15 & 108. Ponatur 1 R pro ſumma duorum minorum, ergo ſumma duorum maiorum erit 15 - 1 R. Igitur 15 R - 1 Q vt ſupra æquabitur quadrato ſummæ mediorum. Et proinde ſi 15 R - 1 Q tollatur de quadrato ſummæ maiorum duorum 225 † 1 Q - 30 R, reſiduum 225 † 2 Q 4 R æquatur Interuallo quadratorum dato 108. Ergo 1 Q eſt æquale $\frac{45 R - 117}{2}$. Et fit 1 R, ſiue ſumma duorum minorum 3. quæ ſublata de 15, exhibet 12 pro ſumma duarum maiorum. Reliqua inuenientur vt prius. *Lem. 18. Lem. 6.*

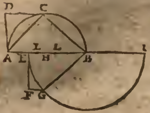
Hinc Canon.

DE quadrato ſummæ omnium tolle differentiam quadratorum datam: reſidui dimidium ſubtrahe ex quadrato tripli quadrantis ſummæ omnium: huius enim poſterioris reſidui radix quadrata ſupradictis tribus quadrantibus detracta, exhibet ſummam duorum minorum. Vnde nec duorum maiorum ſumma, nec ſinguli latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data ſumma omnium A B, & B C poſſit interuallum quadratorum. Supra A B fiat ſemicirculus, in quo inſcribatur B C, & connexa C B, fiat triangulum rectangulum & iſoſceles A D C ſupra baſim A C. Tùm ſumatur A E quadrans totius A B, & centro B, interuallo B E, fiat ſemicirculus inferior, ducaturque E F perpendicularis ad A B, & æqualis A D vel D C. Deinde ducta F G parallela A B producatur, donec occurrat peripheriæ in puncto G, ex quo ducatur G H perpendicularis ad A B.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes, ſiquidem ex quadrato ſummæ omnium A B tollitur quadratum B C, & reſtat quadratum A C, cuius dimidium eſt quadratum A D, vel D C, vel E F vel G H. Ducta autem G B æqualis eſt B E, & quia E A eſt quadrans A B,

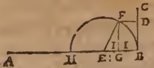


47 primi. E B æquatur tribus quadrantibus A B; ex quadrato verò E B, hoc eſt G B, tollitur quadratum G H, & reſtat quadratum H B, cuius latus H B detractum ex E B exhibet E H.

Dico autem E H fore ſummam duarum minorum ex quatuor quæſitis, ſit enim, ſi fieri poteſt, illa ſumma inæqualis E H, & æqualis E L, quoniam rectangulum ſub ſumma duarum minorum in ſummam duarum maiorum, æquatur quadrato ſummæ mediarum, *5. Prop. huius.* ergo rectangulum ſub ſumma duarum minorum in ſummam omnium erit æquale quadratis ſummæ mediarum *3. ſec.* & ſummæ duarum minorum; igitur rectangulum ſub ſumma duorum minorum E L, in E B, æqualem tribus quadrantibus A B æquabitur tribus quadrantibus quadrati ſummæ mediarum & quadrati ſumma duarum minorum, & proinde rectangulum E L in E I duplam E B erit æquale ſex quadrantibus quadrati ſummæ mediarum & quadrati ſummæ duarum minorum. Ergo ſi ex rectangulo I E L tollas quadratum E L reſtabit rectangulum E L I æquale ſex quadrantibus quadrati ſummæ mediarum plus dimidio quadrati ſummæ duarum *3 ſecundi.* minorum. Igitur duplum quadratum E L I æquabitur triplo quadrato ſummæ mediarum plus quadrato ſummæ duarum minorum.

Atqui tollendo interuallum quadratorum ſummæ mediarum de quadrato ſummæ duarum maiorum; remanet *14. Prop. huius.* quoque triplum quadratum ſummę mediarum plus quadrato ſummæ duarum minorum; igitur tollendo quadratum B C de quadrato A B, reſtat quadratum A C æquale duplo rectangulo E L I. Ergo quadratum A D vel C D, hoc eſt E F, hoc eſt G H, hoc eſt rectangu- *8. ſexti.* lum E H I, ęquatur rectangulo E L I. Quod eſt abſur- *4 ſexti.* dum, & contra quintam ſecundi elementorum. Et proin- *7. ſexti.* de ſumma duarum minorum nec poterit eſſe maior, nec minor E H. Igitur illi æqualis erit. Quod erat demonſtrandum.

& centro E, interuallo E B, deſcribatur ſemicirculus, ductaque D F parallela B A occurrat peripheriæ in puncto F, ex quo demittatur F G perpendicularis ad A B.



Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis partes; ſiquidem ex quadrato E F, hoc eſt E B quadrantis totius A B, tollitur quadratum F G, hoc eſt B D, dimidium quadrati B C, & reſtat quadratum E G, cuius latus E G detractum eidem quadranti B E, exhibet G B. *47. primi.*

Dico autem lineam G B fore ſummam duarum minorum ex quatuor quæſitis. Sit enim, ſi fieri poteſt, eiuſmodi ſumma duarum minorum inæqualis B G, & æqualis B I. Ergo A I, erit ſumma duarum maiorum. Igitur rectangulum A I B æquatur quadrato ſummæ mediarum. Sed cum A H ſit æqualis H B, rectangulum A I B æquatur quadrato I B & duplo rectangulo H I B, inde igitur tollendo quadratum I B remanebit duplum rectangulum H I B æquale interuallo quadratorum ſummæ mediarum & ſummæ duarum minorum. Ergo duplum rectangulum H I B æquatur quadrato B C. Ergo rectangulum H I B eſt æquale quadrato B D, hoc eſt F G, hoc eſt rectangulo H G B. Quod eſt abſurdum & contra quintam ſecundi. Et proinde ſumma duarum minorum non poteſt eſſe maior nec minor B G. Igitur erit illi æqualis. Quod erat demonſtrandum. *5. Propoſ. huius. 5. ſecundi.*

PROPOSITIO XXXIX.

Idem problema alio modo perficere.

DAtis iiſdem numeris 15 & 27. Ponatur ſumma duorum maiorum 1 R, ergo ſumma duorum minorum erit 15 - 1 R. Igitur vt prius, quadratum ſummæ mediorum eſt 15 R - 1 Q ex quo ſi tollatur quadratum ſummæ duorum minorum quod eſt 225 † 1 Q - 30 R; reſiduum 45 R - 2 Q - 225 æquatur interuallo quadratorum dato 27. Et ita 1 Q eſt æquale $\frac{45\ R}{2}$ - 126. Et fit 1 R ſiue ſumma duorum maiorum 12. Quæ ſi tollatur ex 15, reſtat 3 pro ſumma duorum minorum. Horum productus 36 æquatur quadrato ſummæ mediorum 6. Reliqua vt prius.

Lem. 18.
Lem. 6.

Hinc Canon.

QVadrato ſummæ omnium adde differentiam quadratorum datam; ſummę confectæ dimidium tolle de quadrato tripli quadrantis ſummæ omnium huius enim reſidui radix quadrata, ſupradictis addita tribus quadrantibus, exhibebit ſummam duorum maiorum. Vnde nec duorum minorum ſumma, nec ſinguli latebunt.

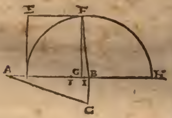
Hinc Effectio Geometrica.

SIt data ſumma omnium A B, & B C poſſit interuallum quadratorum. Coniungantur ad angulos rectos, & nectatur A C. Tum ſumatur A D quadrans A B, & centro B, interuallo B D, fiat ſemicirculus, erectaque D E perpendiculariter ad A B, & potente dimidium quadrati A C, ducatur E F parallela A B, producaturque donec occurrat peripheriæ in puncto F, ex quo ducatur

perpendicularis F G ad diametrum.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes, ſiquidem quadrato A B additur quadratum B C, & fit quadratum A C, cuius dimidium eſt quadratum D E, hoc eſt F G, quod tollitur ex quadrato B F; hoc eſt B D æqualis tribus quadrantibus ipſius A B, (ſumptus enim eſt A D quadrans) & remanet quadratum G B, cuius latus G B, additum ſupradictis tribus quadrantibus exhibet G H. *47 primi.*

Dico autem G H fore ſummam duarum maiorum ex quatuor quæſitis, ſit enim, ſi fieri poteſt, ſumma duarum maiorum inæqualis G H; & æqualis H I. Ergo quoniam D H, dupla D B, æquatur ſex quadrantibus ipſius A B, & H I æqualis eſt ſummæ duarum maiorum, erit D I æqualis ſummæ duarum minorum, plus dimidio ipſius A B. Et proinde rectangulũ H I D, æquabitur rectangulo ſub ſumma duarum maiorum, in ſummam duarum minorum, (hoc eſt quadrato ſummæ mediarum,) plus rectangulo ex ſumma duarum maiorum in dimidium ipſius A B. Ergo duplum rectanguli H I D eſt æquale duplo rectangulo ex ſumma duarum maiorum in ſummam duarum minorum, plus rectangulo ſub ſumma duarum maiorum in A B, rectangulum autem ſub ſumma duarum maiorum in A B ſummam omnium æquatur quadrato ſub ſumma duarum maiorum plus rectangulo ſub ſumma duarum maiorum in ſummam duarum minorum. Ergo rectangulum duplum H I D eſt æquale quadrato ſummæ duarum maiorum, plus triplo quadrato ſummæ duarum. *1 ſecundi.* *3. ſecundi.*



Cum igitur quadratum ſummæ mediarum ſit æquale rectangulo ſub ſumma duarum maiorum in ſummam

PROPOSITIO XL.

Data ſumma duarum minorum ex quatuor quantitatibus continue proportionalibus, & interuallo quadratorum ſummæ à duabus mediis, & ſummæ à duabus maioribus inuenire ſingulas.

ESto data ſumma numerorum 2. Et interuallum quadratorum 8 † ℞ 80. Ponatur ſumma duorum maiorum 1 R. Quæ multiplicata per ſummam duorum minorum 2, dabit 2 R pro quadrato ſummæ mediorum. *Lem. 18.*
Igitur ſi 2 R tollas de 1 Q., reſiduum 1 Q - 2 R æquabitur *Lem. 6.*
interuallo quadratorum dato 8 † ℞ 80. Ergo 1 Q erit æquale 8 † ℞ 80 † 2 R. Ex hoc igitur numero compoſito eruenda eſt radix quadrata pro more. Dimidium numeri radicum eſt 1, cuius quadratum 1 addi debet numero abſoluto 8 † ℞ 80, & fit ſumma 9 † ℞ 80. Cuius radix quadrata eſt ℞ 5 † 2, quæ ſi addatur cum dimidio numeri radicum 1, efficitur ℞ 5 † 3 pro valore vnius radadicis, hoc eſt pro ſumma duorum maiorum. Igitur multiplicando ℞ 5 † 3 per 2, fit ℞ 20 † 6, pro quadrato ſummæ mediorum: quare eius radix quadrata ℞ 5 † 1 erit ſumma mediorum. Reliqua inueniuntur vt prius: ſuntque ſinguli. 3 - ℞ 5 | ℞ 5 - 1 | 2 | ℞ 5 † 1. Et ſatisfaciunt quæſtioni.

Hinc Canon.

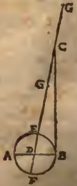
QVadrato quod fit à dimidio ſummæ numerorum adde differentiam quadratorum datam: huius enim ſummæ radix quadrata ſupradicto addita dimidio exhibet ſummam duorum maiorum. Vnde nec mediorum ſumma, nec ſinguli latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data ſumma duarum minorum A B, & B C poſſit interuallum quadratorum. Coniungantur ad angulos rectos, & diuiſa A B bifariam in D, centro D, interuallo A D, vel D B, fiat circulus, connexaque C D ſecet eius peripheriam in punctis E & F.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis partes, ſiquidem quadrato D B additur quadratum B C, & fit
47. primi. quadratum C D, cuius latus C D additum D F exhibet C F.

Dico autem lineam C F fore ſummam duarum maiorum ex quatuor quæſitis: ſit enim, ſi fieri poteſt, ſumma duarum maiorum inæqualis F C & æqualis F G. Ergo rectangulum G F E, ſub ſumma duarum maiorum in ſummam duarum minorum æquabitur quadrato ſummæ mediarum: cum igitur quadratum F G æquale ſit rectangulis G E F & F G E, erit rectan-



2. ſecundi. gulum F G E æquale differentiæ quadratorum ſummæ à duabus maioribus & ſummæ à duabus mediis. Ergo rectangulum F G E æquabitur quadrato B C. Sed linea B C perpendicularis eſt ad extremitatem diametri,
16 tertij. ergo tangit circulum, ergo quadratum B C æquale eſt
36 tertii. rectangulo F C E. Et proinde rectangulum F C E æquatur rectangulo F G E, pars toti, vel totum parti. Quod eſt abſurdum. Igitur ſumma duarum maiorum non poteſt eſſe maior nec minor F C. Ergo erit illi æqualis. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XLI.

Hoc idem problema aliter ſoluere.

DAtis iiſdem 2 & 8 † ℞ 80. Ponatur ſumma omnium 1 R. Ergo 1 R - 2 erit ſumma duorum maiorum. Ergo ſi ducatur 1 R - 2 in 2. Fiet quadratum ſummę mediorum 2 R - 4 quo ſublato de quadrato ſummæ duorum maiorum 1 R 2, quod quadratum eſt 1 Q † 4 - 4 R, reſiduum eſt 1 Q † 8 - 6 R & proinde erit æquatio inter 1 Q † 8 - 6 R & interuallum datum 8 † ℞ 80 & ita 1 Q erit ęquale ℞ 80 † 6 R. Et fit 1 R, ſiue ſumma omnium, ℞ 5 † 5 vnde ſi tollas ſummam duorum minorum datam 2. reſtabit ℞ 5 † 3 pro ſumma duorum maiorum. Reliqua inuenientur vt in Propoſ. præced. Eruntque ſinguli 3 - ℞ 5 | ℞ 5 - 1 | 2 | ℞ 5 † 1.

Lem. 18. *Lem. 6.*

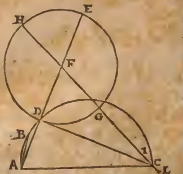
Hinc Canon.

EX differentia data tolle duplum quadratum ſummæ datæ: reſiduum adde quadrato quod fit à triplo dimidio ſummæ datæ: huius enim aggregati radix quadrata eidem triplo dimidio addita, exhibet ſummam omnium. Vnde nec ſumma duorum maiorum, nec ſinguli latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data ſumma linearum A B & differentia quadratorum æquetur quadrato A C. Supra A C fiat ſemicirculus in quo inſcribatur A D potens duplum quadratum A B & nectatur D C. Tùm producatur A D donec D E ſit tripla A B & ſupra D E fiat circulus integer cuius centrum F. Et nectatur producaturque C F ſecans circuli peripheriam in punctis G & H.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis partes, ſiquidem ex quadrato A C tollitur quadratum A D quod eſt duplum quadrati A B, & reſtat quadratum D C, tùm quia D E tripla eſt A B, erit D F æqualis tribus dimidiis ipſius A B, quadrato autem D F additur quadratum D C, & fit



quadratum F C, cuius latus F C additum H F, hoc eſt D F, exhibet H C.

Dico autem lineam H C fore ſummam quatuor linearum continuè proportionalium quæſitarum. Sit enim, ſi fieri poteſt, ſumma omnium inæqualis H C, & æqualis H I, ergo cum quadratum H I æquetur rectangulis I H G & H I G, cumque rectangulum ſub I G ſumma omnium in H G triplam ſummæ duarum minorum æquale ſit triplo quadrato ſummæ duarum minorum plus triplo quadrato ſummæ mediarum, erit rectangulum H I G æquale quadrato ſummæ duarum maiorum multato quadrato ſummæ mediarum minus duplo quadrato ſummæ duarum minorum. Sed quadratum A C æquatur quadrato ſummę duarum maiorum minus quadrato ſummæ mediarum, & illud quadratum A C multatur duplo quadrato ſummæ duarum minorum, nemque quadrato A D, quod eſt duplum quadrati A B.

2. ſecundi.
3. ſecundi.
14. huius.

Igitur quadratum D C eſt æquale quadrato ſummæ duarum maiorum, minus quadrato ſummæ mediarum, minus quadrato duplo ſummæ duarum minorum. Ergo quadratum D C eſt ęquale rectangulo H I G. Sed linea D C perpendicularis eſt ad extremitatem diametri, & proinde tangens. Et ita quadratum D C æquatur rectangulo H C G. Igitur rectangulum H C G eſt æquale re-

16. tertii.
36. tertii.

ſtangulo H I G pars toti, vel totum parti. Quod eſt abſurdum. Et proinde ſumma omnium non poteſt eſſe maior nec minor H C. Ergo erit illi æqualis. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XLII.

Data ſumma duarum maiorum ex quatuor quantitatibus continue proportionalibus, & interuallo quadratorum ſummæ à duabus minoribus, & ſummæ mediarum inuenire ſingulas.

ESto numerus ℞ 5 † 3 pro ſumma duorum maiorum. Et 2 † ℞ 20 pro interuallo quadratorum. Ponatur 1 R pro ſumma duorum minorum. Igitur ſi ſumma duorum maiorum ℞ 5 † 3 ducatur in 1 R, fiet quadratum ſummæ mediorum ℞ 5 Q † 3 R. Et proinde ſi ex ℞ 5 Q † 3 R tollatur 1 Q. Reſiduum ℞ 5 Q † 3 R - 1 Q erit æquale interuallo dato 2 † ℞ 20. Ergo poſt debitam reductionem 1 Q æquabitur ℞ 5 Q † 3 R - 2 - ℞ 20. Ex quo numero ſic cernitur radix quadrata, dimidium numeri radicum eſt ℞ $\frac{5}{4}$ † $\frac{3}{2}$ (numeri enim adfecti charactere coſſico tenent hic locum radicis) eius quadratum eſt $\frac{7}{2}$ † ℞ $\frac{45}{4}$ ex quo ſi tollas numerum abſolutum propter ſigna - reſiduum erit $\frac{3}{2}$ - ℞ $\frac{45}{16}$ cuius radix quadrata eſt ℞ $\frac{5}{4}$ - $\frac{1}{2}$ quæ detracta dimidio numeri radicum ℞ $\frac{5}{4}$ † $\frac{3}{2}$ exhibet 2 pro valore vnius radicis, hoc eſt pro ſumma duorum minorum. Quare ſi ducas 2. in ſummam duorum maiorum ℞ 5 † 3, efficies ℞ 20 † 6 pro quadrato ſummæ mediorum. Igitur eius radix qua- *Lem. 18.* *Lem. 6.*

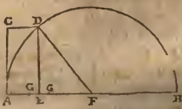
drata ℞ 5 + 1 erit ſumma mediorum. Ac propterea ſinguli ſunt 3 - ℞ 5 | ℞ 5 - 1 | 2 | ℞ 5 + 1.

Hinc Canon.

Ex quadrato dimidij ſummæ numerorum tolle datam differentiam quadratorum : reſidui radix quadrata ſupradicto detracta dimidio, exhibebit ſummam duorum minorum. Ac proinde nec mediorum ſumma, nec ſinguli latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data A B ſumma duarum maiorum, & linea A C poſſit differentiam quadratorum ſummæ à duabus minoribus & ſummæ mediarum. Supra A B, fiat ſemicirculus, & iuncta A C perpendiculariter ad A B, ducatur C D parallela A B, occurrens peripheriæ in puncto D, ex quo demittatur D E perpendicularis ad diametrum A B.



Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis propoſiti
47 primi. partes ; ſiquidem ducta D F ad centrum F, erit æqualis dimidio A B, & ex quadrato D F tollitur quadratum D E, hoc eſt C A, & relinquitur quadratum E F, cuius latus E F detractum A F exhibet A E.

Dico autem A E fore ſummam duarum minorum, ſit enim, ſi fieri poteſt, ſumma duarum minorum inæqualis A E & æqualis A G. Igitur rectangulum B A G ſub ſumma duarum maiorum in ſummam duarum mi-
3. ſecundi. norum, æquabitur quadrato ſummæ mediarum : ſed rectangulum B A G æquale eſt quadrato A G & re-

ctangulo B G A. Ergo rectangulum B G A æquatur quadrato A C, hoc eſt D E, hoc eſt rectangulo B E A: quod eſt abſurdum, & contra quintam ſecundi. Et proinde ſumma duarum minorum non poteſt eſſe maior nec minor A E. Igitur erit illi æqualis, Quod erat demonſtrandum. *8. ſexti.* *4. ſexti.* *17. ſexti.*

PROPOSITIO XLIII.

Hoc idem problema aliter ſoluere.

Datis iiſdem numeris ℞ 5 † 3 & 2 † ℞ 20 ponatur 1 R pro ſumma omnium. Ergo 1 R - ℞ 5 - 3 erit ſumma duorum minorum quæ multiplicata per ſummam duorum maiorum ℞ 5 † 3, facit quadratum ſummę mediorum ℞ 5 Q † 3 R - 14 - ℞ 180. Ex quo ſi tollas quadratum ſummæ duorum minorum 1 R - ℞ 5 - 3. Quod quadratum eſt 1 Q † 14 - ℞ 180 - ℞ 20 Q - 6 R, reſiduum ℞ 45 Q † 9 R - 28 - ℞ 720 - 1 Q æquabitur interuallo dato 2 † ℞ 20. Et poſt debitam reductionem, 1 Q æquale erit ℞ 45 Q † 9 R - 30 - ℞ 980. Ex quo ſic eruitur radix quadrata. Dimidium numeri radicum eſt ℞ $\frac{45}{4}$ † $\frac{9}{2}$ ex cuius quadrato $\frac{63}{2}$ † ℞ $\frac{3645}{4}$ ſi tollatur numerus abſolutus, reſiduum eſt $\frac{3}{2}$ - ℞ $\frac{5}{4}$ cuius radix quadrata eſt ℞ $\frac{5}{4}$ - $\frac{1}{2}$ quæ detracta dimidio numeri radicum ℞ $\frac{45}{4}$ † $\frac{9}{2}$ relinquit ℞ 5 † 5 pro ſumma omnium. Vnde ſi tollas ſummam duorum maiorum ℞ 5 † 3, habebis 2 pro ſumma duorum minorum. Singulique erunt 3 - ℞ 5 | ℞ 5 - 1 | 2 | ℞ 5 † 1. *Lem. 18.* *Lem. 6.*

Hinc Canon.

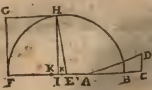
Dvplum quadratum ſummæ duorum maiorum iunge cum differentia data: ſummam confectam

tolle ex quadrato, quod fit à tribus dimidiis ſummæ duorum maiorum: reſidui huius radix quadrata ſupradictis tribus dimidiis detracta exhibet ſummam omnium. Vnde nec duorum minorum ſumma, nec ſinguli latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data A B ſumma duarum maiorum, & D C poſſit quadratum ſummæ mediarum multatum quadrato ſummæ duarum minorum. Sumatur A C potens duplum quadratum A B, tum A C & C D coniungantur ad angulos rectos, nectaturque A D. Producatur deinde B A donec A E ſit dimidium A B. Et centro E, interuallo E B deſcribatur ſemicirculus, cuius diameter F B, ad quam erigatur perpendiculariter F G æqualis A D, ductaque G H parallela diametro occurrat peripheriæ in puncto H, ex quo demittatur H I perpendicularis ipſi F B.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes; ſiquidem quadratum A C æquatur duplo quadrato A B & propter angulum rectum A C D, quadratum A C additur quadrato C D, fitque quadratum A D, hoc



eſt F G, hoc eſt I H, quod quadratum tollitur ex quadrato E H facto ſupra tres ſemiſſes ipſius A B, & relinquitur quadratum I E, cuius latus I E detractum ex F E exhibet F I.

Dico autem lineam F I fore ſummam omnium. Sit enim, ſi fieri poteſt, ſumma omnium inæqualis F I & æqualis F K igitur rectangulum B F K ſub tripla ſumma
1. ſecundi. duarum maiorum F B in ſummam omnium F K æquabitur triplo quadrato ſummæ duarum maiorum & triplo rectangulo ex ſumma duarum maiorum in ſummam duarum minorum. Si ergo ex rectangulo B F K tollatur

qua-

quadratum ſummę omnium F K quod æquale eſt quadrato ſummæ duarum maiorum, duplo rectanguli ſub ſumma duarum maiorum in ſummam duarum minorum, & quadrato ſummæ duarum minorum relinquetur rectangulum F I B æquale duplo quadrato ſummæ duarum maiorum, & rectangulo ſub ſumma duarum maiorum in ſummam duarum minorum (quod rectangulum ęquatur quadrato ſummæ mediarum) minus quadrato ſummę duarum minorum. Illis autem omnibus eſt æquale quadratum A D, hoc eſt F G, hoc eſt I H, hoc eſt rectangulum F I B. Igitur rectangulum F I B æquatur rectangulo F K B. Quod eſt abſurdum, & contra quintam ſecundi. Ergo ſumma omnium non poteſt eſſe inæqualis F I, ac proinde erit illi æqualis. Quod erat demonſtrandum. 4 ſecundi. 3. ſecun li. 8. ſexti 4 ſexti. 17 ſexti.

PROPOSITIO XLIV.

Data ſumma primæ & tertiæ ex quatuor quantitatibus continuè proportionalibus, cum plano ſub ſumma duarum priorum in differentiam duarum poſteriorum, inuenire ſingulas.

ESto data primò ſumma minoris extremæ & mediæ maioris 10 & planum 48. Ponatur 1 R pro differentia minoris extremæ & mediæ maioris, ergo ſumma illarum ducta in earum differentiam efficiet 10 R, pro differentia quadratorum minoris extremæ & mediæ maioris. Et quia in ſerie quatuor proportionalium duplum plani dati 96 multatum quadrato differentiæ poſitæ, exhibet 96 - 1 Q æquale producto ex ſumma data in poſitam differentiam, erunt 10 R æquales 96 - 1 Q. Ergo poſt debitam reductionem, 1 Q æquabitur 96 - 10 R Et fit 1 R, ſiue differentia minoris extremæ & maioris me- Lem. 5.

diæ 6. Quæ addita & detracta ſummæ datæ exhibet duplum maioris medii 16 & duplum minoris extremi 4. Lem. 1. Quare maior medius erit 8. & minor extremus 2. Singulique 2.4.8.16.

Eſto deinde data ſumma maioris extremi & medii minoris 10 & planum 12. Ponatur 1 R pro differentia maioris extremi & medii minoris. Igitur ſumma data 10 multiplicata in differentiam poſitam 1 R, exhibet 10 R pro Lem. 5. differentia quadratorum maioris extremi & medii minoris. Et quia in ſerie quatuor proportionalium duplum plani dati 24 plus quadrato differentiæ poſitæ 1 Q, exhibet 24 † 1 Q æquale producto ex ſumma data in differentiam poſitam, erunt 10 R æquales 24 † 1 Q. Et proinde 1 Q æquatur 10 R - 24. Fitque 1 R, ſiue differentia maioris extremi & medii minoris 6. Quæ addita & Lem. 1. detracta ſummæ datæ exhibet duplum maioris extremi 16 & duplum minoris medii 4. Quare maior extremus erit 8. Et minor medius 2. Singulique ordinati erunt 8.4.2.1.

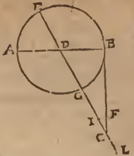
Hinc Canon.

QVadrato dimidiæ ſummæ minoris extremi & medii maioris adde duplum planum datum: huius enim aggregati radix quadrata multata dimidio ſummæ ſupradictæ exhibet differentiam minoris extremi & medii maioris. Vnde ſinguli non latebunt. Similiter ex quadrato dimidiæ ſummæ medii minoris & maioris extremi, tolle duplum planum datum: reſidui radix quadrata ſupradictæ ſummæ dimidio addita exhibet differentiam medii minoris & maioris extremi. Vnde ſinguli non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt A B ſumma minoris extremæ & maioris mediæ & B F linea potens rectangulum ſub ſumma duarum

priorum in differentiam duarum poſteriorum quocumque ordine ſumantur. Fiat circulus ſuper A B, ponaturque B F perpendicularis ipſi A B, & producatur B F donec B C poſſit duplum quadratum B F. Ducaturque C E per centrum circuli facti ſecans peripheriam in punctis E & G.



Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas prioris Canonis partes; ſiquidem quadrato dimidiæ ſummæ datæ B D, additur quadratum B C duplum quadrati B F, & fit quadratum C D: cuius latus CD multatum D G, exhibet GC.

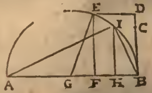
Dico autem lineam G C fore differentiam duarum linearum quarum A B eſt ſumma. Nam poſito quod AB ſit ſumma extremarum de tribus lineis proportionalibus, & quadratum B F ſit differentia quadratorum maioris & mediæ, erit G C differentia extremorum, vt diximus in libro primo: atqui in ſerie quatuor proportionalium cum differentię ſunt in continua & eadem cum quantitatibus proportione, erit vt differentia primæ & ſecundæ ad differentiam mediarum; ita ſecundæ ad tertiam, ſed vt ſecunda ad tertiam; ita ſumma mediarum ad ſummam tertiæ & quartæ; igitur vt differentia primæ & ſecundæ ad differentiam mediarum; ſic ſumma mediarum ad ſummam tertiæ & quartæ. Ac proinde rectangulum ſub extremis eſt æquale rectangulo ſub mediis: hoc eſt rectangulum ſub ſumma tertiæ & quartæ in differentiam primæ & ſecundæ, æquatur rectangulo ſub ſumma mediarum in differentiam mediarum. *Prop. 35.* *16 ſexti.*

Sed rectangulum ſub ſumma mediarum in differentiam mediarum, eſt æquale differentiæ quadratorum à mediis. Igitur rectangulum ſub ſumma duarum priorum in differentiam duarum poſteriorum (hoc eſt qua-

dratum B F) eſt æquale differentiæ quadratorum à mediis. Ergo cum ex quatuor lineis quæſitis tres minores ſint continuè proportionales, cumque ſumma extremarum de illis tribus ſit A B, & quadratum B F æquetur differentiæ quadratorum à media & maiore extrema, erit G C differentia earum linearum, quarum A B eſt ſumma. Quod erat demonſtrandum.

Propoſ. 2. lib. 1.

Similiter, ſit A B ſumma maioris extremæ & mediæ minoris, & B C poſſit rectangulum idem quod ſuprà. Coniungantur illæ lineæ ad angulos rectos, & fiat ſemicirculus ſupra A B, tùm producatur B C donec B D ſit poteſtate dupla ipſius B C, & ducatur D E parallela B A occurrens peripheriæ in puncto E, ex quo demittatur E F perpendiculariter ad diametrum A B.



Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas poſterioris Canonis partes; ſiquidem quadratum E F hoc eſt B D duplum quadrati B C tollitur ex quadrato ſemidiametri E G (ſumpto G centro ſemicirculi) & remanet quadratum G F, cuius latus G F additum A G, exhibet A F.

Dico autem lineam A F fore differentiam earum linearum quarum A B eſt ſumma. Nam poſito quod A B ſit ſumma extremarum de tribus lineis proportionalibus, & quadratum B C æquetur differentiæ quadratorum mediæ & minoris, erit A F differentia extremarum vt dictum eſt in libro primo. Sed in ſerie quatuor continuè proportionalium, rectangulum ſub ſumma duarum priorum in differentiam duarum poſteriorum, (hoc eſt ex hypotheſi quadratum B C) æquatur differentiæ quadratorum à mediis, igitur cum A B ſit ſumma maioris extremæ & mediæ minoris, erit A F differentia maioris extremæ & mediæ minoris. Quod erat oſtendendum. Iam autem data ſumma duarum linearum & earum dif-

Propoſ. 27.

Præced. demonſt.

27. propoſ. lib. 1.

ferentia dantur ipſę lineę. Ac proinde reliquę non erunt ignotæ.

Corollarium.

SI fuerint quatuor quantitates continuè proportionales planum ſub ſumma primę & ſecundę in differentiam tertiæ & quartæ æquabitur differentiæ quadratorum à mediis. Item in eadem ſerie, planum ſub ſumma omnium in ſummam differentiarum primæ & ſecundę, itemque tertiæ & quartæ eſt æquale aggregato differentiarum quadratorum ab extremis, & quadratorum à mediis. Hoc poſterius theorema ſequitur ex priore.

PROPOSITIO XLV.

Data ſumma quadratorum ab extremis, & ſumma quadratorum à mediis, inuenire quatuor quantitates continuè proportionales.

ESto datus numerus 65 pro aggregato quadratorum ab extremis, & 20 pro quadratis mediorum. Colligantur hi duo numeri in vnam ſummam, vt habeantur quadrata ſingularum 85. Tùm ponatur 1 R pro ſumma quadratorum primi & ſecundi. Igitur quadrata tertii & quarti erunt 85 - 1 R. Et quia in ſerie quatuor continuè proportionalium, ſumma quadratorum à mediis 20, eſt medio loco proportionalis inter quadrata primi & ſecũdi 1 R, & quadrata tertii & quarti 85 - 1 R; multiplicãdo extremos inter ſe 1 R, & 85 - 1 R, habebitur productus 85 R - 1 Q æqualis quadrato medii 400. Et ita poſt debitam reductionem 1 Q erit ęquale 85 R - 400. Vnde *Lem 6*
1 R, ſiue ſumma quadratorum primi & ſecundi eſt 5 vel 80. Ergo collectis 5 & 20 fiet quadratum ſummæ primi & tertii 25, cuius radix 5 erit ſumma primi & tertii. Si-

militer collectis 20 & 80, fiet quadratum ſummæ ſecundi & quarti 100, cuius radix 10 erit ſumma ſecundi & quarti. Proindeque ſinguli non latebunt eruntque 1. 2. 4. 8.

Hinc Canon.

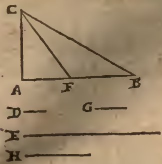
IVnge quadrata extremorum cum quadratatis mediorum: ſummam inde natam diuide in duas partes, inter quas aggregatum quadratorum à mediis ſit medio loco proportionale, habebiſque quadrata primi & ſecundi, itemque tertii & quarti ſigillatim. Vnde ſinguli non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data linea A B potens quadrata extremarum, & A C potens quadrata mediarum. Coniungantur illę lineæ ad angulos rectos, & ducta C B, inueniantur per ea quæ dicta ſunt in libro primo, tres lineæ proportionales data A C pro media, & B C potente quadrata ab extremis, ſintque illę tres D, A C, E.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis partes,

47 primi.



ſiquidem quadratum A B additur quadrato A C, & fit quadratum B C, tùm quoniam data media A C, & data B C potente quadrata extremarum, inueniuntur extremæ D & E, quadratum B C diuiditur in duo quadrata D & E, inter quæ quadratum A C

11. ſexti. eſt medio loco proportionale, quoniam trium linearum proportionalium quadrata ſunt quoque proportionalia.

Dico autem quadratum D æquari quadratis primæ & ſecundæ quęſitarum; quadratum vero E quadratis tertiæ

& quartę. Nam in ſerie quatuor proportionalium continuè, eſt vt quadratum primę ad quadratum ſecundæ, ita quadratum ſecundæ ad quadratum tertię. Et componendo permutandoque vt quadrata duarum priorum ad quadrata mediarum; ita quadratum ſecundæ ad quadratum tertiæ. Similiter ex alia parte probabitur fore vt quadratum ſecundæ ad quadratum tertię, ita quadrata mediarum ad quadrata tertiæ & quartæ. Igitur vt quadrata duarum priorum ad quadrata mediarum; ita quadrata mediarum ad quadrata duarum poſteriorum. Sed vt quadratum D ad quadratum A C (quod ęquatur quadratis mediarum) ita quadratum A C ad quadratum E. Et aliunde quadrata D & E ſimul ſumpta æqualia ſunt quadrato B C (hoc eſt quadratis ſingularum) ergo quadratum D eſt æquale quadratis primæ & ſecundæ. quadratum verò E quadratis tertię & quartę. Quod erat demonſtrandum. 11. ſexti. Ex conſtr.

Iam autem iis inuentis, facile reperies ſingulas, quia quadratum D ad quadratum A C. habet rationem duplicatam primæ ad ſecundam quęſitarum. Et ita ſi inter D & A C inuenias mediam proportionalem A F. Ductaque C F fiat vt C F ad A F; ita C A ad G; erit G vna ex mediis quæſitis. Similiter ſi fiat vt C F ad A C; ita A C ad H, erit H altera media quæſitarum. Demonſtratio facilis eſt.

PROPOSITIO XLVI.

Data differentia quadratorum ab extremis, & differentia quadratorum à mediis, inuenire quatuor quantitates continue proportionales.

ESto data differentia quadratorum ab extremis 63. Et differentia quadratorum à mediis 12. Ponatur

1 R pro differentia quadratorum primi & ſecundi. Et quia ſi fuerint quatuor numeri continuò creſcentes aut decreſcentes, differentia extremorum æquatur tribus differentiis intermediis, erit differentia data 63 æqualis differentiis quadratorum primi & ſecundi, quadratorum ſecundi & tertii, quadratorum tertii & quarti. Ergo ſi ex 63 tollas differentiam quadratorum à mediis 12, reſiduum 51 æquabitur differentiis quadratorum primi & ſecundi, itemque quadratorum tertii & quarti. Quoniam igitur poſita eſt 1 R pro differentia quadratorum primi & ſecundi, tollendo ipſam à 51, reſiduum 51 - 1 R erit differentia quadratorum tertii & quarti. Et quia in ſerie quatuor continuè proportionalium differentiæ ſunt etiam in continua & eadem cum numeris proportione; erit vt 1 R ad 12, ita 12 ad 51 - 1 R; ergo productus ſub extremis 51 R - 1 Q æquatur producto ſub mediis, hoc eſt quadrato 144. Igitur poſt debitam reductionem, 1 Q erit æquale 51 R - 144. Fitque 1 R, ſiue differentia quadratorum primi & ſecundi 3 vel 48.

Lem. 2. *Lem. 11.* *Lem. 6.*

Data autem differentia quadratorum primi & ſecundi de tribus proportionalibus 3. Et differentia quadratorum ſecundi & tertii 12. Facile inueniuntur ſinguli 1. 2. 4. 8.

Hinc Canon.

TOlle minorem differentiam datam de maiore, reſiduumque diuide in duos numeros, inter quos minor differentia data ſit medio loco proportionalis; & habebis differentiam quadratorum primi & ſecundi, itemque quadratorum tertii & quarti. Vnde ſinguli non latebunt.

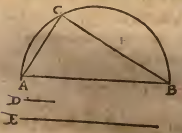
Hinc Effectio Geometrica.

SIt data linea A B potens differentiam quadratorum ab extremis, & A C potens differentiam quadratorum à mediis. Supra A B fiat ſemicirculus in quo inſcribatur

batur A C, & nectatur C B. Tùm per ea quæ dicta ſunt in libro primo, data media A C ex tribus continuè proportionalibus & B C potente quadrata ab extremis, inueniantur extremæ D & E.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis partes; ſiquidem ex quadrato A B tollitur quadratum A C, & reſtat quadratum B C. Quia verò data media A C, & B C potente quadrata extremarum de tribus lineis proportionalibus, inueniuntur extremæ D & E; quadratum B C diuiditur in duo quadrata D & E, inter quæ quadratum A C eſt medio loco proportionale. *22. ſexti.*

Dico autem quadratum D eſſe differentiam quadratorum primæ & ſecundæ ex quæſitis, ſimiliterque quadratum E eſſe differentiam quadratorum tertiæ & quartæ. Nam in ſerie quatuor proportionalium, eſt vt quadratum maioris extremæ ad quadratum mediæ maioris; ita quadratum mediæ maioris ad quadratum minoris mediæ; ergo diuidendo, vt differentia quadratorum maioris mediæ & maioris extremæ ad quadratum maioris mediæ; ita differentia quadratorum à mediis ad quadratum minoris mediæ. Et permutando, vt differentia quadratorum mediæ maioris & maioris extremæ ad differentiam quadratorum à mediis; ita quadratum maioris mediæ ad quadratum mediæ minoris.



Similiterque probabitur eſſe differentiam quadratorum à mediis ad differentiam quadratorum minoris mediæ & minoris extremæ vt quadratum mediæ maioris ad quadratum minoris mediæ; igitur vt differentia quadratorum maioris extremæ & maioris medię ad diffe-

rentiam quadratorum à mediis; ita differentia quadratorum à mediis ad differentiam quadratorum mediæ minoris & minoris extremæ. Sed quadratum A C tollitur ex quadrato A B; ergo reſiduum quadratum B C eſt æquale differentiis quadratorum primę & ſecundę itemque quadratorum tertiæ & quartæ. Igitur cum ex conſtructione quadrata D & E, æquentur quadrato B C; & aliunde quadratum A C ſit medio loco proportionale inter quadrata D & E; erit quadratum D differentia quadratorum primæ & ſecundæ, & quadratum E differentia quadratorum tertiæ & quartæ. Quod erat demonſtrandum.

Iam verò data linea D potente differentiam quadratorum primæ & ſecundæ, & A C potente differentiam quadratorum ſecundæ & tertiæ ex tribus quantitatibus proportionalibus, inueniuntur ſingulæ vt in Propoſ. præced.

PROPOSITIO XLVII.

Dato aggregato quadratorum à quatuor quantitatibus continue proportionalibus, & plano ſub ſumma trium minorum in ſummam minoris mediæ & maioris extremæ, inuenire ſingulas.

ESto aggregatum quadratorum à ſingulis 85. Planum vero 70. Ponatur 1 R pro ſumma omnium. Et quia in ſerie quatuor continuè proportionalium, quadrata ſingularum iuncta duplo plani ex tribus minoribus, in ſummam minoris medii & maioris extremi, efficiunt aggregatum æquale quadrato ſummæ omnium; duplicando 70 habebis 140, quo addito ad 85. fiet 225 æqualis quadrato ſummæ omnium 1 Q. Igitur 1 R, ſiue ſumma omnium eſt 15. Data autem ſumma omnium

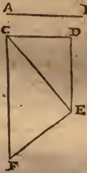
15, & aggregato quadratorum à ſingulis 85, inueniuntur ſinguli per Propoſ. 14. Huius eruntque 1.2.4.8.

Hinc Canon.

DVplum plani dati adde cum aggregato quadratorum à ſingulis, & habebis quadratum ſummæ omnium. Vnde ſinguli non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data linea A B potens quadrata ſingularum, & C D potens rectangulum ſub ſumma trium minorum in ſummam mediæ minoris & maioris extremæ. Sumatur D E æqualis ipſi C D, & ponatur ipſi perpendiculariter. Tùm iunctæ E C ducatur E F ad angulos rectos æqualis ipſi A B. & nectatur F C.



Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis partes; ſiquidem quadratum C E duplum eſt quadrati C D, & additur quadrato E F, hoc eſt A B, fitque quadratum F C. 47. primi.

Dico autem lineam F C fore ſummam omnium. Nam rectangulum ſub tribus minoribus in ſummam mediæ minoris & maioris extremç, çquatur iſtis ſex rectangulis ex minore extrema in mediam minorem, ex maiore extrema in mediam maiorem, ex prima in tertiam, ex in ſecunda in quartam, ex mediis, ex extremis: quatuor autem poſteriora ſunt çqualia quadrato ſummæ mediarum: dictum verò eſt ſæpius ſupra quadratum ſummæ omnium æquari quadratis ſingularum plus duplo quadrato ſummç mediarum, plus duplo rectanguli ex prima in ſecundam, & tertia in quartam. Igitur duplum quadratum C D plus quadrato A B eſt æquale quadrato

1. ſecundi. 4 ſecundi. 17 ſexti. 16 ſexti. Propoſ. 14. huius.

ſummæ omnium, ſed quadratum C E eſt duplum quadrati C D: quadratum vero E F æquatur quadrato A B. 47 primi. Et quadratum F C æquale eſt quadratis C E, E F, ergo quadratum F C æquabitur quadrato ſummę omnium, & propterea linea F C, eſt ſumma omnium. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

HInc collige duo theoremata, quorum primum eſt: Si fuerint quotcumque quantitates continue proportionales numero pari, quadratum ſummæ omnium æquabitur quadratis ſingularum plus duplo plano ex ſumma omnium, dempta maiore extrema, in ſummam earum quæ ſunt in locis paribus, inchoando numerationem à minore extrema. Secundum: ſi fuerint quatuor quantitates continuè proportionales, eſt vt ſumma mediarum ad ſummam omnium; ita planum ex tribus minoribus in ſummam mediæ minoris & maioris extremæ multatum quadrato ſummæ mediarum ad quadrata ſingularum. Hoc vltimum theorema habetur tùm ex Corollario Propoſ. 14. huius, tùm ex prima parte præſentis Corollarij.

PROPOSITIO XLVIII.

Data ratione quadratorum ab extremis ad quadrata mediarum, inuenire quatuor quantitates continue proportionales.

ESto data ratio 13 ad 4. Ponatur ſumma mediorum 1 R & ſumatur poſterior terminus rationis 4 pro ſumma omnium. Igitur ſumma extremorum erit 4 - 1 R. Et quoniam in ſerie quatuor continuè proportionalium cubus ſummę mediorum diuiſus per ſummam extremorum plus triplo ſummę mediorum exhibet, pro- *Corollar. Prop. 1. huius.*

ductum ſub mediis vel extremis, erit $\frac{5C}{4 + 2R}$ eiuſmodi productus ſub mediis vel extremis. Ergo ſi eius duplum $\frac{2C}{4 + 2R}$ tollatur de quadrato ſummæ mediorum 1 Q relinquetur aggregatum quadratorum à mediis $\frac{4Q}{4 + 2R}$. Similiter ſi illud idem duplum producti tollatur de quadrato ſummæ extremorum quod eſt 16 + 1 Q - 8 R relinquitur ſumma quadratorum ab extremis $\frac{64 - 12Q}{4 + 2R}$. *Lem. 6.* *Lem. 5.*
Igitur $\frac{64 - 12Q}{4 + 2R}$ ad $\frac{4Q}{4 + 2R}$, ſiue (ſimpliciter propter eumdem denominatorem) numeratores earum fractionum habebunt inter ſe rationem initio datam quadratorum ab extremis ad quadrata mediorum. Et proinde erit vt 64 - 12 Q ad 4 Q; ita 13 ad 4. Ergo productus ſub extremis 256 - 48 Q æqualis erit producto ſub mediis 52 Q. Et ita 1 Q æquabitur $\frac{256}{100}$. Fietque 1 R ſiue ſumma mediorum $\frac{16}{10}$ hoc eſt $\frac{8}{5}$. Quam ſi tollas de ſumma omnium 4, reſtabit ſumma extremorum $\frac{12}{5}$. Data autem ſumma extremorum $\frac{12}{5}$ & ſumma mediorum $\frac{8}{5}$ facile diſtinguuntur ſinguli per alteram è ſex prioribus propoſitionibus huius. Eruntque $\frac{4}{15}$. $\frac{8}{15}$. $\frac{16}{15}$. $\frac{32}{15}$. Vel quia omnes illæ fractiones habent eamdem denominatorem, ſumendo eorum numeratores, habebis quatuor numeros ſatisfacientes quæſtioni Propoſitæ 4. 8. 16. 32. *Lem. 6.*

Hinc Canon.

IVnge planum ſub terminis proportionis datæ cum triplo quadrato poſterioris termini: per hanc ſummam diuide quadrato-quadratum eiuſdem termini poſterioris: habebiſque quadratum ſummæ mediorum,

poſteriore termino rationis exiſtente ſumma omnium. Vnde ſinguli non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

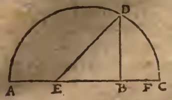
SIt data ratio A B ad B C. Supra totam A C fiat ſemicirculus, & erecta B D perpendiculariter, ſumatur B E potens triplum quadrati B C & nectatur E D. Tùm duabus illis E D & B C, inueniatur tertia proportionalis C F.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes; ſiquidem planum ſub terminis proportionis eſt rectangulum A B C, hoc eſt quadratum B D. Quadratum autem illud B D additur quadrato B E, quod eſt triplum quadrati B C, & fit quadratum E D. Quoniam vero tres illæ E D, B C, C F ſunt continuè proportionales, erit vt quadratum D E ad quadratum B C; ita quadratum B C ad quadratum C F. Igitur perinde eſt ac ſi quadrato quadratum B C diuideretur per quadratum E D, vtrobique enim fieret quadratum C F pro quotiente Geometrico.

8. ſexti. 4 ſexti. 17. ſexti. 47. primi. 22 ſexti.

Dico autem lineam C F fore ſummam mediarum poſteriore termino rationis B C exiſtente ſumma omnium. Nam tres illæ lineæ A B, B D, B C, ſunt continuè proportionales. Ergo vt prima A B ad tertiam B C, ita quadratum ſecundæ ad quadratum tertiæ B C. Et componendo ter, vt A B plus tripla B C; ita quadratum D E (quod eſt æquale quadrato B D plus triplo quadrato B C) ad quadratum B C; ſed quia vt A B ad B C; ita quadrata extremarum & quadrata mediarum ex hypotheſi; erit vt A B plus tripla B C ad B C, ita quadrata extremarum plus triplo quadratorum

8. ſexti. 4. ſexti. 20. ſexti. Ex conſtr. Ex hypoth.



à mediis ad quadrata mediarum. Atqui vt quadrata ab extremis ad quadrata mediarum, ita ſumma rectangulorum ex prima in ſecundam & tertia in quartam multata rectangulo ſub mediis vel extremis ad rectangulum ſub mediis vel extremis; ergo erit vt A B ad B C; ita ſumma rectangulorum ex prima in ſecundam & tertia in quartam multata rectangulo ſub mediis vel extremis ad illud idem rectangulum ſub mediis vel extremis: & componendo ter, vt A B plus tripla B C ad B C; ſic ſumma rectangulorum ex prima in ſecundam & ex tertia in quartam plus duplo rectangulo ſub mediis vel extremis, ad rectangulum ſub mediis vel extremis; itemque (ſumendo eorum terminorum dupla) ſic duplum rectangulorum ex prima in ſecundam & tertia in quartam plus quadruplo rectangulo ſub mediis vel extremis ad duplum rectangulum ſub mediis vel extremis. *Corollar.*

Ergo vt quadratum D E ad quadratum B C; ſic omnes antecedentes ad omnes conſequentes. *12 quinti.* Sed omnes antecedentes, nempe quadrata extremarum plus triplo quadratorum à mediis plus duplo rectangulorum ex prima in ſecundam & tertia in quartam plus quadruplo rectanguli ſub mediis vel extremis faciunt quadratum *14. Prop. huius.* ſummæ omnium: omnes autem conſequentes, nempe quadrata mediarum plus duplo rectangulo ſub mediis vel extremis, æquantur quadrato ſummæ mediarum. *4 ſecundi.* Ergo erit vt quadratum B E ad quadratum ſummæ omnium B C; ita quadratum ſummæ omnium B C ad quadratum ſummæ mediarum. Ergo vt linea D E ad lineam *22. ſexti.* B C; ita linea B C ad ſummam mediarum. Sed factum eſt vt D E ad B C, ita B C ad C F. Igitur vt B C ad C F; ita B C ad ſummam mediarum. Proindeque C F eſt *9. quinti.* ſumma mediarum. Quod erat demonſtrandum.

Data autem ſumma mediarum C F & ſumma omnium B C, erit B F ſumma extremarum. Vnde per alteram è ſex prioribus Propoſitionibus huius, diſtinguentur ſingulæ.

Corollarium.

SI fuerint quatuor quantitates continuè proportionales, erit vt quadratum ſummæ omnium ad quadratum ſummæ mediarum; ſic quadrata extremarum plus triplo quadratorum à mediis ad quadrata mediarum. Et diuidendo ter, vt quadrata extremarum ad quadrata mediarum, ita quadratum ſummę extremarum plus duplo plano ſummæ mediarum in differentiam ſummæ mediarum & ſummæ extremarum ad quadratum ſummæ mediarum.

Appendix.

EX his patet quomodo data ratione quadratorum à ſingulis ad quadrata extremarum vel mediarum, inueniri poſſint quatuor quantitates continuè proportionales; nam diuidendo, erit etiam data ratio quæ hic datur. Patet deinde quomodo data quacumque ſumma vel differentia quatuor quantitatum continuè proportionalium, & ratione quadratorum ab extremis ad quadrata mediarum, poſſint inueniri ſingulæ: nam fiat vt ſumma vel differentia homologa ex quatuor inuentis ad ſingulas inuentas; ſic ſumma vel differentia data ad alias, & habebitur propoſitum. Patet tertio potuiſſe problema ſolui per Propoſitionem 45 huius, vtendo duobus terminis rationis datæ, perinde ac ſi forent ſumma quadratorum ab extremis, & ſumma quadratorum à mediis. Patet denique alio modo ſolui potuiſſe problema, ponendo 1 R pro ſumma mediorum, & ſumendo priorem terminum rationis pro ſumma omnium.

PROPO-

PROPOSITIO XLIX.

Data ratione quadratorum à mediis ad planum ſub ſumma omnium in ſummam mediarum, inuenire quatuor quantitates continue proportionales.

ESto data ratio 2 ad 9. Ponatur 1 R pro ſumma mediarum, & ſumatur prior terminus rationis 2 pro ſumma omnium. Et quia in ſerie quatuor proportionalium, cubus ſummę mediorum diuiſus per ſummam extremorum plus tripla mediorum ſumma, exhibet productum ſub mediis vel extremis; erit eiuſmodi productus $\frac{1C}{2+2R}$: cuius duplum eſt $\frac{2C}{2+2R}$ quod ſi auferatur à quadrato ſummæ mediorum, reſiduum $\frac{2Q}{2+2R}$ æquabitur quadratis mediorum. Quoniam ergo planum ſub ſumma omnium 2 in ſummam mediorum 1 R, eſt 2 R, erit $\frac{2Q}{2+2R}$ ad 2 R, in ratione data 2 ad 9. Et ita productus ſub extremis $\frac{18Q}{2+2R}$ æqualis erit producto ſub mediis 4 R. Et poſt debitam reductionem 10 Q æquabuntur 8 R. Igitur 1 R ſiue ſumma mediorum eſt $\frac{4}{5}$ ſingulique ordinati erunt. $\frac{2}{15}.\frac{4}{15}.\frac{8}{15}.\frac{16}{15}.$

Corollar. 1. huius.

Lem. 3.

Lem. 4.

Hinc Canon.

EX producto ſub terminis tolle duplum quadratum prioris termini: & per hoc reſiduum diuide cubum eiuſdem termini prioris, habebiſque in quotiente ſummam mediorum, priore rationis termino exiſtente ſumma omnium. Vnde ſinguli non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data ratio A B ad B C. Ex B C tollatur B D æqualis duplæ A B. Tùm fiat vt D C ad B A; ita B A ad B E.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis partes, ſiquidem cum rectangulum A B C & quadratum A B habeant eamdem altitudinem, tollendo B D duplam A B ex B C; tollitur quoque ex rectangulo A B C duplum quadratum A B & remanet rectangulum ſub D C & A B. Eſt autem vt rectangu-



1. ſexti. lum ſub D C & A B ad quadratum A B; ita D C ad A B; Ergo faciendo vt D C ad A B; ita A B ad B E. Diuiditur cubus A B per rectangulum ſub D C in A B, & fit linea B E pro quotiente Geometrico.

Dico autem lineam B E fore ſummam mediarum priore termino rationis A B exiſtente ſumma omnium. Nam vt ſumma omnium ad ſummam mediarum; ita
1. ſexti. rectangulum ſub ſumma omnium in ſummam mediarum ad quadratum ſummæ mediarum; ſed vt ſumma
Corollar. 1 prop. huius. omnium ad ſummam mediarum; ita quadrata mediarum ad rectangulum ſub mediis vel extremis: ergo vt rectangulum ſub ſumma omnium in ſummam mediarum ad quadratum ſummę mediarum; ſic quadrata mediarum ad rectangulum ſub mediis vel extremis. Et permutando, vt rectangulum ſub ſumma omnium in ſummam mediarum ad quadrata mediarum; ita quadratum ſummæ mediarum ad rectangulum ſub mediis vel extremis.

Ergo diuidendo bis, erit vt rectangulum ſub ſumma omnium in ſummam mediarum multatum duplo qua-

dratorum à mediis ad quadrata mediarum; ita quadrata mediarum ad rectangulum ſub mediis vel extremis. Eſt verò, vt quadrata mediarum ad rectangulum ſub mediis vel extremis; ſic ſumma omnium ad ſummam mediarum; & vt rectangulum ſub ſumma omnium in ſummam mediarum ad quadrata mediarum; ita D C ad B A, & vt D C ad B A; ita B A ad B E; ergo vt quadrata mediarum ad rectangulum ſub mediis vel extremis; ita ſumma omnium A B ad B E. Igitur B E eſt ſumma mediarum. Quod erat demonſtrandum. *4. ſecundi.* *Corol. prop. 1. huius.*

Appendix.

HInc patet primò multis aliis modis potuiſſe procedi in operatione Algebrica. Patet deinde quomodo data quacumque ſumma vel differentia quatuor continuè proportionalium & prædicta planorum ratione, poſſint inueniri ſingulæ. Denique patet etiam quomodo inueniantur ſingulæ data ratione quadratorum à mediis ad quadratum ſummæ omnium minus quadratis ſingularum, minus plano ſub tribus minoribus in ſummam maioris extremæ & minoris mediæ. Nam componendo erit etiam data ratio quæ hic datur.

PROPOSITIO L.

Data ratione planorum ex prima in ſecundam, & tertia in quartam, ad planum ſub mediis vel extremis, inuenire quatuor quantitates continuè proportionales.

ESto data ratio 17 ad 4. Ponatur 1 R pro ſumma mediorum, & ſumatur 4 poſterior terminus rationis pro ſumma omnium. Ergo 4 - 1 R erit ſumma extremo-

rum. Igitur $\frac{1 C}{4 \dagger 2 R}$ erit productus ſub mediis vel extremis. Ergo ſi eius duplum ſubtrahas de quadrato ſummæ mediorum habebis quadrata mediorum $\frac{4 Q}{4 \dagger 2 R}$.

Corol. 1 huius.

Lem. 3 Similiter ſi duplum producti ſub mediis vel extremis tollas ex quadrato ſummæ extremorum, habebis $\frac{64 - 12 Q}{4 \dagger 2 R}$ pro quadratis extremorum. Quare ſi iungas quadrata extremorum cum quadratis mediorum, fiet aggregatum quadratorum à ſingulis $\frac{64 - 8 Q}{4 \dagger 2 R}$. Et quia in ſerie quatuor continuè proportionalium, eſt vt ſumma omnium ad ſummam mediorum; ita aggregato quadratorum à ſingulis ad ſummam productorum ex primo in ſecundum, & tertio in quartum; ſi fiat vt ſumma omnium 4 ad ſummam mediorum 1 R; ita aggregatum quadratorum à ſingulis $\frac{64 - 8 Q}{4 \dagger 2 R}$ ad aliud habebis $\frac{64 R - 8 C}{16 \dagger 8 R}$ ſiue $\frac{16 R - 2 C}{4 \dagger 2 R}$ pro ſumma productorum ex primo in ſecundum & tertio in quartum. Et proinde erit $\frac{16 R - 2 C}{4 \dagger 2 R}$ ad productum ſub mediis vel extremis $\frac{1 C}{4 \dagger 2 R}$ in ratione data 17 ad 4. Igitur productus ſub extremis $\frac{64 R - 8 C}{4 \dagger 2 R}$ erit æqualis producto ſub mediis $\frac{17 C}{4 \dagger 2 R}$. Ergo cum duæ illæ fractiones ſint æquales, & habeant eumdem denominatorem, erunt numeratores inter ſe æquales: & ita 64 R - 8 C æquabuntur 17 C. Et per hypobibaſmum, & debitam reductionem, erit æquatio inter 64 & 25 Q. Igitur 1 R, ſiue ſumma mediorum eſt $\frac{8}{5}$. Quæ ſi tollatur de ſumma omnium 4. relinquetur $\frac{12}{5}$ pro ſumma extremorum. Data autem ſumma extremorum $\frac{12}{5}$, & ſumma mediorum $\frac{8}{5}$. diſtinguentur ſinguli per alte-

Corollar. Propoſ. 13. huius.

Lem. 6.

ram ex prioribus ſex Propoſitionibus huius, eruntque $\frac{4}{15}. \frac{8}{15}. \frac{16}{15}. \frac{32}{15}.$

Hinc Canon.

CVbum poſterioris termini rationis datæ, diuide per ſummam priores & dupli poſterioris, habebiſque quadratum ſummæ mediorum, poſteriore termino rationis exiſtente ſumma omnium. Vnde nec ſumma extremorum, nec ſinguli latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data ratio A B ab B C. Sumatur C D æqualis B C. Tùm fiat vt A D ad C D, ita quadratum C D ad quadratum D E.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis partes, ſiquidem hoc poſito, cubus C D erit æqualis ſolido rectangulo ſub quadrato D E in lineam A D. Proindeque cubus C D, hoc eſt B C diuiditur per A D ſummam prioris termini & duplæ B C, & fit quadratum D E pro quotiente Geometrico. .4 vndec.



Dico autem lineam D E fore ſummam mediarum, poſteriore termino rationis exiſtente ſumma omnium. Cum enim ſit vt ſumma quadratorum ab extremis ad quadrata mediarum, ita aggregatum rectangulorum ex prima in ſecundam & tertia in quartam multatum rectangulo ſub mediis vel extremis ad illud idem rectangulum ſub mediis vel extremis, erit componendo ter vt ſumma quadratorum ab extremis. Plus triplo quadratorum à mediis ad quadrata mediarum; ita aggregatum rectangulorum ex prima in ſecundam & tertia in quartam Corollar. Propoſ. huius.

plus duplo rectangulo ſub mediis vel extremis ad rectangulum ſub mediis vel extremis, & duplicando vtrumque terminum poſterioris proportionis; erit vt quadrata extremarum plus triplo quadratorum à mediis ad quadrata mediarum, ita duplum rectangulorum ex prima in ſecundam & tertia in quartam plus quadruplo rectangulo ſub mediis vel extremis ad duplum rectangulum ſub mediis vel extremis. Et proinde componendo antecedentia ex vna parte, & conſequen-
12 quinti. tia ex altera, erit vt quadrata extremarum, plus triplo quadratorum à mediis, plus duplo rectangulorum ex prima in ſecundam, & tertia in quartam, plus quadruplo rectangulo ſub mediis vel extremis, hoc eſt, vt qua-
14 Prop. huius. dratum ſummæ omnium ad quadrata mediarum plus duplo rectangulo ſub mediis vel extremis, hoc eſt
4 ſecundi ad quadratum ſummæ mediarum; ita rectangula ſub prima in ſecundam & tertia in quartam plus duplo rectangulo ſub mediis vel extremis ad rectangulum ſub mediis vel extremis.

Sed vt rectangula ſub prima in ſecundam & tertia in quartam ad rectangulum ſub mediis vel extremis, ita A B ad B C, ergo componendo bis, erit vt A D ad C D; ita rectangula ex prima in ſecundam, & tertia in quartam plus duplo rectangulo ſub mediis vel extremis ad rectangulum ſub mediis vel extremis. Et proinde vt AD ad C D, ſic quadratum ſummæ omnium C D ad quadratum ſummæ mediarum. Atqui factum eſt vt A D ad C D; ita quadratum C D ad quadratum D E. Ergo eſt vt quadratum C D ad quadratum ſummæ mediarum; ſic quadratum C D ad quadratum D E. Igitur quadra-
9 quinti tum D E eſt quadratum ſummæ mediarum. Et propterea linea D E eſt ſumma mediarum. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

SI fuerint quatuor quantitates continuè proportionales, erit vt quadratum ſummæ omnium ad quadratum ſummæ mediarum; ita aggregatum planorum ex prima in ſecundam & tertia in quartam plus duplo plano ſub mediis vel extremis ad planum ſub mediis vel extremis.

Appendix.

HInc patet quomodo data quacumque ſumma vel differentia ex quatuor quantitatibus continuè proportionalibus cum prædicta planorum ratione, poſſint inueniri ſingulæ; ſi enim fiat vt ſumma vel differentia homologa ex quatuor inuentis ad ſingulas inuentas; ita ſumma vel differentia data ad ſingulas, habebitur propoſitum. Patet deinde quomodo aliter potuerit ſolui problema, ponendo 1 R pro ſumma mediorum & ſumendo priorem terminum rationis pro ſumma omnium, &c.

PROPOSITIO LI.

Data ſumma extremarum, & aggregato cuborum à mediis ex quatuor quantitatibus continue proportionalibus inuenire ſingulas.

ESto daus numerus 9 pro ſumma extremorum, & 72 pro aggregato cuborum à mediis. Ponatur 1 R pro vno extremo, erit ergo alter extremus 9 - 1 R, igitur productus ſub extremis eſt 9 R - 1 Q. Et quia in ſerie quatuor continuè proportionalium, aggregatum

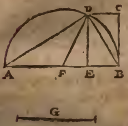
cuborum à mediis æquatur ſolido ſub producto medio-
Lem. 31 rum vel extremorum in ſummam extremorum, multiplicando productum extremorum 9 R - 1 Q per 9, fiet æquatio inter productum 81 R - 9 Q & aggregatum cuborum à mediis datum 72. Igitur poſt debitam reductionem & diuiſionem 1 Q, erit æquale 9 R - 8. Et fit 1 R ſiue alter extremus 1 vel 8.

Vlterius duos medios ſic inuenies, pone medium maiorem 1 R, igitur diuidendo eius quadratum 1 Q per maiorem extremum 8, habebis $\frac{1Q}{8}$ pro minore medio. Ergo huius minoris medii quadratum $\frac{1QQ}{64}$ æquatur producto ſub minore extremo 1 in maiorem medium 1 R, qui productus eſt 1 R. Et proinde 64 R æquantur 1 QQ. Et 1 C æqualis eſt 64. Igitur 1 R ſiue maior medius eſt 4. Et ſinguli erunt 1. 2. 4. 8.

Hinc Canon.

Diuide aggregatum cuborum à mediis per ſummam extremorum: quotientem tolle ex quadrato dimidiæ ſummæ extremorum: huius enim reſidui radix quadrata ſupradicto addita & detracta dimidio exhibebit extremos.

Hinc Effectio Geometrica.



Sit A B ſumma extremarum, & G potens cubos à mediis: Fiat vt A B ad G; ita quadratum G ad quadratum B C, ponaturque linea B C perpendicularis ad A B, & ſupra A B fiat ſemicirculus, ducaturque C D parallela B A, donec occurrat peripheriæ in puncto D, ex quo demittatur D E per-

perpendiculariter ad A B.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis partes, nam hoc poſito, ſolidum rectangulum ſub quadrato B C in lineam A B, æquabitur cubo G. Ergo cubus G diuiditur per lineam A B & fit quadratum B C, hoc eſt D E, ductaque D F ad centrum F, quadratum D E tollitur ex quadrato F D (quæ eſt ſemiſſis A B) & remanet quadratum F E, cuius latus F E additum & detractum ſemiſſi A B exhibet A E & E B. *34. vndec.* *47. primi.*

Dico autem A E & E B fore extremas quæſitas: cum enim in ſerie quatuor linearum proportionalium; ſit propter eamdem altitudinem, vt quadratum mediæ minoris ad rectangulum ſub mediis; ita media minor ad maiorem mediam, hoc eſt ita minor extrema ad minorem mediam: erit cubus mediæ minoris æqualis ſolido rectangulo ſub plano ex mediis in minorem extremam: ſimiliterque demonſtrabitur cubum mediæ maioris æquari ſolido rectangulo ſub plano ex mediis in maiorem extremam. Igitur ſumma cuborum à mediis eſt æqualis ſolido ſub minore extrema in rectangulum ſub mediis vel extremis, plus ſolido ſub maiore extrema in idem rectangulum ſub mediis vel extremis; hoc eſt ſolido ſub ſumma extremarum in rectangulum ſub mediis vel extremis. *1. ſexti.* *34. vndec.*

Sed cubus G, eſt ſumma cuborum à mediis, & cubus G iam eſt oſtenſus æqualis ſolido rectangulo ſub quadrato B C hoc eſt D E in A B, ergo cum linea A B ſit ſumma extremarum, erit ſolidum ſub A B in quadratum B C, hoc eſt D E æquale ſolido ſub A B in rectangulum ſub mediis vel extremis. Et proinde rectangulum ſub mediis vel extremis æquabitur quadrato B C hoc eſt D E, hoc eſt rectangulo A E B. Igitur cum A B ſit ſumma extremarum, erunt A E & E B extremæ. Quod erat demonſtrandum. *8. ſexti.* *4. ſexti.* *17. ſexti.*

Hic iam inter extremas A E & E B inuentas, reperiendæ forent duæ mediæ proportionales, ſed hoc opus mul-

Pp

torum ſæculorum. Vide praxim Vietæ in Supplemento Geometriæ Propoſ. 5. Cui addi poteſt inuentum eſſe inſtrumentum quo noua ratione deſcribitur conchoïs: beneficio autem conchoidis inueniuntur duæ mediæ proportionales, vt oſtendit Clauius in Geomet. pract. l. 6. Prop. 15. Vtrum hæc noua deſcriptio conchoidis ſit Geometrica, necne diſceptare non vacat ad alia properanti.

Appendix.

HInc ſolui poteſt iſtud problema: data ſumma cuborum à mediis, & plano ſub mediis vel extremis, inuenire quatuor quantitates continuè proportionales: Enimuerò diuiſa ſumma cuborum à mediis per planum ſub mediis vel extremis, habebitur ſumma extremarum.

Corollarium.

SI fuerint quatuor quantitates continuè proportionales cubus ſummæ mediarum çquabitur triplo ſolido ſub ſumma mediarum in planum ſub mediis vel extremis plus ſolido ſub ſumma extremarum in planum ſub mediis vel extremis. Hoc habetur ex Corollar. Propoſ. r. huius. Et conſequenter cum hic ſic probatum cubos mediarum æquales eſſe ſolido ſub ſumma extremarum in planum ſub mediis vel extremis, erit cubus ſummæ mediarum çqualis cubis mediarum & triplo ſolido ſub ſumma mediarum in rectangulum ſub mediis vel extremis. Inde ſequitur cubum ſummæ duarum quarumcumque quantitatum çquari cubis partium ex triplo ſolidi ex plano ſub partibus in ſummam earum: quia duabus quibuſcumque quantitatibus poteſt vtrinque inueniri tertia proportionalis.

PROPOSITIO LII.

Data differentia extremarum de quatuor quantitatibus continue proportionalibus, & interuallo cuborum à mediis, inuenire ſingulas.

ESto datus numerus 7 pro differentia extremorum, & 56 pro interuallo cuborum. Ponatur 1 R pro minore extremo; ergo maior extremus eſt 1 R † 7. Igitur productus ſub extremis eſt 1 Q † 7 R. Et quia in ſerie quatuor continuè proportionalium, interuallum cuborum à mediis æquatur ſolido ſub producto mediorum vel extremorum in differentiam extremorum multiplicando producto ſub extremis 1 Q † 7 R per 7, habebis 7 Q † 49 R pro interuallo cuborum à mediis. Et proinde eſt æquatio inter 7 Q † 49 R & 56. Et poſt debitam reductionem & diuiſionem, 1 Q æquabitur 8 - 7 R. Fitque 1 R, ſiue minor extremus 1. Similiter poſita 1 R pro maiore extremo, inuenies 1 Q æquale 8 † 7 R & fit 1 R ſiue maior extremus 8. Vnde medii vt ſupra cognoſcentur ponendo 1 R pro maiore medio cuius quadratum 1 Q diuiſum per maiorem extremum 8, exhibet $\frac{1 Q}{8}$ pro minore medio, cuius quadratum $\frac{1 QQ}{64}$ æquatur producto ſub 1 R in minorem extremum 1. Nempe 1 R vnde 1 QQ eſt æquale 64 R. Fitque 1 R, 4 & ſinguli 1. 2. 4. 8. *Lem 51.*

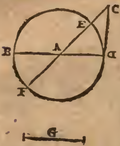
Hinc Canon.

DIuide interuallum cuborum à mediis per differentiam extremorum: quotientem adde quadrato dimidiæ extremorum differentiæ; huius enim ſummę radix quadrata aucta & multata ſupradicto dimidio,

exhibebit extremos.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data differentia extremarum A B, & G potens interuallum cuborum à mediis. Fiat vt A B ad G, ita quadratum G ad quadratum B C. Ponatur autem linea B C perpendicularis ad A B, ſupra quam deſcribatur circulus cuius centrum D, connexaque & producta C D ſecet peripheriam in punctis E & F.



Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes, ſiquidem, hoc poſito cubus G erit æqualis ſolido rectangulo ſub quadrato B C in lineam A B. Et ita cubus G diuiditur per lineam A B. Et ita cubus G diuiditur per lineam A B, & fit quadratum B C pro quotiente Geotrico. Quadratum autem B C additur quadrato B D, & fit quadratum D C, cuius latus D C auctum & multatum dimidia A B, exhibet F C & E C.

34.*undec.* 47.*primi.*

Dico verò F C & E C fore extremas quæſitas. Nam cum ex duabus quibuſcumque quantitatibus inæqualibus (ſiue linearibus, ſiue planis, ſiue ſolidis) maior contineat minorem, & differentiam ambarum, ſequitur quod in ſerie quatuor proportionalium, ſumma extremarum continet minorem extremam bis, & differentiam extremarum ſemel. Ergo pariter ſumma cuborum à mediis continet bis cubum minoris mediæ, & ſemel differentiam cuborum à mediis æqualem cubo G. Sed oſtenſum eſt in Propoſ. præced. Summam cuborum à mediis æquari ſolido ſub rectangulo mediarum vel extremarum, in ſummam extremarum: igitur ſolidum ſub rectangulo mediarum vel extremarum in ſummam ex-

tremarum, continet bis cubum minoris mediæ, & ſemel cubum G, qui eſt æqualis interuallo cuborum à mediis. Igitur cum ſumma extremarum contineat bis minorem extremam & ſemel differentiam extremarum, erit ſolidum ſub rectangulo mediarum vel extremarum in ſummam extremarum æquale duplo ſolido ſub rectangulo mediarum vel extremarum in minorem extremam, plus ſolido ſub eodem rectangulo in differentiam extremarum A B.

Atqui iam demonſtratum eſt in Propoſ. præced. Solidum ſub rectangulo mediarum vel extremarum in minorem extremam æquari cubo minoris mediæ, igitur duplum illius ſolidi æquale erit duplo cubo minoris mediæ. Et proinde ſi ex ſumma cuborum à mediis tollatur duplum ſolidum ſub rectangulo mediarum vel extremarum in minorem extremam remanebit cubus G, qui iam eſt probatus æqualis ſolido rectangulo ſub quadrato B C in lineam A B. Sed mox oſtenſum eſt ex eadem ſubſtractione remanſurum ſolidum ſub rectangulo mediarum vel extremarum in lineam eamdem A B. Ergo ſolidum rectangulum ſub quadrato B C in lineam A B, æquabitur ſolido ſub rectangulo mediarum vel extremarum in A B. Igitur quadratum C eſt æquale rectangulo ſub mediis vel extremis. Ergo per Propoſit. 1. l. 1. extremæ erunt F C & E C. Quod erat demonſtrandum.

Hic iam inter extremas F C & E C, inueniendæ erunt mediæ ſicut in Propoſ. præced.

Appendix.

HInc patet quomodo ſolui poſſit iſtud problema: data differentia cuborum à mediis ex quatuor quantitatibus continuè proportionalibus & plano ſub mediis vel extremis inuenire extremas. Enimuerò, differentia cuborum à mediis diuiſa per planum ſub mediis vel extre-

mis exhibet differentiam extremarum.

Corollarium.

SI fuerint quatuor quantitates continuè proportionales, interuallum cuborum à mediis çquabitur cubo differentiæ mediarum plus triplo ſolido ſub differentia mediarum in planum ſub mediis vel extremis. Hoc theorema ſequitur ex iis quæ hic demonſtrata ſunt, & ex Corollario Propoſ. 7. libri huius. Inde ſequitur vniuerſaliter differentiam cuborum à duabus quibuſcumque quantitatibus æquari cubo differentiæ illarum & triplo ſolido ſub plano ex illis in differentiam earum.

PROPOSITIO LIII.

Data ſumma cuborum ab extremis & ſumma cuborum à mediis ex quatuor quantitatibus continue proportionalibus, inuenire ſingulas.

ESto datus numerus 513 pro ſumma cuborum ab extremis, & 72 pro ſumma cuborum à mediis. Ponatur ſumma extremorum 1 R cuius cubus eſt 1 C. Et quia in ſerie quatuor continuè proportionalium, ſumma cuborum ab extremis plus triplo cuborum à mediis çqualis
Lem. 34. eſt cubo ſummæ extremorum, ſi triplices 72, & productum 216 iungas cum ſumma cuborum ab extremis 513, habebis çquationem inter 1 C & 729. Ergo 1 R ſiue ſumma extremorum eſt 9. Ponatur ergo in operatione noua 1 R pro vno extremo; igitur alter extremus erit 9 - 1 R. Horum cubi ſunt 1 C. Et 729 - 243 R - 1 C † 27 Q qui additi faciunt ſummam 729 - 243 R † 27 Q æqualem datæ ſummæ cuborum ab extremis 513. Ergo 1 Q æquabitur 9 R - 8. Et ita 1 R ſiue alter extremorum eſt

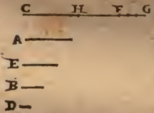
1 vel 8. Singulique vt ſupra erunt 1. 2. 4. 8. Potuit hoc idem reperiri per Propoſ. 51. huius, ſi quidem datur ſumma cuborum à mediis 72. Et inuenta eſt ſumma extremorum 9. Igitur ſinguli non latebunt.

Hinc Canon.

IVnge ſummam cuborum ab extremis cum triplo cuborum à mediis: huius enim ſummę radix cubica eſt aggregatum extremorum.

Hinc Effectio Geometrica.

ESto data linea A potens ſummam cuborum ab extremis, & B potens ſummam cuborum à mediis. Ipſis B & A inueniatur vtrinque tertia proportionalis C F & D. Tum inter A & B ſumatur media proportionalis E. Deinde producatur C F donec F G ſit tripla ipſius D. Et tandem per Propoſ. 38. l. 8. Geomet. pract. Clauii, reperiatur cubus C H æqualis ſolido ſub quadrato E in lineam C G.



Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis partes, ſiquidem cum tres illæ lineæ B, A, C F, ſint continuè proportionales, erit cubus A æqualis ſolido B, A, C F. Similiter & propter eamdem rationem cubus B æquabitur 36 *vndec.*
ſolido rectangulo A B, D; duo autem illa ſolida habent rectangulum A B, hoc eſt quadratum E, pro baſe com- 17. *ſexti.*
muni, ergo quoniam F G tripla eſt ipſius D, ſolidum rectangulum ſub quadrato E in lineam C G æquale eſt ſummæ cuborum ab extremis, plus triplo cuborum à mediis. Quia verò cubus C H ęquatur ſolido ſub quadrato E in lineam C G, erit linea C H radix cubica illius ſolidi.

Dico autem lineam C H fore ſummam extremarum. Nam cubus ſummæ extremarum æquatur cubis extremarum, plus triplo ſolido ſub plano extremarum vel mediarum, in ſummam extremarum. Sed planum ſub mediis vel extremis in ſummam extremarum æquatur cubis mediarum; ergo triplum cuborum à mediis æquatur triplo ſolido ſub plano extremarum in ſummam extremarum. Ergo triplum cuborum à mediis cum cubis extremarum æquatur cubo ſummæ extremarum. Atqui cubus C H æquatur ſolido ex quadrato E in lineam C G, quod ſolidum iam probatum eſt æquale aggregato cuborum ab extremis plus triplo cuborum à mediis. Igitur linea C H eſt ſumma extremarum. Quod erat demonſtrandum.

Corol. prop 51. huius. 36. ſexti.

51. huius.

Data autem ſumma extremarum C H & linea B potente cubos mediarum inueniuntur extremæ imò & ſingulę, vt ſupra per methodum Vietæam.

Propoſ. 51. huius.

Corollarium.

SI fuerint quatuor quantitates continuè proportionales cubus ſummæ extremarum æquabitur cubis extremarum, plus triplo cuborum à mediis.

PROPOSITIO LIV.

Data differentia cuborum à mediis & differentia cuborum ab extremis, inuenire quatuor quantitates continuè proportionales.

ESto datus numerus *56* pro differentia cuborum à mediis, & 511 pro differentia cuborum ab extremis, ponatur 1 R pro differentia extremorum, & quia in ſerie quatuor continuè proportionalium, cubus diffe-

differentiæ extremorum plus triplo cuborum à mediis Lem. 3.
differentia æquatur differentiæ cuborum ab extremis;
ſi triplices 56, & productum 168 addas cum 1 C, habebis
æquationem inter 1 C † 168 & 511. Ergo 1 C æquabitur
343. Igitur 1 R, ſiue differentia extremorum eſt
7. Ponatur ergo nunc 1 R pro minore extremo, igitur
alter extremus erit 1 R † 7. Horum cubi ſunt 1 C &
1 C † 21 Q † 343 † 147 R. Et horum cuborum differentia
eſt 21 Q † 343 † 147 R. Et ita eſt æquatio inter
21 Q † 343 † 147 R, & datam cuborum ab extremis differentiam
511. Igitur 1 Q æquatur 8 - 7 R; fitque 1 R,
ſiue minor extremus 1. Similiter ponendo 1 R pro maiore
extremo 1 Q, fuiſſet æquale 8 † 7 R, vnde 1 R foret 8.
Potuit hoc idem reperiri per Propoſ. 51. huius, ſiquidem
data differentia extremorum 7, & differentia cuborum à 51. huius.
mediis 56, inueniuntur ſinguli.

Hinc Canon.

TOlle triplam cuborum à mediis differentiam de differentia
cuborum ab extremis, & habebis cubum
differentiæ extremorum, proindeque radix cubica huius,
erit differentia extremorum.

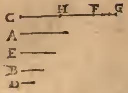
Hinc Effectio Geometrica.

ESto data linea A potens differentiam cuborum ab
extremis, & linea B potens differentiam cuborum
à mediis. Duabus A & B vtrinque ſumatur tertia proportionalis
C G & D. Tùm inter A & B inueniatur media
proportionalis E. Deinde ex C G tollatur F G tripla
ipſius D. Et tandem per Propoſ. 38. l. 8. Geometr.
pract. Clauii, reperiatur cubus C H æqualis ſolido ſub
quadrato E in lineam C F.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis partes;
ſiquidem cum tres illæ B, A, C G, ſint continuè pro-

16 vndec. portionales, erit cubus A æqualis ſolido rectangulo B, A, C G, ſimiliter & propter eamdem rationem, cubus B æquabitur ſolido A, B, D, duo autem illa ſolida habent pro baſe communi rectangulum A B, hoc eſt quadratum E, igitur quoniam F G tripla eſt ipſius D ſolidum ſub quadrato E in lineam C F æquabitur differentiæ cuborum ab extremis multatæ tripla cuborum à mediis differentia. Quia vero cubus C H æqualis eſt ſolido ſub quadrato E in lineam C F, erit linea C H radix cubica illius ſolidi.

17. ſex t.



Dico autem lineam C H fore differentiam extremarum ex quatuor quæſitis: nam interuallum cuborum ab extremis æquatur cubo differentiæ extremarum plus triplo ſolido ſub plano mediarum vel extremarum in differentiam extremarum: ſed iam ſupra oſtenſum eſt ſolidum ex plano mediarum vel extremarum in differentiam extremarum æquari differentiæ cuborum à mediis. Ergo interuallum cuborum ab extremis æquatur cubo differentiæ extremarum plus tripla cuborum à mediis differentia. Atqui mox oſtenſum eſt ſolidum ſub quadrato E in lineam C G æquari differentiæ cuborum ab extremis, & ſolidum ſub quadrato E in F G æquari triplæ cuborum à mediis differentiæ: ergo cum iſtud poſterius ſolidum tollatur à priori & remaneat ſolidum ſub quadrato E in lineam C F, erit illud reſiduum æquale cubo differentiæ extremarum, ſed ex conſtructione, illud idem reſiduum æquatur cubo C H. Ergo cubus C H eſt cubus differentiæ extremarum. Proindeque C H differentia extremarum. Quod erat demonſtrandum.

Corollar. 52. huius. *16. ſexti.* *52. huius.*

Iam autem data differentia extremarum C H, & li-

nea B potente differentiam cuborum à mediis inueniuntur extremę per Propoſ. 52. huius. Imò & ſingulæ vt ſupra explicatum eſt ibidem.

Corollarium.

SI fuerint quatuor quantitates continuè proportionales, differentia cuborum ab extremis æquabitur cubo differentiæ extremarum plus tripla cuborum à mediis differentia.

PROPOSITIO LV.

Data ſumma mediarum & ſolido ex plano ſub mediis vel extremis in differentiam ſummæ extremarum & ſummæ mediarum, inuenire quatuor quantitates continue proportionales.

ESto data ſumma mediorum 6 & ſolidum 24. Ponatur 1 R pro differentia mediorum, & quia in ſerie quatuor continuè proportionalium, ſolidum ſub quadrato differentiæ mediorum in ſummam mediorum ęquatur ſolido ex plano ſub mediis vel extremis in differentiam ſummæ extremorum & ſummæ mediorum. Multiplicando 1 Q per 6, habebis æquationem inter 6 Q & 24. Et proinde 1 Q æquatur 4. Et 1 R ſiue differentia mediorum eſt 2. Data autem ſumma mediorum 6 & differentia mediorum 2 facile diſcernuntur medii. Enimuerò ſumma plus differentia facit duplum maioris medii: minus verò differentia facit duplum minoris medii. Igitur ſinguli erunt. 1. 2. 4. 8.

Hinc Canon.

SOlidum datum diuide per ſummam datam numerorum, & habebis quadratum differentiæ mediorum. Vnde ſinguli non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

ESto data linea A pro ſumma mediarum, linea vero B poſſit ſolidum ex rectangulo ſub mediis vel extremis in differentiam ſummæ mediarum & ſummæ extremarum. Fiat vt linea A ad lineam B; ita quadratum B ad aliud quadratum, quod ſit C.

Manifeſtum eſt obſeruari integrum Canonem: hoc enim poſito ſolidum ſub quadrato C in lineam A æquabitur cubo B. Et proinde cubus B diuiditur per A & fit quadratum C.

34. vndec.

Dico autem lineam C forę differentiam mediąrum ex quęſitis. Nam vt ſuprà demonſtratum fuit, eſt vt ſumma mediarum ad differentiam ſummæ extremarum & ſummæ mediarum; ita rectangulum ſub mediis vel extremis ad quadratum differentię mediarum: ergo ſolidum ſub extremis æquatur cubo B qui eſt ſolidum ſub mediis; ſed mox oſtendimus eumdem cubum B æquari ſolido ſub quadrato C in lineam A; ergo ſolidum ſub quadrato C in lineam A æquatur ſolido ex quadrato differentiæ mediarum in lineam A. Igitur quadratum C æquatur quadrato differentię mediarum. Proindequo linea C eſt differentia mediarum. Quod erat demonſtrandum.

5. huius. *34. vndec.*

Appendix.

HInc patet poſſe ſolui ſequentia problemata: dato eodem ſolido & differentia mediarum inuenire quatuor quantitates continuè proportionales: item dato ſolido ſub ſumma mediarum in quadratum differentiæ mediarum & differentia ſummæ extremarum & ſummæ mediarum. Item dato eodem ſolido & plano ſub mediis vel extremis.

NOVÆ
CLAVIS
AD
GEOMETRIAM.
LIBER TERTIVS.

IN QVO PLVRIMA PROPONVNTVR Problemata hactenus non ſoluta, reſoluunturque tùm Algebricè, tùm Canonicè, tùm Geometricè, in ſerie quinque quantitatum continuè proportionalium.

PROPOSITIO I.

Data ſumma earum quantitatum quæ ſunt in locis imparibus, & ſumma earum quæ in paribus, diſtinguere ſingulas quinque continuè proportionales.

ESto datus numerus 21 pro ſumma eorum qui ſunt in locis imparibus, & 10 pro ſumma eorum qui in paribus. Ponatur 1 R pro medio, & quoniam in ſerie quinque proportionalium quadratum medii addi- *Lem.* 24.

tum producto ex ſumma eorum qui ſunt in locis imparibus, in medium, facit quadratum ſummæ eorum qui ſunt in locis paribus; ducendo 21 in 1 R. Fient 21 R; cui addendo 1 Q, erit æquatio inter 21 R + 1 Q, & 100. Igitur 1 Q erit ęquale 100 - 21 R. Et proinde 1 R ſiue medius eſt 4. Quem ſi tollas à 21, reſiduumque 17 diuidas in duos quorum medius proportionalis ſit 4. habebis 1 & 16 pro extremis. Ergo ducendo medium in quodlibet extremum, inuenies ſecundum & quartum, ſiquidem quadrata ſecundi & quarti æquantur eiuſmodi productis. Vnde ſinguli quinque erunt. 1. 2. 4. 8. 16.

Lem. 6.

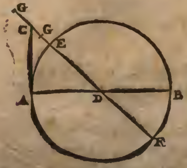
Prop. 2. l. 1.

Hinc Canon.

CApe dimidium ſummę eorum qui ſunt in locis imparibus, & eius dimidii quadratum iunge quadrato alterius ſummę datę: huius enim aggregati radix quadrata, ſupradicto multata dimidio, exhibebit medium. Vnde ſinguli non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

ESto data linea A B pro ſumma earum quæ ſunt in locis imparibus, hoc eſt pro ſumma primæ, tertiæ, & quintæ. Data quoque ſit A C pro ſumma ſecundæ & quartæ. Coniungantur illę ad angulos rectos: & diuiſa A B bifariam in D, centro D, interuallo D A, fiat circulus, & connexa C D ſecet circulum in punctis E & F.



Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes; ſiquidem quadratum A C additur quadrato A D, & fit quadratum D C,

47 primi.

D C, cuius latus D C multatum D E quæ eſt ſemiſſis ipſius A B, relinquit C E.

Dico autem lineam C E fore mediam ex quinque quęſitis. Sit enim, ſi fieri poteſt, media maior vel minor E C, & æqualis E G, ergo rectangulum F G E æquabitur quadrato mediæ E G & rectangulo G E F, ſub *3. ſecundi.* media in ſummam primæ, tertiæ, & quintæ; hoc autem rectangulum ſub media in prædictam ſummam eſt æquale rectangulo ſub media in primam, quadrato mediæ, & rectangulo ſub media in quintam; rectangula *1. ſecundi.* vero ſub media in primam & quintam ſunt æqualia quadratis ſecundæ & quartæ. Igitur rectangulum F G E *17. ſexti.* æquatur quadratis ſecundæ & quartæ plus duplo mediæ quadrato, hoc eſt plus duplo rectangulo ſub ſecunda & quarta. Et proinde rectangulum F G E, erit æquale *17. ſexti.* quadrato ſummæ ſecundæ & quartæ, hoc eſt quadrato *4. ſecundi.* A C. Sed linea A C eſt perpendicularis ad extremitatem diametri, & proinde tangens. Igitur rectangulum *16. tertij.* F C E æquabitur eidem quadrato A C. Ergo rectangu- *36. tertij.* lum F C E erit æquale rectangulo F G E, pars toti, vel totum parti, quod eſt abſurdum. Et proinde media non poterit eſſe maior nec minor C E. Ergo erit illi ęqualis. Quod erat demonſtrandum.

Iam autem ſi per Propoſ. 2. lib. 1. diuidas A C in duas quarum C E ſit media proportionalis, habebis ſecundam & quartam ſigillatim. Vnde duabus viis inueniri poſſunt extremæ, vel tollendo C E ex A B, & reliquam diuidendo in duas quarum C E ſit medio loco proportionalis, vel tribus iam inuentis ſumendo hinc inde quartam proportionalem.

Corollarium.

SI fuerint quinque quantitates continuè proportionales, ſumma extremarum plus dupla media, ſumma ſecundæ & quartæ, & media erunt in continua propor-

Rr

tione: & proinde erit, vt ſumma extremarum plus dupla media ad mediam; ſic quadratum ſummæ earum quæ ſunt in locis paribus ad quadratum mediæ. Nam FC, CA, CE, ſunt continue proportionales.

PROPOSITIO II.

Hoc idem problema aliter ſoluere.

ESto datus numerus 8 pro ſumma eorum qui ſunt in locis imparibus. Et ℞ 20 pro ſumma ſecundi & quarti. Ponatur 1 R pro ſumma extremorum. Igitur medius
Lem. 14. erit 8 - 1 R, cuius quadratum 64 † 1 Q - 16 R, ſi addas
Lem. 6. producto ex 8 in 8 - 1 R, qui productus eſt 64 - 8 R. habebis ſummam 128 † 1 Q - 24 R, æqualem quadrato ſummæ ſecundi & quarti quod eſt 20. Ergo 1 Q erit æquale 24 R - 108. Et fit 1 R, ſiue ſumma extremorum 6. qua ſublata ex ſumma data 8, reſiduus 2 eſt medius. Et proinde ſinguli inuenientur ordinati 3 - ℞ 5 | ℞ 5 - 1 | 2 | ℞ 5 † 1 | 3 † ℞ 5.

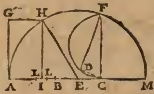
Hinc Canon.

EX duplo quadrato ſummæ eorum qui ſunt in locis imparibus, tolle quadratum ſummę ſecundi & quarti. Reſiduum aufer à quadrato quod fit ex ſumma trium dimidiorum ſummæ maioris datæ: huius enim reſidui radix quadrata detracta tribus ſupradictis dimidiis, exhibet ſummam extremorum. Vnde nec medius, nec ſinguli latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data AB pro ſumma earum quę ſunt in locis imparibus & CD pro ſumma ſecundæ & quartę. Producatur AB donec BE ſit æqualis dimidio ipſius AB,

tùm centro E, interuallo E A, deſcribatur ſemicirculus, ſumptaque B C ęquali B A, erigatur C F perpendiculariter ad A B, & in facto ſemicirculo ſupra C F inſcribatur C D, nectaturque D F, cui ęqualis ponatur A G perpendicularis ad B A, & ducatur G H parallela A E, donec occurrat peripheriæ in puncto H, ex quo demittatur H I perpendiculariter ad ſemidiametrum A E.



Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes; ſiquidem cum B E ſit dimidium A B, erit tota diameter A M tripla A B: igitur cum B C ſit ęqualis A B erit etiam C M ipſi A B æqualis, & proinde rectangulum A C M, hoc eſt quadratum C F æquabitur duplo quadrato A B. Ex quadrato autem C F tollitur quadratum C D, & remanet quadratum F D, hoc A G, hoc eſt H I, quod quadratum H I tollitur ex quadrato lineæ H E æqualis tribus dimidiis A B, & remanet quadratum I E, cuius latus I E detractum iiſdem tribus dimidiis, exhibet A I. 8. ſexti. 4. ſexti. 17. ſexti. 47. primi.

Dico autem A I fore ſummam extremarum de quinque quæſitis. Sit enim, ſi fieri poteſt, ſumma extremarum maior vel minor A I, & æqualis A L. Ergo L B erit media, & proinde rectangulum A L B æquabitur quadratis ſecundæ & quartæ. Igitur cum B M ſit dupla A B, erit rectangulum A L M æquale triplo quadratorum ſecundæ & quartæ plus duplo quadrato extremarum. Ergo ſi rectangulo A L M addideris quadratum C D quod eſt æquale quadratis ſecundæ & quartæ, plus duplo mediæ quadrato, habebis ſummam ęqualem duplo quadrato ſummæ earum quæ ſunt in locis imparibus, hoc eſt æqualem quadrato C F, ſed quadratum C F æquatur quadratis F D & C D. Igitur rectangulum A L M & quadratum C D æquale eſt quadratis F D & C D. Et ita 1. ſecundi. 17. ſexti. 1. ſecundi. 4. ſecundi. 17. ſexti. 4. ſecundi. 47. primi.

dempto vtrimque quadrato C D, reſtat rectangulum A L M æquale quadrato F D, hoc eſt A G, hoc eſt H I, hoc eſt rectangulo A I M. Quod eſt abſurdum, & contra quartam ſecundi Elementorum. Ergo ſumma extremarum non poteſt eſſe maior, nec minor A I. Et proinde erit illi æqualis. Quod erat demonſtrandum.

8. ſexti. 4 ſexti. 17. ſexti.

Corollarium.

SI fuerint quinque quantitates continuè proportionales, quadratum ſummæ extremarum, duplo eius quadratum ſummæ earum quæ ſunt in locis imparibus multatum quadrato ſummæ ſecundæ & quartæ, & quadratum quod fit a compoſita ex dupla ſumma earum quæ ſunt in locis imparibus & media, ſunt in continua proportione. Siquidem lineæ A I, I H, I M ſunt continuè proportionales, ergo & illarum quadrata erunt etiam continuè proportionalia.

20. ſexti.

PROPOSITIO III.

Data ſumma extremarum ex quinque quantitatibus continue proportionalibus & ſumma reliquarum, diſtinguere ſingulas.

ESto datus numerus 17 pro ſumma extremorum. Et 14 pro ſumma reliquorum. Ponatur medius omnium 1 R. Ergo 14 - 1 R erit ſumma ſecundi & quarti. Cuius quadratum eſt 196 † 1 Q - 28 R. Et quia medius, ſumma ſecundi & quarti, itemque ſumma extremorum plus duplo medio, ſunt in continua proportione, erit quadratum ſummæ ſecundi & quarti iam inuentum 196 † 1 Q 28 R æquale producto ſub medio in ſummam extremorum plus duplo medio. Et proinde multiplican-

Corollar. 1. huius.

do 1 R per 17 † 2 R, habebis æquationem inter 17 R † 2 Q & 196 † 1 Q − 28 R. Igitur poſt debitam reductionem, 1 Q æquabitur 196 − 45 R. Et fit 1 R ſiue medius 4 reliqui diſtinguentur vt in duabus Propoſ. præced. Eruntque 1. 2. 4. 8. 16.

Hinc Canon.

SVmmam extremorum datam iunge cum duplo alterius ſummæ datæ; huius conflati cape dimidium, & huius dimidii quadrato adde quadratum poſterioris ſummæ datæ: iſtius enim aggregati radix quadrata ſupradicto multata dimidio exhibet medium de quinque proportionalibus quæſitis. Vnde ſinguli non latebunt.

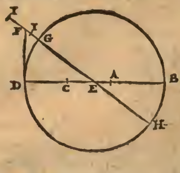
Hinc Effectio Geometrica.

ESto data ſumma extremarum A B. Et ſumma reliquarum A C. Coniungantur illę in directum & ſumatur C D ęqualis A C; diuiſaque tota D B bifariam in E, centro E, interuallo E B, vel E D fiat circulus: tùm ducatur D F æqualis D C, & perpendicularis ipſi D B connexaque F E ſecet circulum in G & H.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis partes, ſiquidem ſumma extremarum A B iungitur duplo alterius ſummę & fit D B: & quadrato D E quę eſt dimidia D B, additur quadratum D F, hoc eſt C A, & fit quadratum F E, cuius latus F E multatum G E relinquit F G. *47 primi.*

Dico autem lineam F G fore mediam ex quęſitis. Sit enim, ſi fieri poteſt, media maior vel minor F G, & æqualis G I. Quoniam ergo in ſerie quinque proportionalium ſumma extremarum plus dupla media, ad ſummam ſecundæ & quartæ; eſt vt ſumma ſecundæ & quartæ ad mediam; erit componendo, vt ſumma omnium *Corollar. Propoſ. 1.*

plus media ad ſummam ſecundæ & quartæ; ita ſumma



trium mediarum ad mediam. Et permutando, vt ſumma omnium plus media ad ſummam trium intermediarum, ſic ſumma ſecundæ & quartæ ad mediam. Et componendo vt ſumma extremarum plus dupla ſumma ſecundæ & quartæ, plus tripla media ad ſummam trium intermediarum hoc eſt vt H I ad D F, ſic ſumma trium inter mediarum D F ad mediam G I. Ergo quadratum D F æquabitur rectangulo H I G. Sed F D perpendicularis eſt ad extremitatem diametri, & proinde tangens. Ergo quadratum F D æquatur rectangulo H F G. Igitur rectangulum H F G eſt æquale rectangulo H I G, pars toti, vel totum parti, quod eſt abſurdum. Et proinde media non poterit eſſe maior vel minor F G. Ergo illi erit æqualis. Quod erat demonſtrandum.

17. ſexti.
16 tertii.
36 tertii.

Iam autem reliquæ & ſingulæ diſcernentur vt in duabus propoſitionibus præcedentibus.

Corollarium.

SI fuerint quinque quantitates continuè proportionales, ſumma extremarum plus dupla ſumma ſecundæ & quartæ plus tripla media eſt ad ſummam trium intermediarum; ſicut ſumma trium intermediarum ad mediam. Vnde quadratum ſummæ trium intermediarum ad quadratum mediæ; erit vt ſumma extremarum plus dupla ſumma ſecundæ & quartæ, plus tripla media ad mediam. Item, in eadem ſerie quadratum ſummæ trium intermediarum æquabitur plano ex media in ſummam extremarum, plus dupla

ſummæ ſecundæ, & quartæ plus tripla media. Item, ſolidum ſub media in quadratum ſummæ trium intermediarum æquale eſt ſolido ſub quadrato mediæ in ſummam extremarum plus dupla ſumma ſecundæ & quartæ plus tripla media. Hæc omnia ſequuntur ex eo quod HF, FD, FG ſint in continua proportione.

PROPOSITIO IV.

Hoc idem problema alio modo perficere.

ESto datus numerus 6 pro ſumma extremorum. Et 2 † ℞ 20 pro ſumma reliquorum. Ponatur 1 R pro ſumma ſecundi & quarti. Ergo medius erit 2 † ℞ 20 - 1 R, cuius duplum 4 † ℞ 80 - 2 R additum 6, facit 10 † ℞ 80 - 2 R qui multiplicatus in medium 2 † ℞ 20 - 1 R exhibet productum 20 - 14 R - ℞ 320 Q † 2 Q † ℞ 3920 † ℞ 1600 æqualem quadrato ſummæ ſecundi & quarti 1 Q. Ergo poſt debitam reductionem 1 Q æquabitur 14 R † ℞ 320 Q - 60 - ℞ 3920. Inde ſic extrahitur radix: dimidium numeri radicum eſt 7 † ℞ 80 ex cuius quadrato 129 † ℞ 1,680 debet tolli numerus abſolutus & relinquitur 69 † ℞ 3920, cuius radix quadrata eſt 7 † ℞ 20 quæ detracta dimidio numeri radicum 7 † ℞ 80, exhibet ℞ 20 pro valore 1 R. Igitur ſi ℞ 20 tollatur de ſumma trium intermediorum 2 † ℞ 20, reſtabit 2 pro medio. Et ita ſi inueſtigentur reliqui vt prius, erunt ſinguli 3 - ℞ 5 | ℞ 5 - 1 | 2 | ℞ 5 † 1 | 3 † ℞ 5.

Corollar. Propoſ. 1. huius.

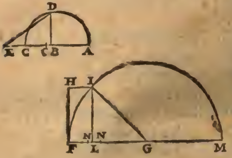
Hinc Canon.

DVplum quadratum ſummæ trium intermediorum adde cum plano ex duabus ſummis datis: hoc aggregatum tolle ex quadrato, quod fit à dupla trium intermediarum ſumma, iuncta dimidiæ extremarum ſummæ: huius enim reſidui radix quadrata detracta duplæ trium

intermediorum ſummæ iunctæ cum dimidio extremarum, exhibet ſummam ſecundi & quarti. Vnde ſinguli non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data linea A B pro ſumma extremarum, & B C pro ſumma reliquarum. Supra A C fiat ſemicirculus, & erecta B D perpendiculari, ſumatur B E potens duplum quadratum B C nectaturque E D. Tum capiatur F G æqualis duplo C B, & dimidio A B, & centro G, interuallo G F deſcribatur ſemicirculus, ponaturque F H perpendicularis ad extremitatem diametri, & æqualis E D, ductaque H I parallela F G, producatur donec occurrat peripheriæ in puncto I, ex quo demittatur ad angulos rectos I L.



Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes: ſiquidem rectangulum C B A ſub ſummis datis, hoc eſt quadratum B D additur quadrato E B quod
8. *ſexti.* eſt duplum quadrati C B, & fit quadratum E D, hoc eſt
4. *ſexti.* F H, hoc eſt I L quod quadratum I L tollitur ex qua-
17 *ſexti.* drato lineæ I G æqualis duplo C B plus dimidio A B, &
47. *primi* relinquitur quadratum L G, cuius latus L G detractum F G, exhibet F L.

Dico autem F L fore ſummam ſecundæ & quartæ. Sit enim, ſi fieri poteſt, ſumma ſecundæ & quartæ maior aut minor F L, & æqualis F N. Igitur cum G M ſit æqualis G F, erit tota F M quadruplæ C B plus tota A B, æqualis. Cum ergo ponatur E N ſumma ſecundæ & quartæ, erit N M æqualis quadruplæ mediæ, plus tripla

tripla ſumma ſecundæ & quartæ F N, plus ſumma extremarum A B. Et proinde rectangulum F N M æquabitur quadruplo rectangulo ex ſumma ſecundæ & quartæ in mediam, plus triplo quadrato F N plus rectangulo ex ſumma ſecundæ & quartæ in ſummam extremarum. 1. *ſecundi*

Quadratum autem F N æquale eſt quadratis ſecundæ & quartę plus duplo rectangulo ſub ſecunda & quarta, hoc eſt plus duplo mediæ quadrato: Igitur rectangulum F N M ęquatur duplo quadrato F N duplo quadrato mediæ, quadruplo rectangulo ſub media in ſummam ſecundæ & quartæ, quadratis ſecundæ & quartæ, plus rectangulo ex ſumma ſecundę & quartę in ſummam extremarum. Sed iſtis omnibus ſimul ſumptis æquatur quadratum E D: eſt enim æquale duplo quadrato C B & quadrato B D. Sumpta autem C O æquali F N reſtabit O B media cum C B ſit ſumma trium intermediarum: ergo quadratum C B ęquabitur quadratis partium C O, O B & duplo rectanguli C O B. ergo duplum quadratum C B ęquatur duplo quadrato C O, hoc eſt F N, duplo quadrato mediæ, & quadruplo rectangulo ſub media in ſummam ſecundæ & quartæ. Quadratum vero B D, hoc eſt rectangulum C B A eſt æquale rectangulo ex media O B in B A & rectangulo ex C O hoc eſt F N in ſummam extremarum B A. Rectangulum autem ex media O B in ſummam extremarum B A, æquale eſt quadratis ſecundæ & quartæ. Et proinde quadratum E D, hoc eſt F H, hoc eſt L I, hoc eſt rectangulum F L M ęquatur rectangulo F N M. Quod eſt abſurdum, & contra quintam ſecundi. Ergo ſumma ſecundę & quartę non poteſt eſſe maior nec minor F L. Igitur erit illi ęqualis. Quod erat demonſtrandum. 4. *ſecundi* 17. *ſexti* 4. *ſecundi* 1. *ſecundi* 1. *ſecundi* 17. *ſexti*

Corollarium.

SI fuerint quinque quantitates continuè proportionales, quadratum ſummæ ſecundæ & quartæ, duplum quadratum ſummæ trium intermediarum plus rectangulo ex ſumma trium intermediarum in ſummam extremarum, itemque quadratum compoſitę ex ſumma extremorum & tripla ſumma ſecundæ & quartæ & quadrupla media, erunt in continua proportione. Nam ſunt iſtæ tres lineæ F L, L I, L M, continuè proportionales. Ergo & earum quadrata erunt quoque continuè proportionalia.

PROPOSITIO V.

Data media ex quinque quantitatibus continue proportionalibus, & ſumma reliquarum quatuor, diſtinguere ſingulas.

ESto datus numerus 9 pro medio, & 112 pro ſumma reliquorum. Ponatur autem 1 R pro ſumma ſecundi & quarti. Ergo ſumma extremorum erit 112 - 1 R. Ergo per idem theorema, quo vſi ſumus in operatione Algebrica Propoſ. 3. huius $\frac{1Q}{9}$ exhibet ſummam extremorum plus duplo medio; quare ſi duplum medii nempe 18 inde ſuſtuleris, reſiduum $\frac{1Q-162}{9}$ erit ſumma extremorum. Sed hęc eadem ſummę extremorum iam ſupra inuenta eſt 112 - 1 R. Ergo erit ęquatio inter 112 - 1 R & $\frac{1Q-162}{9}$. Igitur poſt debitam reductionem, 1 Q eſt æquale 1170 - 9 R. Et fit 1 R, ſiue ſumma ſecundi & quarti 30. Singulique poſtea ex ſupradictis inuenientur. 1. 3. 9. 27. 81.

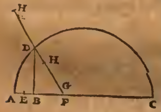
Corollar. 1. huius.

Hinc Canon.

NOncuplum quadrati quod fit à dimidio medii dati, iunge cum producto ex duobus datis numeris; ſummæ huius radix quadrata ſupradicto multata dimidio exhibebit ſummam eorum qui ſunt in locis paribus. Vnde ſinguli non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data media A B & ſumma reliquarum B C. Coniungantur illæ in directum, & facto ſupra totam A C ſemicirculo, erigatur B D perpendicularis ipſi A C. Tùm diuiſa A B bifariam in E, ſumatur B F tripla ipſius A E vel E B, nectaturque D F & ex ea tollatur F G æqualis A E vel E B.



Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes, ſiquidem quadratum B F eſt noncuplum quadrati E B, quia linea B F eſt tripla lineæ B E. Quadratum autem B F additur quadrato B D, & fit quadratum F D, cuius latus F D multatum F G quæ eſt dimidium A B, exhibet D G. *10 ſexti.* *47. primi.*

Dico vero lineam D G fore ſummam ſecundę & quartę ex quinque proportionalibus quæſitis. Sit enim, ſi fieri poteſt, eiuſmodi ſumma maior vel minor G D & æqualis G H. Ergo quadratum F H quod æquatur quadratis F G, G H & duplo rectanguli F G H, erit etiam æquale quadrato E B plus quadrato aggregati ſecundæ & quartæ, plus rectangulo ſub media in ſummam ſecundæ & quartæ: atqui quadratum aggregati ſecundæ & quartæ, æquale eſt quadratis ſecundæ & quartæ plus duplo mediæ quadrato: duplum autem me- *4 ſecundi.* *4. ſecundi. 17. ſexti.* *4 ſecundi. & 20. ſexti.*

diç quadratum çquatur octuplo quadrato B E. Ergo quadratum F H æquabitur noncuplo quadrati B E, plus quadratis ſecundæ & quartæ, plus rectangulo ex media in ſecundam & quartam.

Sed cum B C æqualis ſit primæ, ſecundæ, quartæ 1. ſecundi. & quintç, rectangulum A B C æquale erit quadratis ſe- 17. ſexti. cundç & quartç plus rectangulo ex media in ſecundam & quartam: quadratum verò B F eſt noncuplum quadra- 8. ſexti. ti B E. Et rectangulum A B C çquatur quadrato B D. 4. ſexti. Ergo quadratum F H erit æquale quadratis B F & B D. 17. ſexti. Sed illa duo quadrata B F & B D æquantur quadrato F D; igitur quadratum F D eſt æquale quadrato F H, 47. primi. pars toti, vel totum parti. Quod eſt abſurdum. Et proinde ſumma ſecundç & quartæ non poteſt eſſe maior vel minor G D. Ergo erit illi çqualis. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO VI.

Hoc idem problema alio modo ſoluere.

SIt datus numerus 2 pro medio, & 6 † ℞ 20 pro ſumma reliquorum. Ponatur 1 R pro ſumma extremorum, igitur 6 † ℞ 20 - 1 R erit ſumma ſecundi & quarti. Cuius quadratum 56 - 12 R - ℞ 80 Q † 1 Q † ℞ 2880 Lem. 6. multatum duplo quadrato medii 8, exhibet 48 - 12 R - ℞ 80 Q † 1 Q † ℞ 2880 pro quadratis ſecundi & quar- Lem. 24. ti. Si vero ſumma extremorum 1 R multiplicetur per medium, habes quoque quadrata ſecundi & quarti 2 R. Igitur 2 R çquabuntur 48 - 12 R - ℞ 80 Q † 1 Q † ℞ 2880. Et poſt debitam reductionem, erit 1 Q çquale 14 R † ℞ 80 Q - 48 - ℞ 2880. Ex quo ſic erues radicem quadratam. Dimidium numeri radicum eſt 7 † ℞ 20 ex cuius quadrato 69 † ℞ 3920 tolle numerum abſolutum, & relinquuntur 21 † ℞ 80, cuius radix quadrata ℞ 20 † 1 ſublata ex dimidio numeri radicum 7 † ℞ 20 exhibet

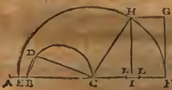
6 pro valore vnius radicis, hoc eſt pro ſumma extremorum. Igitur tollendo 6 ex ſumma data, habebis ℞ 20 pro ſumma ſecundi & quarti. Et ita ſinguli erunt 3 - ℞ 5 | ℞ 5 - 1 | 2 | ℞ 5 + 1 | 3 + ℞ 5.

Hinc Canon.

TOlle duplum quadratum medii ex quadrato ſummæ reliquorum datę: reſiduum detrahe quadrato quod fit ex dimidio medii iuncto cum ſumma reliquorum: iſtius enim reſidui radix quadrata detracta aggregato ſummę datę plus dimidio medii, exhibet ſummam extremorum. Vnde nec ſumma ſecundi & quarti, nec ſinguli latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data media A B & ſumma reliquarum B C. Supra B C fiat ſemicirculus in quo inſcribatur linea B D potens duplum quadratum A B, & nectatur D C. Tùm diuiſa A B bifariam in E, centro C, interuallo C E, deſcribatur maior ſemicirculus, cuius diameter E F, ad cuius extremitatem perpendiculariter erigatur F G æqualis C D, & ducta G H parallela F E occurrat peripheriæ in puncto H, ex quo demittatur H I perpendicularis ad F C.



Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis partes: ſiquidem ex quadrato B C tollitur quadratum B D quod eſt duplum quadrati A B, & reſtat quadratum D C. Tum ex quadrato H C, hoc eſt E C, tollitur quadratum I H, hoc eſt F G, hoc eſt C D, & relinquitur quadratum C I, cuius latus C I detractum C F, hoc eſt E C exhibet I F.

Dico autem lineam I F fore ſummam extremarum de quinque quæſitis. Sit enim, ſi fieri poteſt, ſumma extremarum maior vel minor F I, & æqualis F L. Igitur cum E C æquetur ſummæ extremarum, ſummæ ſecundę & quartæ, & dimidio mediæ, erit E F æqualis duplæ ſummę extremarum duplo aggregati ſecundæ & quartæ & inſuper toti mediæ: cum ergo F L ſit ſumma extremarum, erit L E æqualis ſecundæ extremarum, duplo aggregati ſecundæ & quartæ, & toti mediæ: & proinde

1. ſecundi. rectangulum F L E æquabitur quadrato ſummę extremarum, duplo rectangulo ſub ſumma extremarum in ſummam ſecundæ & quartæ, & rectangulo ſub mediæ in

1. ſecundi. ſummam extremarum; quod poſtremum rectangulum

17. ſexti. æquale eſt quadratis ſecundæ & quartæ.

Si autem quadratis ſecundę & quartę addas duplum

17. ſexti. rectangulum ſub ſecunda & quarta, ſiue quod idem eſt,

4. ſecundi. duplum medię A B quadratum, habebis quadratum aggregati ſecundæ & quartæ: igitur rectangulum F L E plus duplo medię A B quadrato æquabitur quadratis aggregati extremarum, aggregati ſecundę & quartę, & duplo rectangulo ſub ſumma extremarum in ſummam

4. ſecundi. ſecundæ & quartæ, quæ omnia ſimul ſumpta, ſunt æqualia quadrato B C, hoc eſt, quadratis B D, D C, igitur tollendo vtrinque commune quadratum B D; re-

8. ſexti. ſtabit rectangulum F L E æquale quadrato D C, hoc

4. ſexti. eſt F G, hoc eſt I H, hoc eſt rectangulo F I E, quod

17. ſexti. eſt abſurdum, & contra quintam ſecundi Elementorum. Ergo ſumma extremarum non poteſt eſſe maior nec minor F I. Et proinde erit ipſi æqualis. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

SI fuerint quinque quantitates continuè proportionales, quadratum ſummæ extremarum, quadratum aggregati extremarum & ſecundæ & quartæ multatum duplo medię quadrato, itemque quadratum compoſitæ

ex ſumma earum quę ſunt in locis imparibus & dupla ſumma ſecundę & quartę erunt in continua proportione. *ex ſenti.* Nam tres illæ lineæ F I, I H, & I E ſunt continuè proportionales; ergo illarum quadrata erunt etiam proportionalia.

PROPOSITIO VII.

Data ſumma quinque quantitatum continue proportionalium, & aggregato quadratorum à ſingulis, diſtinguere ſingulas.

ESto datus numerus 31 pro ſumma quinque proportionalium, & numerus 341 pro aggregato quadratorum à ſingulis. Ponatur 1 R pro ſumma eorum qui ſunt in locis paribus. Et quoniam in ſerie quinque proportionalium, quadratum ſummæ omnium multatum quadratis ſingulorum relinquit numerum æqualem producto ex ſumma omnium in duplam ſummam eorum qui ſunt in locis paribus; cape quadratum ſummæ omnium 31, nempe 961. Et ex 961 tolle aggregatum quadratorum à ſingulis 341. Reſiduum 620 æquale erit producto ex 31 in 2 R. Proindeque erit æquatio inter 620 & 62 R. Ergo 1 R, ſiue ſumma ſecundi & quarti eſt 10, quam ſi tollas ex ſumma omnium 31, reſtabit ſumma eorum qui ſunt in locis imparibus 21. Igitur per Prop. 1. vel 2. huius, ſinguli erunt 1. 2. 4. 8. 16.

Hinc Canon.

TOlle aggregatum quadratorum à ſingulis de quadrato ſummæ omnium: reſiduum diuide per ſummam omnium & habebis duplum aggregatum ſecundi & quarti: vel reſiduum diuide per duplam omnium ſum-

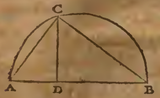
mam, & habebis aggregatum ſecundi & quarti. Vnde ſinguli non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

ESto data linea A B pro ſumma quinque linearum continue proportionalium, data quoque ſit linea A C potens quadrata ſingularum. Supra ipſam A B fiat ſemicirculus in quo inſcribatur A C, & connexa C B demittatur C D perpendiculariter ad diametrum A B.

47. primi. Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes; ſiquidem ex quadrato A B tolluntur quadrata à ſingulis æqualia quadrato A C, & remanet quadratum C B. Quoniam verò angulus A C B in ſemicirculo rectus eſt, demiſſa perpendicularis C D facit triangulum C B D æquiangulum triangulo A B C, ergo vt A B ad B C; ita B C ad B D. Igitur rectangulum A B D æquatur quadrato B C. Et proinde quadratum B C diuiditur per lineam A B & fit linea D B pro quotiente Geometrico. *31. tertii. 8. ſexti. 4. ſexti. 17. ſexti.*

Dico verò lineam D B fore duplam earum linearum quæ ſunt in locis paribus. Cum enim ſumma A B æqualis ſit ſummæ earum quæ ſunt in locis imparibus & aggregati ſecundæ & quartæ, erit quadratum A B



æquale quadratis ſummæ earum quæ ſunt in locis imparibus, & aggregati ſecundæ & quartæ & inſuper duplo rectangulo ſub ſumma earum quæ ſunt in locis imparibus in aggregatum ſecundæ & quartæ. Quadratum autem ſummæ earum quæ ſunt in locis imparibus æquale eſt quadratis primæ, tertiæ & quintæ, plus duplo rectanguli ex media in ſummam earum quæ ſunt in locis imparibus. Et quadratum aggregati ſecundæ & quartæ *4. ſecundi. Coroll. propoſ. 10. lib. 1.*

æquatur

æquatur quadratis ſecundæ & quartæ plus duplo rectan- 4 *ſecundi.*
guli ſub ſecunda & quarta: rectangulum verò ex media
in ſummam earum quæ ſunt in locis imparibus eſt æqua-
le quadrato mediæ plus quadratis ſecundæ & quartæ. 1. *ſecundi.*
Ergo quadratum A B æquatur quadratis ſingularum
plus duplo rectangulo ex ſumma earum quæ ſunt in lo- 17. *ſexti.*
cis imparibus in ſummam ſecundæ & quartæ plus duplo
quadrato aggregati ſecundæ & quartæ. Et proinde qua-
dratum A B æquale erit quadratis ſingularum plus duplo 1. *ſecundi.*
rectangulo ex ſumma omnium in ſummam ſecundæ &
quartæ.

Sed idem quadratum A B æquatur quadratis A C & C B. Igitur cum quadratum A C ſit æquale quadratis ſingularum, erit quadratum C B æquale duplo rectangulo ex ſumma omnium A B in ſummam ſecundæ & quartæ. Sed quadratum C B æquatur rectangulo A B D, vt iam probatum eſt. Ergo cum A B ſit ſumma omnium, erit B D dupla ſumma earum, quæ ſunt in locis paribus. Quod erat demonſtrandum.

Itaque dimidium B D æquatur aggregato ſecundæ & quartæ. Et proinde, A D plus dimidio B D æquabitur ſummæ earum quæ ſunt in locis imparibus. Igitur per Propoſ. 1. vel 2. huius, ſingulæ non latebunt.

Corollarium.

SI fuerint quinque, imò quotcumque quantitates continuè proportionales numero impari; & ex quadrato ſummæ omnium tollantur quadrata ſingularum residui dimidium æquabitur plano ſub ſumma omnium in ſummam earum quæ ſunt in locis paribus. Item, in eadem ſerie, quadrata ſingularum æqualia ſunt plano ex ſumma omnium in differentiam earum quæ ſunt in locis imparibus, & earum quæ in paribus. Item, in eadem ſerie, quadratum ſummæ omnium ad quadrata ſingularum, erit vt ſumma omnium ad differentiam earum quæ

ſunt in locis imparibus, & earum quæ in paribus. Hæc omnia ſequuntur ex eo quod tria illa triangula A B C, D C B, A D C ſunt æquiangula, ergo eorum latera
8. ſexti. 4. ſexti. proportionalia ſunt. Ergo rectangulum A B D eſt æquale quadrato B C, & rectangulum B A D æquale quadrato A C, eſtque vt prima A B ad tertiam pro-
20. ſexti. portionalem A D; ita quadratum primæ A B ad quadratum ſecundæ A C.

PROPOSITIO VIII.

Hoc idem problema alio modo ſoluere.

DAtis iiſdem 31. & 341. Ponatur 1 R pro ſumma eorum qui ſunt in locis imparibus. Ergo 31 - R erit ſumma ſecundi & quarti. Igitur propter idem theorema quo vſi ſumus in Propoſitione præcedente, ſi ex quadrato 31 quod eſt 961 tollas 3.1. reſiduum 620 æquatur producto 1922 - 62 R. Ergo 1302 ſunt æqualia 62 R. Et proinde fit 1 R, ſiue ſumma eorum quæ ſunt in locis imparibus 21. Igitur tollendo 21 ex ſumma omnium 31. reſiduum 10 eſt ſumma ſecundi & quarti. Et ita per Propoſitiones præcedentes ſinguli erunt 1. 2. 4. 8, 16.

Hinc Canon.

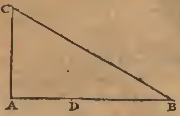
QVadratum ſummæ omnium adde quadratis ſingulorum, ſummam confectam diuide per duplam omnium ſummam, & habebis ſummam earum quæ ſunt ſunt in locis imparibus. Vnde ſinguli non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data ſumma omnium A B. Data quoque ſit linea A C potens quadrata ſingularum. Coniungantur illæ ad angulos rectos, & nectatur C B. Tum fiat vt du-

pla A B ad B C, ita B C ad B D.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis partes, ſiquidem quadratum ſummæ omnium A B additur quadrato A C æquali quadratis ſingularum, & fit quadratum B C. Quoniam autem eſt vt dupla A B ad B C; ita B C ad B D, quadratum B C ęquabitur rectangulo duplo A B D; & ſic quadratum B C diuiditur per duplam A B, & fit linea B D pro quotiente Geometrico. *47. primi.* *17. ſexti.*



Dico autem lineam B D fore ſummam earum quæ ſunt in locis imparibus. Nam rectangulum ex dupla A B in B D æquatur rectangulo ex dupla B D in A B. Ergo rectangulum ex AB in duplam B D eſt ęquale quadrato B C, hoc eſt quadratis A B, A C: cum igitur ex Corol. Prop. pręced. Quadratum A C æquetur rectangulo ſub ſumma omnium A B in differentiam earum quæ ſunt in locis imparibus, & earum quæ in paribus, erit dupla B D æqualis A B plus illa differentia. *i ſecundi.*

Sed ſumma duarum quarumque linearum plus illarum differentia æquatur duplo maioris, vt olim dictum eſt; ergo cum ſumma earum quæ ſunt in locis imparibus, maior ſit ſumma ſecundæ & quartæ; erit dupla B D æqualis duplæ ſummæ earum quæ ſunt in locis imparibus; & propterea ipſa B D erit ſumma earum quæ ſunt in locis imparibus. Quod erat demonſtrandum. *15 quinti.*

Corollarium.

SI fuerint quinque, imò quotcumque, quantitates continuè proportionales numero impari, quadratum ſummæ omnium plus quadratis ſingularum erit ęquale

duplo rectangulo ſub ſumma omnium in ſummam earum quæ ſunt in locis imparibus.

PROPOSITIO IX.

Idem problema aliter ſoluere.

SIt data numerus 8 † ℞ 20 pro ſumma omnium. Et 44 pro quadratis ſingulorum. Ponatur 1 R pro differentia eorum qui ſunt in locis imparibus, & eorum qui in paribus, ergo multiplicando ſummam omnium 8 † ℞ 20 per 1 R, habebis productum 8 ℞ † ℞ 20 Q, æqualem aggregato quadratorum à ſingulis 44. Et proinde facta diuiſione erit 1 R æqualis 8 - R 20, ergo ſi ſi 8 - ℞ 20 tollas ex ſumma omnium 8 † ℞ 20, reſiduum ℞ 80 erit duplum ſummæ ſecundi & quarti. Igitur ſumma ſecundi & quarti eſt ℞ 20. Et ita per Propoſitiones præcedentes, erunt ſinguli 3 - ℞ 5 | ℞ 5 - 1 | 2 | ℞ 5 - 1 | 3 † ℞ 5.

Hinc Canon.

AGgregatum quadratorum à ſingulis diuide per ſummam omnium, & habebis differentiam ſummæ ſecundi & quarti à ſumma eorum qui ſunt in locis imparibus.

Hinc Effectio Geometrica.

SVmmæ omnium, & lineæ potenti quadrata ſingulorum, inueniatur tertia proportionalis.

Manifeſtum eſt obſeruari integrum Canonem, hoc enim poſito, ſumma omnium cum tertia proportionali inuenta, facis rectangulum æquale quadratis ſingularum; & ita quadrata ſingularum diuiduntur per ſummam omnium, & fit tertia proportionalis, pro quotiente Geometrico.

Dico autem tertiam illam proportionalem fore differentiam aggregati ſecundæ & quartæ, & ſummæ earum quæ ſunt in locis imparibus. Demonſtratio patet ex Coroll. Propoſ. 7.

PROPOSITIO X.

Data ſumma earum quantitatum quæ ſunt in locis imparibus, & aggregato quadratorum à quinque proportionalibus, inuenire ſingulas.

ESto datus numerus 91 pro ſumma eorum qui ſunt in locis imparibus. Et 7381 pro aggregato quadratorum à ſingulis. Ponatur 1 R pro differentia eorum qui ſunt in locis paribus, & eorum qui in imparibus. Ergo 91 - 1 R erit ſumma ſecundi & quarti, quæ ſi addatur 91, fient 182 - 1 R pro ſumma omnium. Igitur multiplicando 182 - 1 R per 1 R habebis 182 R - 1 Q pro quadratis ſingulorum & ita erit æquatio inter 7381 & 182 R - 1 Q. Ergo 1 Q æquabitur 182 R - 7381. Et fit 1 R, ſiue differentia eorum qui ſunt in locis imparibus, & eorum qui in paribus. 61. Singulique 1. 3. 9. 27. 81. *Corollar. Propoſ. 7. huius.*

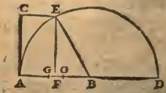
Aliter ponatur 1 R pro ſumma omnium igitur 1 R - 91 eſt ſumma ſecundi & quarti, quam ſi tollas à 91 ſ fit 182 - 1 R pro differentia eorum qui ſunt in locis imparibus, & eorum qui in paribus. Ergo multiplicando 1 R per 182 - 1 R, fiet aggregatum quadratorum à ſingulis 182 R - 1 Q. Erit igitur æquatio inter 7381 & 182 R - 1 Q. Vnde 1 Q eſt æquale 182 R - 7381. Et fit 1 R ſiue ſumma omnium 121. Singulique vt ſupra 1. 3. 9. 27. 81. *Corollar. Propoſ. 7. huius.*

Hinc Canon.

EX quadrato ſummæ eorum qui ſunt in imparibus locis tolle quadrata ſingulorum : huius enim reſidui radix quadrata detracta & addita ſupradictæ ſummæ exhibet differentiam eorum qui ſunt in locis imparibus & eorum qui in paribus per detractionem, & ſummam omnium per additionem. Vnde ſinguli non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data ſumma earum linearum quæ ſunt in locis imparibus A B. Et A C poſſit quadrata ſingularum. Centro B, interuallo B A, fiat ſemicirculus cuius diameter A D, & coniunctis A B & A C ad angulos rectos, ducatur C E parallela A B & producatur donec occurrat peripheriæ in puncto E, ex quo demittatur E F perpendicularis ad A B.



Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis partes; ſiquidem ex quadrato E B, hoc eſt A B, tollitur quadratum E F, hoc eſt A C, & reſtat quadratum F B, cuius latus F B detractum & additum A B, exhibet A F & F D.

Dico autem primò A F fore differentiam earum quæ ſunt in locis imparibus, & earum quæ in paribus. Sit enim, ſi fieri poteſt, illa differentia maior vel minor A F & æqualis A G, ergo G D erit ſumma omnium, & proinde rectangulum A G D æquabitur quadratis ſingularum, hoc eſt quadrato A C, hoc eſt quadrato E F, hoc eſt rectangulo A F D. Quod eſt abſurdum, & contra quintam ſecundi. Ergo illa differentia de qua agitur, non poteſt eſſe maior nec minor A F. Ergo erit illi æ-

Corol. prop 7. huius. 8. ſexti. 4. ſexti. 17. ſexti.

qualis. Quod erat demonſtrandum.

Dico deinde F D fore ſummam omnium. Sequitur ex præcedente demonſtratione.

PROPOSITIO XI.

Hoc idem problema alio modo perficere.

SIt datus numerus 8 pro ſumma eorum qui ſunt in locis imparibus. Et 44 pro aggregato quadratorum à ſingulis. Ponatur 1 R pro ſumma ſecundi & quarti. Ergo 8 † 1 R eſt ſumma omnium & 8 - 1 R eſt differentia eorum qui ſunt in locis imparibus, & eorum qui in paribus. Et proinde ſi ducas 8 † 1 R in 8 - 1 R, fiet aggregatum quadratorum à ſingulis. Fit autem 64 - 1 Q. Ergo 64 - 1 Q æquantur 44. Vnde 1 Q eſt æquale 20. & fit 1 R, ſiue ſumma ſecundi & quarti ℞ 20. Igitur per Propoſ. 1. & 2. huius, ſinguli erunt. 3 - ℞ 5 | ℞ 5 - 1 | 2 | ℞ 5 † 1 | 3 † ℞ 5. *Corol. Propoſ. 7. huius.*

Hinc Canon.

SVmmam quadratorum à ſingulis tolle de quadrato ſummæ eorum qui ſunt in locis imparibus. Et habebis quadratum ſummæ ſecundi & quarti. Vnde nec illa ſumma, nec ſinguli latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

DAtis iiſdem quæ data ſunt in figura Propoſ. præced. fiant omnia, ſicut illic imperatur fieri.

Manifeſtum eſt obſeruari integrum Canonem, & fieri F B.

Dico autem lineam F B eſſe ſummam ſecundæ & quartæ: nam vt illic probatum fuit, A F eſt differentia earum quæ ſunt in locis imparibus & earum quæ in pari- *Propoſ. 10. huius.*

bus, ergo cum A B ſit ſumma earum quæ ſunt in locis imparibus, erit F B ſumma ſecundæ & quartæ. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

SI fuerint quinque quantitates continue proportionales, imò quotcumque numero impari, quadratum ſummæ earum quę ſunt in locis imparibus æquatur quadratis ſingularum, plus quadrato ſummæ earum, quæ ſunt in paribus locis.

PROPOSITIO XII.

Data ſumma earum quantitatum quæ ſunt in locis paribus, & aggregato quadratorum à ſingulis, inuenire quinque continue proportionales.

ESto datus numerus 30 pro ſumma ſecundi & quarti. Et 7381 pro aggregato quadratorum à ſingulis. Ponatur 1 R pro differentia eorum qui ſunt in locis paribus, & eorum qui in imparibus. Ergo 60 + 1 R erit ſumma omnium. Igitur, ſi ducas 60 + 1 R in 1 R fiet 60 R + 1 Q pro aggregato quadratorum à ſingulis. Et proinde erit æquatio inter 60 R + 1 Q & 7381. Ergo 1 Q eſt æquale 7381 - 60 R. Et fit R, ſiue differentia eorum qui ſunt in locis paribus, & eorum qui in imparibus. 61. Singulique erunt 1. 3. 9. 27. 81.

Corollar. Propoſ. 7. huius.

Aliter, ponatur 1 R pro ſumma omnium; ergo ſi 1 R - 60 ducatur in 1 R, fiet productus 1 Q - 60 R æqualis aggregato quadratorum à ſingulis 7381. Igitur 1 Q æquatur 7381 + 60 R. Et fit 1 R, ſiue ſumma omnium 121. Et ſinguli 1. 3. 9. 27. 81.

Corollar. Prop. 7. huius.

Aliter, dato numero 4 20 pro ſumma ſecundi, & quarti.

quarti. Et 44 pro aggregato quadratorum à ſingulis. Ponatur 1 R pro ſumma eorum qui ſunt in locis imparibus. Ergo ℞ 20 † 1 R erit ſumma omnium, & 1 R - ℞ 20 differentia eorum qui ſunt in locis imparibus, & eorum qui in paribus. Proindeque ducendo ℞ 20 † 1 R in 1 R - ℞ 20, fiet productus 1 Q - 20 æqualis aggregato quadratorum à ſingulis 44. Igitur 1 Q eſt 64. & fit 1 R, ſiue ſumma eorum qui ſunt in locis imparibus 8. Singulique erunt 3 - ℞ 5 | ℞ 5 - 1 | 2 | ℞ 5 † 1 | 3 † ℞ 5. *Corollar. 7. huius.*

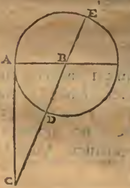
Hinc Canon.

QVadratum ſummæ ſecundi & quarti adde quadratis ſingulorum, & fiet numerus cuius radix quadrata multata & aucta aggregato ſecundi & quarti exhibet differentiam eorum qui ſunt in locis paribus, & eorum qui in imparibus per detractionem, & ſummam omnium per additionem.

Vel

QVadratum ſummæ ſecundi & quarti adde cum aggregato quadratorum à ſingulis, & habebis quadratum ſummæ eorum qui ſunt in locis imparibus.

Hinc Effectio Geometrica.



SIt data linea A B pro ſumma ſecundæ & quartę. Linea vero A C poſſit quadrata ſingularum. Coniungantur illæ ad angulos rectos, & centro B interuallo B A, facto circulo, connexa C B ſecet peripheriam in punctis D E.

Manifeſtum eſt obſeruari integrum Canonem.

Dico autem B C eſſe ſummam earum quæ ſunt in locis imparibus, & E C ſummam om-

nium, & DC differentiam earum quæ ſunt in locis imparibus & earum quæ in paribus. Quadratum enim AB iunctum cum quadratis ſingularum æqualibus quadrato AC, facit quadratum ſummæ earum quæ ſunt in locis
47. primi. imparibus vt dictum eſt in Corol. præced. Eadem vero quadrata AB, AC, æquantur quadrato BC. Ergo quadratum BC æquatur quadrato ſummæ earum quæ ſunt in locis imparibus. Reliqua clara ſunt.

PROPOSITIO XIII.

Data ſumma earum quantitatum quæ ſunt in locis imparibus, & aggregato quadratorum ſecundæ & quartæ, inuenire quinque proportionales.

ESto datus numerus 21 pro ſumma eorum qui ſunt in locis imparibus, & 68 pro aggregato quadratorum ſecundi & quarti. Ponatur medius 1 R. Ergo ſumma extremorum erit 21 - 1 R, quæ multiplicata per 1 R exhibebit productum 21 R - 1 Q æquale dato quadratorum aggregato 68. Igitur 1 Q æquabitur 21 R - 68. Et fit 1 R, ſiue medius 4. Et proinde multis viis cognoſcentur ſinguli, eruntque 1. 2. 4. 8. 16. Iiſdem inuariatis poteſt poni 1 R pro ſumma extremorum.

Hinc Canon.

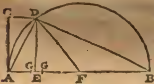
CApe dimidium ſummæ eorum qui ſunt in locis imparibus: ab huius dimidii quadrato tolle quadrata eorum qui ſunt in paribus locis: huius enim reſidui radix quadrata ſupradicto detracta & addita dimidio exhibebit medium, & ſummam extremarum. Vnde ſinguli non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

ESto linea A B ſumma eorum quæ ſunt in locis imparibus, & A C potens quadrata earum quæ in paribus. Coniungantur illæ ad angulos rectos, & facto ſuper A B ſemicirculo cuius centrum F, ducatur C D parallela A B, & occurrat peripheriæ in puncto D, ex quo demittatur D E perpendiculariter ad A B.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes, ſiquidem ducta E F, quadratum D E, hoc eſt A C, tollitur ex quadrato D F, & remanet quadratum E F, cuius latus E F detractum & additum dimidio ipſius A B, exhibet A E & E B. *47. primi.*

Dico autem A E eſſe mediam & E B ſummam extremarum. Sit enim, ſi fieri poteſt, media maior vel minor A E, & æqualis A G. Igitur G B erit ſumma extremarum, quia A B ponitur eſſe ſumma earum quæ ſunt in locis imparibus. Ergo



rectangulum A G B æquabitur quadratis ſecundę & quartæ: media enim cum quinta facit rectangulum æquale quadrato quartę, ſicut media cum prima facit rectangulum æquale quadrato ſecundæ. Igitur rectangulum A G B ęquatur quadrato A C, hoc eſt D E, hoc eſt rectangulo A E B. Quod eſt abſurdum & contra quintam ſecundi. Ergo media non poteſt eſſe maior vel minor A E. Igitur erit illi æqualis. Quod erat demonſtrandum. *11. ſecundi. 17. ſexti. 8. ſexti. 4. ſexti. 17. ſexti.*

Corollarium.

SI fuerint quinque quantitates continuè proportionales, quadratum ſummæ earum quæ ſunt in locis imparibus, aggregatum quadratorum à tribus intermediis, &

quadratum mediæ, erunt in continua proportione: nam lineæ A B, A D, A E, ſunt continuè proportionales.
10. ſexti. Ergo & earum quadrata. Item, in eadem ſerie, quadratum ſummæ earum quæ ſunt in locis imparibus, quadrata ſingularum plus mediæ quadrato, & quadratum ſummæ extremarum erunt in continua proportione: nam lineæ A B, D B, B E, ſunt continuè proportionales, ergo & earum quadrata. Item: in eadem ſerie, quadratum ſummæ extremarum, quadrata ſecundæ & tertiæ, & quadratum mediæ ſunt in continua proportione: nam lineæ B E, E D, E A, ſunt continuè proportionales, ergo & earum quadrata. Item: in eadem ſerie, eſt vt ſumma extremarum ad mediam; ita quadrata ſecundæ & quartæ ad quadratum mediæ. Item: in eadem ſerie ſolidum ſub quadratis ſecundæ & quartæ in mediam, æquatur ſolido ſub quadrato mediæ in ſummam extremarum. Quę omnia adnotaſſe operę pretium erit.

Appendix.

ORdo poſtularet, vt hic ſolueremus iſtud problema. data ſumma earum quantitatum quæ ſunt in locis paribus, & aggregato quadratorum ab iis quæ ſunt in imparibus, inuenire ſingulas quinque proportionales. ſed commodius ſoluetur infrà poſt Propoſ.

PROPOSITIO XIV.

Data ſumma extremarum de quinque quantitatibus continuè proportionalibus, & aggregato quadratorum à tribus intermediis, inuenire ſingulas.

ESto datus numerus 17 pro ſumma extremorum. Et 84 pro aggregato quadratorum à reliquis. Ponatur

1 R pro medio. Ergo eius quadratum 1 Q iunctum cum producto ex ſumma extremorum in medium nempe 17 R ęquabitur quadratis trium intermediorum. Et proinde erit ęquatio inter 1 Q + 17 R & 84. Igitur 1 Q eſt æquale 84 - 17 R. Et fit 1 R, ſiue medius 4. Singulique 1. 2. 4. 8. 16. *Lem. 24.*

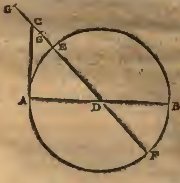
Hinc Canon.

CApe dimidium ſummæ extremorum, & eius dimidii quadrato adde aggregatum quadratorum à tribus intermediis: huius enim ſummæ radix quadrata ſupradicto multata dimidio, exhibebit medium. Vnde ſinguli non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

ESto data linea A B pro ſumma extremarum, & A C poſſit quadrata trium intermediarum. Coniungantur illæ ad angulos rectos, & facto circulo ſupra A B, ducatur C D per centrum, ſecans peripheriam in punctis E & F.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici



partes; ſiquidem quadrato dimidiæ A B additur quadratum A C, & fit quadratum C D; cuius latus C D multatum D E, relinquit C E.

Dico autem C E fore mediam ex quæſitis. Sit enim, ſi fieri poteſt, media maior vel minor C E & æqualis E G. Ergo rectangulum F G E, quod æquatur quadrato mediæ E G & rectangulo ſub media E G in ſummam extremarum E F, erit æquale quadratis trium *1. ſecundi. 17 ſexti.*

intermediarum. Igitur rectangulum F G E ęquatur quadrato A C. Sed A C eſt perpendicularis ad extremi-
16 tertii. tatem diametri, ergo tangens. Et proinde quadratum
36 tertii. A C eſt ęquale rectangulo F C E. Igitur rectangulum F C E æquabitur rectangulo F G E pars toti, vel totum parti. Quod eſt abſurdum. Ergo media nec poteſt eſſe maior nec minor C E. Igitur erit illi ęqualis. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XV.

Data ſumma extremarum, & aggregato quadratorum à ſingulis, inuenire quinque quantitates continuè proportionales.

ESto datus numerus 82 pro ſumma extremorum, & 7381 pro aggregato quadratorum à ſingulis. Ponatur autem 1 R pro medio. Ergo 82 R erunt ſumma
Lem. 14. quadratorum ſecundi & quarti. Et quia quadratum ſummæ extremorum ęquatur quadratis extremorum plus duplo medii quadrato, ſi ex 6724 quod eſt quadratum ſummæ extremorum 82, tollatur 1 Q reſiduum 6724 - 1 Q erit æquale quadratis primi, tertii & quinti. Quare ſi addas 6724 - 1 Q cum 82 R, habebis aggregatum quadratorum à ſingulis. Ergo 6724 + 82 R - 1 Q ęquantur 7381. Et proinde 1 Q eſt ęquale 82 R - 657. Et fit 1 R, ſiue medius 9. Singulique ſunt 1. 3. 9. 27. 81.

Hinc Canon.

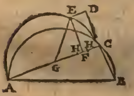
QVadratum ſummæ extremorum tolle de quadratis ſingulorum: reſiduum iterum tolle de quadrato dimidiæ extremorum ſummæ: huius enim poſterioris reliqui radix quadrata dimidię extremorum ſummę de-

tracta exhibebit medium de quinque quæſitis. Vnde ſinguli non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data linea A B potens quadrata ſingularum, & A C ſit ſumma extremarum. Supra ipſam A B fiat ſemicirculus in quo inſcribatur A C, & connexa C B. producatur, donec C D ſit æqualis C B. Tum facto alio ſemicirculo ſuper A C, ducatur D E parallela ipſi C A, donec occurrat peripheriæ in puncto E, ex quo demittatur E F perpendicularis ad A C.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis partes, ſiquidem quadratum A C tollitur ex quadrato A B, & remanet quadratum C B, hoc eſt C D, hoc eſt E F, quod tollitur ex quadrato E G (ſumpto videlicet puncto G pro centro ſecundi ſemicirculi) & relinquitur quadratum G F, cuius latus G F detractum ex dimidio A C, exhibet F C.



Dico autem lineam C F fore mediam ex quinque quæſitis. Sit enim, ſi fieri poteſt, illa media maior aut minor C F, & æqualis C H. Igitur rectangulum A C H ſub media in ſummam extremarum æquabitur quadratis ſecundæ & quartæ. Ergo rectangulum A H C erit æquale quadratis ſecundæ & quartæ multatis quadrato mediæ, hoc eſt rectangulo ſub extremis: cum ergo quadratum ſummæ extremarum A C, æquetur quadratis extremarum plus duplo rectanguli ſub extremis, ſequitur quadratum A C, plus rectangulo A H C æquari quadratis ſingularum æqualibus quadrato A B: ſed eidem quadrato A B æquantur quadrata A C, C B, ergo quadrata A C, C B, æqualia ſunt quadrato A C plus rectangulo A H C, & dempto communi quadrato A C, vtrinque, remanebit

1. ſecundi 17 ſexti. 3 ſecundo. *4. ſecundi.* *47. primi.*

8. ſexti. rectangulum A H C ęquale quadrato C B, hoc eſt C D,
4. ſexti hoc eſt E F, hoc eſt rectangulo A F C. Quod eſt abſur-
17. ſexti. dum, & contra quintam ſecundi. Ergo media non poteſt eſſe maior nec minor F C. Ergo erit illi æqualis. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XVI.

Hoc idem problema aliter ſoluere.

ESto datus numerus 6 pro ſumma extremorum, & 44 pro aggregato quadratorum à ſingulis. Ponatur 1 R pro ſumma eorum qui ſunt in locis imparibus. Ergo cum 6 ſit ſumma extremorum, erit 1 R - 6 medius. Igitur multiplicando medium 1 R - 6 per ſummam extre-
Lem. 24. morum 6, habebis 6 R - 36 pro quadratis ſecundi & quarti. Quadratum autem ſummę extremarum 36 multatum
Lem. 3. quadrato medii 1 Q † 36 - 12 R eſt ęquale quadratis
Lem. 6. primi, tertii & quinti. Igitur ſi ex 36 tollas 1 Q † 36 - 12 R & reſiduum 12 R - 1 Q addas cum quadratis ſecundi & quarti 6 R - 36, fiet ſumma 18 R - 1 Q - 36 æqualis aggregato quadratorum à ſingulis dato 44. Et proinde 1 Q ęquatur 18 R - 80. Et fit 1 R, ſiue ſumma eorum qui ſunt in locis imparibus 8. Ex quo ſi tollas ſummam extremorum 6, habebis 2 pro medio. Singulosque 3 - ℞ 5 | ℞ 5 - 1 | 2 | ℞ 5 † - 1 | 3 † ℞ 5.

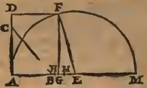
Hinc Canon.

QVadrato ſummæ extremorum adde quadrata ſingulorum, ſummam inde natam tolle ex quadrato, quod fit à tribus dimidiis ſummæ extremorum: huius enim reſidui radix quadrata tribus illis dimidiis detracta exhibebit ſummam eorum qui ſunt in locis imparibus. Vnde nec medius nec ſinguli latebunt.

Hinc

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data ſumma extremarum A B, & A C potens quadrata ſingularum. Conuertantur illæ ad angulos rectos & nectatur C B, producatur A C donec A D ſit æqualis C B. Tùm ſumatur B E æqualis dimidio A B, & centro E, interuallo E A, deſcribatur ſemicirculus, & ducatur D F parallela A E donec occurrat peripheriæ in puncto F, ex quo demittatur F G perpendiculariter ad A E.

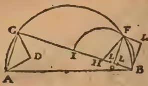


Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes, ſiquidem quadratum A C æquale quadratis ſingularum additur quadrato ſummæ extremarum A B, fitque quadratum C B, hoc eſt A D, hoc eſt G F quod quadratum G F tollitur ex quadrato F E, & relinquitur quadratum G E, cuius latus G E detractum ex A E exhibet A G. *47 primi.*

Dico autem A G fore ſummam earum quæ ſunt in locis imparibus & B G mediam. Sit enim, ſi fieri poteſt, media maior vel minor B G, & æqualis B H. Ergo cum A E ſit æqualis tribus dimidiis A B, erit tota A M tripla A B, & B M dupla A B, & H M æqualis duplæ A B multatæ media B H. Et proinde rectangulum A H M, quod eſt æquale rectangulis ex A B in H M & B H M æquabitur rectangulo ex A B in duplam A B multatam media B H & rectangulo ex media B H in duplam A B multatam B H. Primum autem iſtorum duorum rectangulorum eſt æquale duplo quadrato A B minus rectangulo ex media in ſummam extremarum; ſecundum vero æquatur duplo rectangulo ſub media in ſummam extremarum minus quadrato mediæ. *1. ſecundi.*

in I, fiat minor ſemicirculus ſupra B I, & erigatur B E æqualis A D vel C D perpendiculariter ad C B, ducaturque E F parallela B I occurrens minori peripheriæ in puncto F, ex quo demittatur F G perpendicularis ad diametrum B I.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici



partes, ſiquidem ex quadrato A B tollitur quadratum B C, & reſtat quadratum A C, cuius dimidium eſt quadratum C D vel A D, hoc eſt B E, hoc eſt F G. Ducta autem F H ad centrum minoris peripheriæ H, tollitur quadratum F G ex quadrato F H quadrantis B C, & reſtat quadratum H G, cuius latus H G detractum eidem quadranti H B, exhibet G B.

Dico autem lineam G B fore mediam ex quinque quæſitis. Sit enim, ſi fieri poteſt, media maior vel minor B G & æqualis B L. Ergo rectangulum C B L ſub

1. *ſecundi.* ſumma extremarum in mediam æquatur quadratis ſe-
17. *ſexti.* cundę & quartæ. Igitur cum B I ſit dimidium B C erit
1. *ſexti.* rectangulum I B L æquale dimidio quadratorum ſe-
3 *ſecundi.* cundæ & quartæ. Sed rectangulum I B L æquatur rectangulo I L B plus quadrato mediæ B L. Igitur rectangulum I L B ęquale erit dimidio quadratorum ſecundæ & quartæ multato medię quadrato.

Iam vero quoniam ex quadrato A B ęquali quadratis primę, ſecundę, quartę & quintę tollitur quadratum ſummę extremarum B C, quod æquatur quadratis extre-

47 *primi.* marum plus duplo mediæ quadrato, reſiduum quadra-
4 *ſecundi.* tum A C æquabitur quadratis ſecundæ & quartæ mul-
17. *ſexti.* tatis duplo medię quadrato. Ergo quadratum A D vel C D, quod eſt ſemiſſis quadrati A C, ęquale erit dimidio quadratorum ſecundæ & quartæ multato medię quadrato. Igitur rectangulum I L B æquatur quadrato A D vel C D, hoc eſt B E, hoc eſt F G, hoc eſt rectangulo I G B.

Quod eſt abſurdum , & contra quintam ſecundi. Et proinde media non poterit eſſe maior vel minor B G. Ergo erit illi æqualis. Quod erat demonſtrandum.

Appendix.

HInc ſolui poteſt illud problema : data differentia ſecundę & quartæ ex quinque quantitatibus continuè proportionalibus , & aggregato quadratorum à ſingulis dempto mediæ quadrato , inuenire ſingulas. Siquidem quadratum differentiæ datæ detractum aggregato dato relinquit quadratum ſummæ extremorum ; vt dictum eſt in libro ſecundo vniuerſaliter de quatuor continuè aut diſcretè proportionalibus. *Append Propoſ. l. 6.* Similiter ex quinque quantitatibus continuè proportionalibus data ſumma extremarum , & differentia ſecundæ & quartæ poſſunt inueniri ſingulæ; nam illis datis, dantur quoque quadrata ſingularum dempto mediæ quadrato.

PROPOSITIO XVIII.

Data ſumma extremarum , & aggregato quadratorum ſecundæ & quartæ , inuenire quinque quantitates continue proportionales.

ESto datus numerus 6 pro ſumma extremorum & 12 pro aggregato quadratorum. Ponatur 1 R pro medio. Et quia , in ſerie quinque proportionalium productus ſub medio in ſummam extremorum æquatur quadratis ſecundi & quarti, *Lem. 14.* multiplicando 6 in 1 R , fient 6 R ęquales aggregato quadratorum dato 12. Igitur 1 R , ſiue medius eſt 2. Dato autem medio 2 , & ſumma extremorum 6, diſtinguuntur extremi 3 † ℞ 5 & 3 - ℞ 5. Et proinde ſinguli ordinati erunt 3 † ℞ 5 | ℞ 5 † 1 | 2 | ℞ 5 - 1 | 3 - ℞ 5.

nium, & DC differentiam earum quæ ſunt in locis imparibus & earum quæ in paribus. Quadratum enim AB iunctum cum quadratis ſingularum æqualibus quadrato AC, facit quadratum ſummę earum quæ ſunt in locis imparibus vt dictum eſt in Corol. præced. Eadem vero quadrata AB, AC, æquantur quadrato BC. Ergo quadratum BC æquatur quadrato ſummæ earum quæ ſunt in locis imparibus. Reliqua clara ſunt.

47. primi.

PROPOSITIO XIII.

Data ſumma earum quantitatum quæ ſunt in locis imparibus, & aggregato quadratorum ſecundæ & quartæ, inuenire quinque proportionales.

ESto datus numerus 21 pro ſumma eorum qui ſunt in locis imparibus, & 68 pro aggregato quadratorum ſecundi & quarti. Ponatur medius 1 R. Ergo ſumma extremorum erit 21 - 1 R, quæ multiplicata per 1 R exhibebit productum 21 R - 1 Q ęquale dato quadratorum aggregato 68. Igitur 1 Q æquabitur 21 R - 68. Et fit 1 R, ſiue medius 4. Et proinde multis viis cognoſcentur ſinguli, eruntque 1. 2. 4. 8. 16. Iiſdem inuariatis poteſt poni 1 R pro ſumma extremorum.

Hinc Canon.

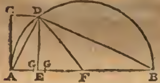
CApe dimidium ſummæ eorum qui ſunt in locis imparibus: ab huius dimidii quadrato tolle quadrata eorum qui ſunt in paribus locis: huius enim reſidui radix quadrata ſupradicto detracta & addita dimidio exhibebit medium, & ſummam extremarum. Vndę ſinguli non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

ESto linea A B ſumma eorum quæ ſunt in locis imparibus, & A C potens quadrata earum quæ in paribus. Coniungantur illæ ad angulos rectos, & facto ſuper A B ſemicirculo cuius centrum F, ducatur C D parallela A B, & occurrat peripheriæ in puncto D, ex quo demittatur D E perpendiculariter ad A B.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici
partes, ſiquidem ducta E F, quadratum D E, hoc eſt A C,
tollitur ex quadrato D F, & remanet quadratum E F, cu- 47 *primi.*
ius latus E F detractum & additum dimidio ipſius A B,
exhibet A E & E B.

Dico autem A E eſſe mediam & E B ſummam extremarum. Sit enim, ſi fieri poteſt, media maior vel minor A E, & æqualis A G. Igitur G B erit ſumma extremarum, quia A B ponitur eſſe ſumma earum quæ ſunt in locis imparibus. Ergo



rectangulum A G B æquabitur quadratis ſecundę &
quartæ: media enim cum quinta facit rectangulum æ- 11 *ſecundi.* 17. *ſexti.*
quale quadrato quartę, ſicut media cum prima facit re-
ctangulum æquale quadrato ſecundæ. Igitur rectan-
gulum A G B ęquatur quadrato A C, hoc eſt D E, hoc 8. *ſexti.*
eſt rectangulo A E B. Quod eſt abſurdum & contra 4. *ſexti.* 17. *ſexti.*
quintam ſecundi. Ergo media non poteſt eſſe maior vel
minor A E. Igitur erit illi æqualis. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

SI fuerint quinque quantitates continuè proportionales, quadratum ſummæ earum quæ ſunt in locis imparibus, aggregatum quadratorum à tribus intermediis, &

quadratum mediæ, erunt in continua proportione: nam lineæ A B, A D, A E, ſunt continuè proportionales. Ergo & earum quadrata. Item, in eadem ſerie, quadratum ſummæ earum quæ ſunt in locis imparibus, quadrata ſingularum plus mediæ quadrato, & quadratum ſummæ extremarum erunt in continua proportione: nam lineæ A B, D B, B E, ſunt continuè proportionales, ergo & earum quadrata. Item: in eadem ſerie, quadratum ſummæ extremarum, quadrata ſecundæ & tertiæ, & quadratum mediæ ſunt in continua proportione: nam lineæ B E, E D, E A, ſunt continuè proportionales, ergo & earum quadrata. Item: in eadem ſerie, eſt vt ſumma extremarum ad mediam; ita quadrata ſecundæ & quartæ ad quadratum mediæ. Item: in eadem ſerie ſolidum ſub quadratis ſecundæ & quartæ in mediam, æquatur ſolido ſub quadrato mediæ in ſummam extremarum. Quę omnia adnotaſſe operę pretium erit.

10. ſexti.

Appendix.

ORdo poſtularet, vt hic ſolueremus iſtud problema. data ſumma earum quantitatum quæ ſunt in locis paribus, & aggregato quadratorum ab iis quæ ſunt in imparibus, inuenire ſingulas quinque proportionales. ſed commodius ſoluetur infrà poſt Propoſ.

PROPOSITIO XIV.

Data ſumma extremarum de quinque quantitatibus continue proportionalibus, & aggregato quadratorum à tribus intermediis, inuenire ſingulas.

ESto datus numerus 17 pro ſumma extremorum. Et 84 pro aggregato quadratorum à reliquis. Ponatur

1 R pro medio. Ergo eius quadratum 1 Q iunctum cum producto ex ſumma extremorum in medium nempe 17 R æquabitur quadratis trium intermediorum. Et proinde erit æquatio inter 1 Q + 17 R & 84. Igitur 1 Q eſt æquale 84 - 17 R. Et fit 1 R, ſiue medius 4. Singulique 1. 2. 4. 8. 16. *Lem. 24.*

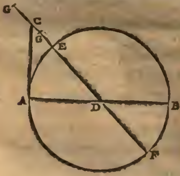
Hinc Canon.

CApe dimidium ſummæ extremorum, & eius dimidii quadrato adde aggregatum quadratorum à tribus intermediis: huius enim ſummæ radix quadrata ſupradicto multata dimidio, exhibebit medium. Vnde ſinguli non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

ESto data linea A B pro ſumma extremarum, & A C poſſit quadrata trium intermediarum. Coniungantur illæ ad angulos rectos, & facto circulo ſupra A B, ducatur C D per centrum, ſecans peripheriam in punctis E & F.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes; ſiquidem quadrato dimidiæ A B additur quadratum A C, & fit quadratum C D; cuius latus C D multatum D E, relinquit C E.



Dico autem C E fore mediam ex quæſitis. Sit enim, ſi fieri poteſt, media maior vel minor C E & æqualis E G. Ergo rectangulum F G E, quod æquatur quadrato mediæ E G & rectangulo ſub media E G in ſummam extremarum E F, erit æquale quadratis trium *1. ſecundi. 17 ſexti.*

intermediarum. Igitur rectangulum F G E ęquatur quadrato A C. Sed A C eſt perpendicularis ad extremi-
16 tertii. tatem diametri, ergo tangens. Et proinde quadratum
36 tertii. A C eſt ęquale rectangulo F C E. Igitur rectangulum F C E æquabitur rectangulo F G E pars toti, vel totum parti. Quod eſt abſurdum. Ergo media nec poteſt eſſe maior nec minor C E. Igitur erit illi ęqualis. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XV.

Data ſumma extremarum, & aggregato quadratorum à ſingulis, inuenire quinque quantitates continue proportionales.

ESto datus numerus 82 pro ſumma extremorum, & 7381 pro aggregato quadratorum à ſingulis. Ponatur autem 1 R pro medio. Ergo 82 R erunt ſumma
Lem. 14. quadratorum ſecundi & quarti. Et quia quadratum ſummæ extremorum ęquatur quadratis extremorum plus duplo medii quadrato, ſi ex 6724 quod eſt quadratum ſummæ extremorum 82, tollatur 1 Q reſiduum 6724 1 Q erit æquale quadratis primi, tertii & quinti. Quare ſi addas 6724 - 1 Q cum 82 R, habebis aggregatum quadratorum à ſingulis. Ergo 6724 † 82 R - 1 Q ęquantur 7381. Et proinde 1 Q eſt ęquale 82 R - 657. Et fit 1 R, ſiue medius 9. Singulique ſunt 1. 3. 9. 27. 81.

Hinc Canon.

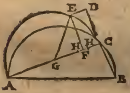
QVadratum ſummæ extremorum tolle de quadratis ſingulorum: reſiduum iterum tolle de quadrato dimidiæ extremorum ſummæ: huius enim poſterioris reliqui radix quadrata dimidię extremorum ſummę de-

tracta exhibebit medium de quinque quæſitis. Vnde ſinguli non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data linea A B potens quadrata ſingularum, & A C ſit ſumma extremarum. Supra ipſam A B fiat ſemicirculus in quo inſcribatur A C, & connexa C B. producatur, donec C D ſit æqualis C B. Tùm facto alio ſemicirculo ſuper A C, ducatur D E parallela ipſi C A, donec occurrat peripheriæ in puncto E, ex quo demittatur E F perpendicularis ad A C.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis partes, ſiquidem quadratum A C tollitur ex quadrato A B, & remanet quadratum C B, hoc eſt C D, hoc eſt E F, quod tollitur ex quadrato E G (ſumpto videlicet puncto G pro centro ſecundi ſemicirculi) & relinquitur quadratum G F, cuius latus G F detractum ex dimidio A C, exhibet F C.



Dico autem lineam C F fore mediam ex quinque quæſitis. Sit enim, ſi fieri poteſt, illa media maior aut minor C F, & æqualis C H. Igitur rectangulum A C H ſub media in ſummam extremarum æquabitur quadratis ſecundæ & quartæ. Ergo rectangulum A H C erit æquale quadratis ſecundæ & quartæ multatis quadrato mediæ, hoc eſt rectangulo ſub extremis: cum ergo quadratum ſummæ extremarum A C, æquetur quadratis extremarum plus duplo rectanguli ſub extremis, ſequitur quadratum A C, plus rectangulo A H C æquari quadratis ſingularum æqualibus quadrato A B: ſed eidem quadrato A B æquantur quadrata A C, C B, ergo quadrata A C, C B, æqualia ſunt quadrato A C plus rectangulo A H C, & dempto communi quadrato A C, vtrinque, remanebit

1. ſecundi
17 ſexti.
5 ſecundi.
4. ſecundi.
47. primi.

8. *ſexti.* rectangulum A H C æquale quadrato C B, hoc eſt C D,
4. *ſexti* hoc eſt E F, hoc eſt rectangulo A F C. Quod eſt abſur-
17. *ſexti.* dum, & contra quintam ſecundi. Ergo media non poteſt eſſe maior nec minor F C. Ergo erit illi æqualis. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XVI.

Hoc idem problema aliter ſoluere.

ESto datus numerus 6 pro ſumma extremorum, & 44 pro aggregato quadratorum à ſingulis. Ponatur 1 R pro ſumma eorum qui ſunt in locis imparibus. Ergo cùm 6 ſit ſumma extremorum, erit 1 R - 6 medius. Igitur multiplicando medium 1 R - 6 per ſummam extre-
Lem. 24. morum 6, habebis 6 R - 36 pro quadratis ſecundi & quarti. Quadratum autem ſummæ extremarum 36 multatum
Lem. 5. quadrato medii 1 Q † 36 - 12 R eſt æquale quadratis
Lem. 6. primi, tertii & quinti. Igitur ſi ex 36 tollas 1 Q † 36 - 12 R & reſiduum 12 R - 1 Q addas cum quadratis ſecundi & quarti 6 R - 36, fiet ſumma 18 R - 1 Q - 36 æqualis aggregato quadratorum à ſingulis dato 44. Et proinde 1 Q æquatur 18 R - 80. Et fit 1 R, ſiue ſumma eorum qui ſunt in locis imparibus 8. Ex quo ſi tollas ſummam extremorum 6, habebis 2 pro medio. Singuloſque 3 - ℞ 5 | ℞ 5 - 1 | 2 | ℞ 5 † - 1 | 3 † ℞ 5.

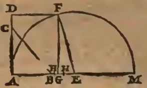
Hinc Canon.

QVadrato ſummæ extremorum adde quadrata ſingulorum, ſummam inde natam tolle ex quadrato, quod fit à tribus dimidiis ſummæ extremorum: huius enim reſidui radix quadrata tribus illis dimidiis detracta exhibebit ſummam eorum qui ſunt in locis imparibus. Vnde nec medius nec ſinguli latebunt.

Hinc

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data ſumma extremarum A B, & A C potens quadrata ſingularum. Conuertantur illæ ad angulos rectos & nectatur C B, producatur A C donec A D ſit æqualis C B. Tùm ſumatur B E æqualis dimidio A B, & centro E, interuallo E A, deſcribatur ſemicirculus, & ducatur D F parallela A E donec occurrat peripheriç in puncto F, ex quo demittatur F G perpendiculariter ad A E.



Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes, ſiquidem quadratum A C æquale quadratis ſingularum additur quadrato ſummæ extremarum A B, fitque quadratum C B, hoc eſt A D, hoc eſt G F quod quadratum G F tollitur ex quadrato F E, & relinquitur quadratum G E, cuius latus G E detractum ex A E exhibet A G. 47 *primi.*

Dico autem A G fore ſummam earum quæ ſunt in locis imparibus & B G mediam. Sit enim, ſi fieri poteſt, media maior vel minor B G, & æqualis B H. Ergo cum A E ſit æqualis tribus dimidiis A B, erit tota A M tripla A B, & B M dupla A B, & H M æqualis duplæ A B multatæ media B H. Et proinde rectangulum A H M, quod eſt æquale rectangulis ex A B in H M & B H M æquabitur rectangulo ex A B in duplam A B multatam media B H & rectangulo ex media B H in duplam A B multatam B H. Primum autem iſtorum duorum rectangulorum eſt æquale duplo quadrato A B minus rectangulo ex media in ſummam extremarum; ſecundum vero æquatur duplo rectangulo ſub media in ſummam extremarum minus quadrato mediæ. 1. *ſecundi.*

Igitur ſi illa duo rectangula in vnam ſummam colligas, habebis rectangulum totale A M æquari quadrato A B plus quadrato A B, minus quadrato mediæ, plus rectangulo ex media in ſummam extremarum: atqui quadratum A B eſt æquale quadratis extremarum plus duplo quadrato mediæ, rectangulum vero ſub media in ſummam extremarum æquatur quadratis ſecundæ & quartę; ergo quadratum A B, minus quadrato mediæ, plus rectangulo ſub media in ſummam extremarum eſt æquale quadratis ſingularum quinque proportionalium, hoc eſt quadrato A . Igitur rectangulum A H M æquabitur quadratis A B & A C, hoc eſt quadrato C B, hoc eſt A D, hoc eſt F G, hoc eſt rectangulo A G M. Quod eſt abſurdum & contra quintam ſecundi. Et proinde media non poteſt eſſe maior nec minor B G. Ergo erit illi æqualis. Igitur cum A B ſit ſumma extremarum, erit A G ſumma earum quæ ſunt in locis imparibus. Quod erat demonſtrandum.

4. ſecundi. 17. ſexti.

1. ſecundi 17. ſexti.

Corollarium.

SI fuerint quinque quantitates continuè proportionales, quadratum quod fit à ſumma earum quæ ſunt in locis imparibus, quadrata ſingularum plus quadrato ſummę extremarum, itemque quadratum quod fit à duplo ſummæ extremarum multato media, erunt in continua proportione. Nam tres lineæ A G, G F, G M, ſunt continuè proportionales. Ergo & earum quadrata.

20. ſexti.

PROPOSITIO XVII.

Data ſumma extremarum, & aggregato quadratorum à ſingulis dempta media inuenire quinque quantitates continue proportionales.

ESto datus numerus 17 pro ſumma extremorum. Et 325 pro aggregato quadratorum primi, ſecundi, quarti, & quinti. Ponatur medius 1 R. Ergo ſumma extremorum 17 ducta in 1 R facit 17 R pro quadratis ſecundi & quarti. *Lem. 1. 2.* Ergo etiam quadratum ſummę extremorum 289 multatum 2 Q exhibet quadrata extremorum. *Lem. 3.* Quare 17 R † 289 - 2 Q æquantur aggregato *Lem. 6.* quadratorum dato 325. Et proinde 1 Q eſt æquale $\frac{17\,R - .6}{\quad}$. Et fit 1 R, ſiue medius 4. Eruntque ſinguli 1. 2. 4. 8. 16.

Hinc Canon.

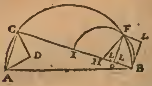
EX aggregato quadratorum tolle quadratum ſummæ extremorum reſiduique ſerua dimidium: tùm cape quadrantem ſummæ extremarum datæ, & ab eius quadrato tolle ſeruatum dimidium; iſtius enim relicti radix quadrata ſupradicto detracta quadranti exhibebit medium de quæſitis. Vnde ſinguli non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

ESto data linea A B potens quadrata primæ, ſecundæ, quartæ, & quintæ; & B C ſumma extremarum. Supra A B fiat ſemicirculus in quo inſcribatur B C, & nectatur C A ſupra quam vt baſim fiat triangulum iſoſceles & rectangulum A C D. Tum diuiſa B C bifariam

in I, fiat minor ſemicirculus ſupra B I, & erigatur B E æqualis A D vel C D perpendiculariter ad C B, ducaturque E F parallela B I occurrens minori peripheriæ in puncto F, ex quo demittatur F G perpendicularis ad diametrum B I.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes, ſiquidem ex quadrato A B tollitur quadratum B C, & reſtat quadratum A C, cuius dimidium eſt quadratum C D vel A D, hoc eſt B E, hoc eſt F G. Ducta autem F H ad centrum minoris peripheriæ H, tollitur quadratum F G ex quadrato F H quadrantis B C, & reſtat quadratum H G, cuius latus H G detractum eidem quadranti H B, exhibet G B.



Dico autem lineam G B fore mediam ex quinque quæſitis. Sit enim, ſi fieri poteſt, media maior vel minor B G & æqualis B L. Ergo rectangulum C B L ſub
1. ſecundi. ſumma extremarum in mediam æquatur quadratis ſe-
17. ſexti. cundę & quartæ. Igitur cum B I ſit dimidium B C erit
1. ſexti. rectangulum I B L æquale dimidio quadratorum ſe-
3 ſecundi. cundæ & quartæ. Sed rectangulum I B L æquatur rectangulo I L B plus quadrato mediæ B L. Igitur rectangulum I L B ęquale erit dimidio quadratorum ſecundæ & quartæ multato medię quadrato.

Iam vero quoniam ex quadrato A B ęquali quadratis primę, ſecundę, quartę & quintę tollitur quadratum ſummę extremarum B C, quod æquatur quadratis extre-
47 primi. marum plus duplo mediæ quadrato, reſiduum quadra-
4. ſecundi. tum A C æquabitur quadratis ſecundæ & quartæ mul-
17. ſexti. tatis duplo medię quadrato. Ergo quadratum A D vel C D, quod eſt ſemiſſis quadrati A C, ęquale erit dimidio quadratorum ſecundæ & quartæ multato medię quadrato. Igitur rectangulum I L B æquatur quadrato A D vel C D, hoc eſt B E, hoc eſt F G, hoc eſt rectangulo I G B.

Quod eſt abſurdum, & contra quintam ſecundi. Et proinde media non poterit eſſe maior vel minor B G. Ergo erit illi æqualis. Quod erat demonſtrandum.

Appendix.

HInc ſolui poteſt illud problema: data differentia ſecundę & quartæ ex quinque quantitatibus continuè proportionalibus, & aggregato quadratorum à ſingulis dempto mediæ quadrato, inuenire ſingulas. Siquidem quadratum differentiæ datæ detractum aggregato dato relinquit quadratum ſummæ extremorum; vt dictum eſt in libro ſecundo vniuerſaliter de quatuor continuè aut diſcretè proportionalibus. Similiter ex quinque quantitatibus continuè proportionalibus data ſumma extremarum, & differentia ſecundæ & quartæ poſſunt inueniri ſingulæ; nam illis datis, dantur quoque quadrata ſingularum dempto mediæ quadrato.

Append. Propoſ. l. 6.

PROPOSITIO XVIII.

Data ſumma extremarum, & aggregato quadratorum ſecundæ & quartæ, inuenire quinque quantitates continuè proportionales.

ESto datus numerus 6 pro ſumma extremorum & 12 pro aggregato quadratorum. Ponatur 1 R pro medio. Et quia, in ſerie quinque proportionalium productus ſub medio in ſummam extremorum æquatur quadratis ſecundi & quarti, multiplicando 6 in 1 R, fient 6 R ęquales aggregato quadratorum dato 12. Igitur 1 R, ſiue medius eſt 2. Dato autem medio 2, & ſumma extremorum 6, diſtinguuntur extremi 3 † ℞ 5 & 3 - ℞ 5. Et proinde ſinguli ordinati erunt 3 † ℞ 5 | ℞ 5 † 1 | 2 | ℞ 5 - 1 | 3 - ℞ 5.

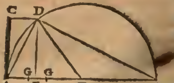
Lem. 14.

Hinc Canon.

AGgregatum quadratorum diuide per ſummam extremorum, & habebis medium ex quæſitis. Vnde ſinguli non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data linea A B pro ſumma extremorum, & A D potens quadrata ſecundæ & quartæ. Supra totam A B fiat ſemicirculus in quo inſcribatur A D, & demittatur D E perpendicularis ad diametrum.



Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis partes, ſiquidem triangula illa A D B, & A D E ſunt æquiangula, ergo latera illorum proportionalia erunt. Igitur rectangulum B A E æquabitur quadrato A D. Et ita quadratum A D diuiditur per lineam A B & fit A E.

8. ſexti. 4. ſexti. 17 ſexti.

Dico autem A E fore mediam. Nam ex Corollar. Propoſ. 13. huius, ſumma extremarum A B, linea A D potens quadrata ſecundæ & quartæ, itemque media, ſunt continuè proportionales, ſed A B, A D, & A E ſunt etiam oſtenſæ continuè proportionales. Igitur A E eſt media. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XIX.

Data ſumma quadratorum à ſingulis, & plano ſub ſumma omnium in ſummam ſecundæ & quartæ, inuenire quinque quantitates continue proportionales.

ESto datus numerus 44 pro ſumma quadratorum à ſingulis, & ℞ 208 † 20 pro plano ſub ſumma omnium in ſummam ſecundi & quarti. Ponatur 1 R pro ſumma omnium, ergo eius quadratum erit 1 Q. Et proinde ſi duples planum datum ℞ 280 † 20 & productum ℞ 5120 † 40 iungas cum quadratis ſingulorum 44, habebis ſummam ℞ 5120 † 84 æqualem 1 Q. Igitur ſi eruas radicem quadratam ex ℞ 5120 † 84 [?] Fiet 1 R, ſiue ſumma omnium 8 † ℞ 20. Iam autem data ſumma omnium 8 † ℞ 20, & aggregato quadratorum à ſingulis 44 multis modis diſtinguuntur ſinguli ex Propoſ. 7 huius & ſequentibus, eruntque 3 - ℞ 5 | ℞ 5 - 1, 2 | ℞ 5 † 1 | 3 † ℞ 5.

Corol. prop 7. huius.

7. huius.

Hinc Canon.

QVadrata ſingulorum iunge cum duplo plano ſub ſumma omnium in ſummam ſecundi & quarti; & habebis quadratum ſummæ omnium. Vnde ſinguli non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

ESto data linea A B potens rectangulum ſub ſumma omnium in ſummam ſecundæ & quartæ. Data quoque ſit linea A C potens quadrata ſingularum quinque proportionalium. Ponatur B D æqualis & perpen-

dicularis A B, & ad connexam D A erigatur A C perpendiculariter, iungaturque C D.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis partes, ſiquidem quadratum A D duplum eſt quadrati A B, & additum quadrato A C, facit quadratum C D.

47. primi



Dico autem lineam C D fore ſummam omnium. Demonſtratio clara eſt ex Corol. Propoſ. 7. huius, vbi oſtenſum eſt quadrata ſingularum plus duplo plano ſub ſumma omnium in ſummam earum quæ ſunt in locis paribus æquari quadrato ſummę omnium. Iam autem data ſumma omnium C D, & linea A C potente quadrata ſingularum, diſcernuntur ſingulæ ex Prop. 7. huius, & ſequentibus.

PROPOSITIO XX.

Data ſumma quadratorum à ſingulis, & plano ſub ſumma omnium in ſummam earum quæ ſunt in locis imparibus inuenire quinque quantitates continue proportionales.

Esto datus numerus 44 pro aggregato quadratorum à ſingulis, & 64 † ℞ 1280 pro plano ſub ſumma omnium in ſummam eorum qui ſunt in locis imparibus. Ponatur 1 R pro ſumma omnium. Ergo eius quadratum eſt 1 Q. Et proinde ſi duples planum datum 64 † ℞ 1280. Et ex producto 128 † ℞ 5120 tollas quadrata ſingulorum 44, reſiduum 84 † ℞ 5120 æquabitur quadrato ſummæ omnium 1 Q. Igitur ſi ex hoc binomio 84 † ℞ 5120 eruas radicem quadratam, habebis 8 † ℞ 20 pro valore vnius radicis. Data autem ſumma omnium 8 † ℞ 20 & 44 pro

Corollar. Propoſ. 8. huius.

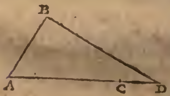
pro aggregato quadratorum à ſingulis inueniuntur ſinguli per Propoſ. 7. huius & ſequentes.

Hinc Canon.

QVadrata ſingulorum tolle ex duplo plano dato, & habebis quadratum ſummæ omnium. Vnde ſinguli non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data linea A B potens quadrata ſingularum, & linea A C potens rectangulum ſub ſumma omnium in ſummam earum quæ ſunt in locis imparibus. Producatur A C, donec A D poſſit duplum quadratum A C. Tùm ſupra A D fiat ſemicirculus in quo inſcribatur A B, & nectatur B D.



Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis partes, ſiquidem ex quadrato A D quod eſt æquale duplo quadrato A C, tollitur quadratum A B, & reſtat quadratum B D. 31. tertij. 47. primi.

Dico autem lineam B D fore ſummam omnium. Demonſtratio clara eſt ex Corollario Propoſ. huius, vbi dictum eſt quadrata ſingularum plus quadrato ſummæ omnium, æquari duplo plano ſub ſumma omnium in ſummam earum quæ ſunt in locis imparibus. Reliqua perficiuntur vt in Propoſ. præced.

PROPOSITIO XXI.

Data ſumma quadratorum à ſingulis, & plano ſub ſumma ſecundæ & quartæ in differentiam earum quæ ſunt in locis imparibus, & earum quæ in paribus, inuenire quinque quantitates continue proportionales.

ESto datus numerus 44 pro aggregato quadratorum & ℞ 1280 - 20 pro plano. Ponatur 1 R pro differentia earum quæ ſunt in locis imparibus, & earum quæ in paribus, ergo eius quadratum 1 Q iunctum duplo plani dati ℞ 1280 - 20 efficiet ſummam ℞ 5120 - 40 † 1 Q æqualem aggregato quadratorum à ſingulis 44. Et proinde 1 Q æquabitur ℞ 5120 - 84. Et fit 1 R, ſiue differentia quæſita, 8 - ℞ 20 per quam ſi diuidas planum datum ℞ 1280 - 20, fiet quotiens ℞ 20 pro ſumma ſecundi & quarti; cui ſi addas differentiam inuentam 8 - ℞ 20, fiet 8 pro ſumma eorum qui ſunt in locis imparibus. Igitur per propoſ. 1. & 2. huius, ſinguli erunt. 3 - ℞ 5 | ℞ 5 - 1 | 2 | ℞ 5 † 1 | 3 † ℞ 5.

Corollar. Prop 7. huius 3. ſecundi.

Hinc Canon.

EX quadratis ſingulorum tolle duplum plani dati, & habebis quadratum differentiæ eorum qui ſunt in locis imparibus & eorum qui in paribus: quare ſi per huius reſidui radicem quadratam diuidas planum datum, orietur in quotiente ſumma ſecundi & quarti. Vnde ſinguli non latebunt.

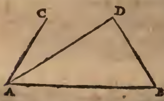
Hinc Effectio Geometrica.

SIt data linea A B potens quadrata ſingularum & A C potens rectangulum ſub ſumma ſecundæ & quartæ

in differentiam aſſignatam. Supra A B fiat ſemicirculus in quo inſcribatur A D potens duplum quadratum A C, & nectatur D B.

Manifeſtum eſt obſeruari integrum Canonem, ſiquidem & quadratum A D æquale duplo quadrato A C tollitur ex quadrato A B, & reſtat quadratum D B.

Dico autem lineam D B fore differentiam earum quæ ſunt in locis imparibus, & earum quæ in paribus. Demonſtratio clara eſt ex Corollario Propoſ. 7. huius, in



quo oſtenſum eſt quadrata ſingularum, hoc eſt quadratum A B æquari rectangulo ſub ſumma omnium in differentiam earum quæ ſunt in locis imparibus, & earum quæ in paribus. Illud autem rectangulum æquatur quadrato illius differentiæ & duplo quadrato A C. Igitur cum quadratum A D æquetur duplo quadrato A C, erit quadratum A B æquale quadrato A D plus quadrato differentiæ aſſignatæ, ſed quadratum A B æquatur quadratis A D, D B, igitur quadratum D B eſt quadratum differentiæ earum quæ ſunt in locis imparibus & earum quæ in paribus. Quod erat demonſtrandum.

3 ſecundi. 1. ſecundi. — *47. primi.*

Si ergo fiat vt D B ad A C; ita A C ad aliam lineam, erit illa ſumma ſecundæ & quartæ, vt per ſe patet. Quare ſingulæ non latebunt.

Appendix.

EX his poteſt ſolui iſtud problema. Dato aggregato quadratorum à ſingulis, & plano ſub ſumma earum quæ ſunt in locis imparibus in differentiam earum quæ ſunt in locis imparibus & earum quæ in paribus, inuenire ſingulas. Enimuerò, ſi iſtud planum tollatur ex

aggregato quadratorum à ſingulis, remanebit planum ſub ſumma ſecundæ & quartæ in differentiam earum quæ ſunt in locis paribus, & earum quæ ſunt in locis imparibus. Vnde per ea quæ hic ordinata ſunt, abſoluetur problema.

Corollar. Propoſ. 7. huius. 1. ſecundi.

PROPOSITIO XXII.

Data ſumma earum quæ ſunt in locis imparibus, & aggregato differentiarum quadratorum ab extremis, & quadratorum ſecundæ & quartæ, inuenire quinque quantitates continue proportionales.

SIt data ſumma eorum quæ ſunt in locis imparibus 21. Et aggregatum differentiarum 315. Ponatur autem pro medio 1 R. Et quia in ſerie quinque proportionalium, aggregatum illud differentiarum æquatur producto ſub ſumma eorum qui ſunt in locis imparibus in differentiam extremorum; diuidendo 315 per 21. Orietur differentia extremorum 15. qua ſublata de 21 reſtabit 6 duplum minoris plus medio. Ergo $\frac{6-1R}{2}$ erit minor quæſitorum cui ſi addas 15 fiet maior $\frac{36-1R}{2}$. Hunc autem maiorem alio modo inuenies diuidendo quadratum medii 1 R, quod eſt 1 Q per minorem $\frac{6-1R}{2}$. Sic enim prodibit quotiens $\frac{2Q}{6-1R}$ æqualis $\frac{36-1R}{2}$ ergo poſt debitam reductionem, 1 Q æquabitur 72 - 14 R, & fit 1 R, ſiue medius, 4. Singulique 1.2.4.8.16.

Lem. 1.

Hinc Canon.

DIuide aggregatum differentiarum per ſummam numerorum: quotientem iunctum ſummæ nume-

rorum multiplica per trientem ſummæ numerorum multatæ eodem quotiente : productum adde quadrato, quod fit ex duobus trientibus ſummæ numerorum : iſtius enim aggregati radix quadrata duobus trientibus ſummæ numerorum multata exhibebit medium. Vnde ſinguli non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data ſumma linearum quæ ſunt in locis imparibus A B, & B C poſſit differentias quadratorum ab extremis, & quadratorum ſecundæ & quartæ. Supra A B fiat ſemicirculus in quo inſcribatur B C, & demittatur C D perpendicularis ad A B. Tùm ſumpta B E æquali B D, fiat alter ſemicirculus ſupra A E, & capiatur A F triens ipſius A D, erectaque F G perpendiculariter vſque ad maiorem peripheriam nectatur A G. Deinde ſumpta H I æquali duobus trientibus A B, centro H, & interuallo H I, deſcribatur circulus integer, cuius diameter ſit I L ad quam perpendiculariter erigatur I M, æqualis A G. Et connexa M H producatur, ſecetque peripheriam circuli in punctis N O.

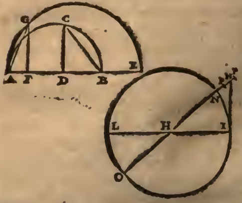
Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis partes; ſiquidem tres lineæ A B, B C, B D, ſunt continue proportionales. Igitur rectangulum A B D æquatur quadrato B C. Et proinde quadratum B C æquale differentiis quadratorum ab extremis, & quadratorum à mediis, diuiditur per lineam A B, & fit linea B D, hoc eſt B E. Quoniam vero A F eſt triens A D, rectangulum E A F, hoc eſt quadratum A G, hoc eſt I M comprehenditur ſub compoſita ex A B & D B in trientem A B multatæ D B : hoc autem quadratum I M additur quadrato I H, quæ eſt æqualis duobus trientibus A B, & fit quadratum H M, cuius latus H M multatum H N, hoc eſt H I, exhibet N M. 47. primi.

8. ſexti. 4 ſexti. 17. ſexti.

8. ſexti. 4 ſexti. 17. ſexti.

Dico autem N M fore mediam ex quæſitis. Primo

enim cum quadrata ſecundæ & quartæ æquentur rectangulo ex media in ſummam extremarum, ſequitur rectangulum ex media in differentiam extremarum æquari differentiæ quadratorum ſecundæ & quartæ: aliunde
1. ſecundi. iam probatum eſt olim rectangulum ſub ſumma extremarum in differentiam extremarum eſſe æquale differentiæ quadratorum ab extremis; ergo rectangulum ſub ſumma earum quæ ſunt in locis imparibus & differentia extremarum æquatur differentiis quadratorum ab extremis & quadratorum ſecundæ & quartæ. hoc eſt quadrato B C. Sed quadratum B C eſt æquale rectangulo A B D & eſt A B ſumma earum quæ ſunt in locis imparibus. Igitur B B, erit differentia extremarum.



Ergo cum B E ſit æqualis B D, erit tota A E æqualis mediæ plus dupla maiori extrema, & A D erit æqualis mediæ plus dupla minori extrema, & A F erit triens mediæ iunctæ cum dupla minori extrema.

Sit ergo nunc, ſi fieri poteſt, media maior vel minor N M & æqualis N P. Igitur cum tres lineæ exiſtentes in locis imparibus ſint continue proportionales, erit vt minor ad mediam; ſic media ad maiorem. Ergo vt mi-
12 quinti. nor ad mediam; ſic dupla media ad duplam maiorem. Ergo componendo antecedentia, & conſequentia vt minor plus dupla media ad mediam plus dupla maiore; ſic minor ad mediam. Et duplando antecedentia vt dupla minor plus quadrupla media ad mediam plus dupla maiore; ſic dupla minor ad mediam & componen-

do, vt dupla ſumma extremarum plus quintupla media ad mediam plus dupla maiore, ſic dupla minor plus media ad mediam. Ergo ſumendo trientes antecedentium vt triens duplę minoris iunctæ cum media, hoc eſt A F ad mediam N P; ſic triens duplæ ſummæ extremarum plus quintupla media ad mediam plus dupla maiore hoc eſt A E.

Sed dupla ſumma extremarum plus quintupla media æquatur duplæ A B plus tripla N P, duplæ autem A B plus tripla media N P triens eſt O P, quia H I ſumpta eſt æqualis duobus trientibus A B; ergo erit vt A F ad N P; ita O P ad A E. Ergo rectangulum ſub extremis E A F æquatur rectangulo ſub mediis O P N. Sed rectangulum E A F eſt æquale quadrato A G, hoc eſt I M, ergo rectangulum O P N æquatur quadrato I M. Sed linea I M eſt perpendicularis ad extremitatem diametri. Et proinde tangens. Igitur rectangulum O M N æquale eſt quadrato I M. Et ita rectangulum O M N æquabitur rectangulo O P N, pars toti, vel totum parti, quod eſt abſurdum. Ergo media non poteſt eſſe maior vel minor N M. Et proinde erit illis æqualis. Quod erat demonſtrandum.

16. ſexti. *16 tertij.* *16. tertii.*

Appendix.

HInc collige quomodo data ſumma trium quantitatum continuè proportionalium A B & differentia extremarum B D, poſſint inueniri ſingulæ. Inuenta enim media N M facile dignoſcentur extremæ per 1. vel 2. Propoſ. l. 1.

PROPOSITIO XXIII.

Data ſumma earum quantitatum quæ ſunt in locis imparibus, & ratione quam habet interuallum quadratorum ſecundæ & quartæ ad interuallum quadratorum ab extremis, inuenire quinque continue proportionales.

ESto data ſumma 63. Et ratio 4 ad 17. Ponatur autem medius ex quinque numeris quęſitis 1 R. Ergo ſumma extremorum erit 63 - 1 R. Et quia in ſerie quinque proportionalium, eſt vt interuallum quadratorum
Lem. 26. ſecundi & quarti ad interuallum quadratorum ab extremis; ſic medius ad ſummam extremorum: erit 1 R ad 63 - 1 R in ratione data 4 ad 17. Ergo productus ſub extremis 17 R, erit æqualis producto ſub mediis 252 - 4 R.
Lem. 6. Igitur 1 R ſiue medius erit 12. & ſinguli 3. 6. 12. 24. 48.

Hinc Canon.

PRoductum ſub priore duorum terminorum proportionis in ſummam eorum qui ſunt in locis imparibus, diuide per ſummam terminorum, & habebis medium ex quæſitis. Vnde ſinguli non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data linea A pro ſumma earum quæ ſunt in locis imparibus. Data quoque ſit ratio lineæ B ad C. Fiat autem vt B plus C ad B; ita A ad aliam lineam quæ ſit D.

Manifeſtum eſt obſeruari integrum Canonem: nam
16. ſexti. hoc modo rectangulum ſub extremis B plus C in D, æ-
quabitur

quabitur rectangulo ſub mediis B in A. Ergo rectangulum ex B in A, diuiditur per compoſitam ex B & C. Et ſit D pro quotiente Geometrico.

Dico verò lineam D fore mediam ex quæſitis. Nam cum in ſerie quinque proportionalium, quadratum quartæ ſit æquale rectangulo ſub media in quintam; & quadratum ſecundæ rectangulo ſub media in primam; 17. ſexti. tollendo minus rectangulum ex maiore, remanebit rectangulum ſub media in differentiam extremarum pro differentia quadratorum ſecundæ & quintæ; aliunde verò quoniam differentia quadratorum à duabus quibuſcumque quantitatibus ortorum æquatur rectangulo ſub ſumma illarum in earumdem differentiam, erit rectangulum ſub ſumma extremarum in differentiam extremarum æquale interuallo quadratorum ab extremis. Sed vt rectangulum ſub ſumma extremarum in differentiam earum, ad rectangulum ſub media in differentiam 1. ſexti. extremarum; ita ſumma extremarum ad mediam, propter eamdem altitudinem. Igitur componendo, vt prius rectangulum plus poſteriori ad poſterius; ita ſumma earum quæ ſunt in locis imparibus A ad mediam. Sed vt C ad B; ita differentia quadratorum ab extremis ad differentiam quadratorum ſecundę & quartæ. Igitur vt C plus B ad B; ita A ad D. Ergo D eſt media ex quinque proportionalibus quæſitis. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

SI fuerint quinque quantitates continuè proportionales, erit vt ſumma extremarum ad mediam; ſic differentia quadratorum ab extremis ad differentiam quadratorum ſecundæ & quartæ.

PROPOSITIO XXIV.

Data ſumma extremarum, & ratione quadratorum à tribus prioribus ad quadrata trium poſteriorum, inuenire quinque quantitates continuè proportionales.

ESto data ſumma 51. Et ratio 1 ad 16. Ponatur primus ex quinque 1 R, ergo quintus erit 51 - 1 R. Et quoniam in ſerie quinque proportionalium, eſt vt primus ad quintum; ſic quadrata trium priorum ad quadrata trium poſteriorum; erit 1 R ad 51 - 1 R in ratione data 1 ad 16. Igitur productus ſub extremis 16 R æqualis erit producto ſub mediis 51 - 1 R. Et ita 1 R, ſiue primus eſt 3. Singulique ordinati ſunt. 3. 6. 12. 24. 48.

Rem. 6.

Hinc Canon.

PRoductum ſub priori termino rationis datæ in ſummam extremorum, diuide per ſummam terminorum rationis, & habebis primum ex quinque quæſitis. Vnde ſinguli non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data linea A pro ſumma extremarum. Et ratio B ad C. Fiat autem vt B plus C ad B, ita A ad aliam lineam quæ ſit D.

Manifeſtum eſt obſeruari integrum Canonem, ſiquidem, hoc modo rectangulum ſub extremis B plus C in D æquabitur rectangulo ſub mediis B in A. Ergo rectangulum ſub B in A diuiditur per B plus C, & fit D pro quotiente Geometrico.

16. ſexti.

Dico autem lineam D fore primam ex quæſitis. Nam cum in ſerie quinque proportionalium, prima, tertia & quinta ſint continuè proportionales, prima ad quintam habebit rationem duplicatam eius quam habet prima ad tertiam; ergo quadratum primæ ad quadratum tertiæ, erit vt prima ad quintam. Sed vt quadratum primæ ad quadratum tertiæ; ita eſt quadratum ſecundæ ad quadratum quartæ; & quadratum tertiæ ad quadratum quintæ; ergo vt quadratum ſecundæ ad quadratum quartæ. *Defin.10. quinti.* *20.ſexti.* *22.ſexti.*

Similiter vt quadratum tertiæ ad quadratum quintæ; ita prima ad quintam. Ergo componendo antecedentia ex vna parte, & conſequentia ex alia, erit vt prima ad quintam; ita quadrata primæ, ſecundæ & tertiæ, ad quadrata tertiæ, quartę & quintę. Et componendo, vt quadrata omnium plus quadrato mediæ ad quadrata trium priorum, hoc eſt vt B plus C ad B, ita A ad aliam lineam D, ergo D eſt prima ex quæſitis. Quod erat demonſtrandum. *12.quinti.*

Corollarium.

SI fuerint quinque quantitates continuè proportionales, erit vt prima ad quintam; ſic quadrata trium priorum ad quadrata trium poſteriorum.

PROPOSITIO XXV.

Data ratione quadratorum ab extremis ad quadrata earum quæ ſunt in locis paribus, inuenire quinque quantitates continue proportionales.

ESto data ratio 7 ad 3. Ponatur 1 R pro ſumma extremorum. Et ſumatur 3 poſterior terminus rationis datæ pro medio ex quæſitis. Ergo quoniam quadra-

Lem. 3. tum ſummæ extremorum æquale eſt quadratis extre-
Lem. 6. morum plus duplo medii quadrato erit 1 Q - 18 ſumma quadratorum ab extremis: deinde ſi multiplicaueris ſummam extremorum 1 R per medium 3. fiet productus
Lem. 14. 3 R æqualis aggregato quadratorum ſecundi & quarti. Et proinde 1 Q - 18 ad 3 R eſt in data ratione 7 ad 3. Igitur productus ſub extremis 3 Q - 54 æqualis erit pro-
Lem. 6. ducto ſub mediis 21 R. Ergo poſt debitam reductionem 1 Q æquabitur 18 + 7 R. Et fit 1 R. ſiue ſumma extremorum 9. Data autem ſumma extremorum 9. & medio 3. diſtinguuntur ſinguli quinque, vt ſupra ſæpius dictum eſt. Vnde ſinguli ordinati erunt $\frac{9}{2}$ ℞ $\frac{45}{4}$ | ℞ $\frac{45}{4} - \frac{3}{2}$ | 3 | ℞ $\frac{45}{4} + \frac{3}{2}$ | $\frac{9}{2}$ + ℞ $\frac{45}{4}$.

Hinc Canon.

Cape dimidium prioris termini proportionis datæ, & eius quadrato adde duplum quadratum poſterioris termini: huius enim ſummæ radix quadrata ſupradicto addita dimidio, exhibebit ſummam extremorum, poſteriori termino rationis exiſtente medio de quinque quæſitis. Vnde ſinguli non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

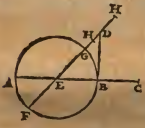
Sit data ratio A B ad B C. Erigatur perpendiculariter ad A B, linea B D potens duplum quadratum B C. Tùm ſupra A B fiat circulus, cuius centrum E, nectaturque & producatur linea D E ſecans peripheriam in F & G.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes, ſiquidem quadrato E B additur quadratum B D, & fit quadratum E D, cuius latus E D additum dimidio ipſius A B, exhibet D F.

Dico autem lineam D F fore ſummam extremarum,

poſteriori termino rationis B C exiſtente media de quinque quæſitis. Sit enim, ſi fieri poteſt, ſumma extremarum maior vel minor D F & æqualis F H. Quoniam igitur A B eſt ęqualis F G; erit vt A B ad B C; ita propter eamdem altitudinem rectangulum H F G ad rectangulum ſub H F in B C. Sed rectangulum ſub ſumma extremarum H F in mediam B C, ęquatur quadratis ſecundę & quartæ. Ergo ſumma extremarum exiſtente H F, erit rectangulum H F G æquale quadratis extremarum. Sed quadratum F H æquatur rectangulis H F G & F H G. Ergo rectangulum F H G eſt æquale duplo quadrati mediæ B C. Cum ergo quadratum B D ſit duplum quadrati B C, erit rectangulum F H G ęquale quadrato B D. Sed linea B D eſt perpendicularis ad extremitatem diametri. Ergo tangit. Igitur quadratum B D æquatur rectangulo F D G. Et proinde rectangulum F D G eſt ęquale rectangulo F H G. Pars toti, vel totum parti, quod eſt abſurdum. Quare ſumma extremarum nec poterit eſſe maior nec minor F D. Ergo erit illi æqualis. Quod erat demonſtrandum.

1. ſexti.
1. ſecundi.
18 ſexti.
2. ſecundi.
16 tertii.
36 tertii.



Appendix.

POtuit poni 1 R pro ſumma extremarum & ſumi prior terminus rationis pro medio. Vnde pene ſimilis Canon & eadem conſtructio elicitur.

PROPOSITIO XXVI.

Hoc idem problema alio modo ſoluere.

Lem. 3 Lem. 6 Lem. 6.

DAta eadem ratione 7 ad 3. Ponatur 1 R pro medio. Et ſumatur poſterior terminus rationis 3 pro ſumma extremorum. Ergo 9 - 2 Q æquabitur quadratis extremorum. Et 3 R quadratis ſecundi & quarti. Et proinde 9 - 2 Q ad 3 R erunt in ratione data 7 ad 3. Igitur productus ſub extremis 27 - 6 Q æquabitur producto ſub mediis 21 R. Ergo poſt debitam reductionem 1 Q erit æquale $\frac{9 - 7 R}{2}$. Et fit 1 R, ſiue medius 1. Quare ſinguli ſunt $\frac{1}{2}$ - ℞ $\frac{5}{4}$ | ℞ $\frac{5}{4}$ - $\frac{1}{2}$ | 1 | ℞ $\frac{5}{4}$ + $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ + ℞ $\frac{5}{4}$.

Hinc Canon.

CApe quadrantem prioris termini rationis datæ; eius quadrantis quadrato adde dimidium poſterioris termini quadratum: huius enim ſummæ radix quadrata ſupradicto multata quadrante exhibebit medium, poſteriore termino rationis exiſtente ſumma extremorum. Vnde ſinguli non latebunt.

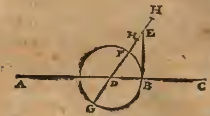
Hinc Effectio Geometrica.

SIt data ratio A B ad B C. Capiatur B D quadrans ipſius A B; & centro D, interuallo D B fiat circulus. Tum erigatur perpendiculariter linea B E potens dimidium quadratum B C, & connexa E D ſecet peripheriam in punctis F. G.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes, ſiquidem quadratum D B additur quadrato B E, quod eſt æquale dimidio quadrato B C, & fit quadratum E D, cuius latus E D multatum F D, quæ

eſt quadrans A B, exhibet F E.

Dico autem lineam F E fore mediam ex quæſitis, ſumma extremarum exiſtente B C. Sit enim, ſi fieri poteſt,



media maior vel minor F E, & æqualis F H. Ergo rectangulum ſub ſumma extremarum B C in mediam F H, *1. ſecundi*
æquale erit quadra- *17. ſexti.*
tis ſecundæ & quartæ;
eſt autem vt B C ad B A; ita quadrata ſecundæ & quartæ
ad quadrata extremarum, & eſt vt rectangulum ex B C
in F H, ad rectangulum ex A B in F H ita propter eam- *1. ſexti.*
dem altitudinem linea B C ad lineam A B. Igitur eſt vt
rectangulum ex B C in F H ad quadrata extremarum;
ita rectangulnm ex B C in F H ad rectangulum ex
A B in F H. Et proinde rectangulum ex A B in F H *9. quinti.*
æquale eſt quadratis extremarum. Quoniam verò D B
eſt quadrans A B, erit F G dimidia A B & ita duplum
rectangulum H F G æquabitur rectangulo ex A B in
F H. Ergo duplum rectangulum H F G eſt æquale
quadratis extremarum. Igitur ſi duplo illi rectangulo
addideris duplum quadratum mediç F H, fiet duplum *3 ſecundi.* *4. ſecundi.*
rectangulum G H F çquale quadrato ſummæ extrema- *17. ſexti.*
rum B C. Et propterea dimidium quadratum B C, nempe quadratum B E æquatur rectangulo G H F. Sed linea B E eſt perpendicularis ad extremitatem diametri.
Ergo tangit. Igitur rectangulum G E F eſt æquale qua- *16. tertii.*
drato B E. Ergo rectangulum G E F æquatur rectangu- *36. tertii.*
lo G H F pars toti, vel totum parti. Quod eſt abſurdum.
Non igitur media poteſt eſſe maior vel minor F E ſumma extremarum exiſtente B C. Ergo erit illi æqualis.
Quod erat demonſtrandum.

Appendix.

POtuit poni 1 R pro medio; & ſumi prior terminus proportionis pro ſumma extremorum. Vnde ſimilis pene Canon & Effectio orirentur. Similiter potuit poni 1 R pro medio, & ſumi alteruter rationis terminus pro ſumma eorum, quæ ſunt in locis imparibus. Vel poni potuit 1 R pro ſumma eorum qui ſunt in locis imparibus, & ſumi alter rationis terminus pro medio. Ex quibus & aliis ſimilibus, elicerentur noui Canones & nouæ Effectiones Geometricæ.

Deinde ex his patet quomodo data ratione quadratorum ab extremis ad quadrata ſecundæ & quartæ, & ſumma quacumque vel differentia illarum, poſſint inueniri ſingulę: nam ſi nulla habita ratione ſummæ vel differentiæ datæ, reperiantur quinque quantitates continuè proportionales in data ratione quadratorum ad quadrata, vt factum eſt, fiatque vt ſumma vel differentia homologa ex inuentis ad ſingulas inuentas, ita ſumma vel differentia data ad alias, habebitur propoſitum.

Patet præterea quomodo inueniri poſſint quinque quantitates proportionales data ratione quadratorum à ſingulis dempto mediæ quadrato ad quadrata extremarum, vel ad quadrata ſecundæ & quartæ, nam diuidendo erit quoque data ratio quadratorum ab extremis ad quadrata ſecundæ & quartæ. Vel contra. Quod fuit hic ordinatum.

PROPO-

PROPOSITIO XXVII.

Data proportione quadratorum à tribus intermediis ad quadratum ſummæ extremarum, inuenire quinque quantitates proportionales.

ESto data ratio 4 ad 9. Ponatur 1 R pro ſumma extremorum, & ſumpto 4 priore termino rationis pro medio, multiplica 1 R per 4 habebiſque 4 R pro ſumma quadratorum ſecundi & quarti. Cui ſi addas 16 quadratum medii, fiet aggregatum quadratorum à tribus intermediis 16 † 4 R. Quadratum autem ſummæ extremorum eſt 1 Q. Igitur 16 † 4 R ad 1 Q, eſt in ratione data 4 ad 9. Ergo productus ſub extremis 144 † 36 R æqualis erit producto ſub mediis 4 Q, & ita 1 Q æquatur 36 † 9 R. Et fit 1 R, ſiue ſumma extremorum 12. data autem ſumma extremorum 12, & medio 4, facile ſinguli diſtinguuntur 6 - ℞ 20 | ℞ 20 - 2 | 4 | ℞ 20 † 2 | 6 † ℞ 20. *Lem. 14.* *Lem. 6.*

Hinc Canon.

CApe dimidium poſterioris termini proportionis datæ, & eius quadratum adde producto ſub duobus terminis eiuſdem proportionis: illius enim aggregati radix quadrata ſupradicto addita dimidio exhibebit ſummam extremorum, priore termino rationis exiſtente medio quæſitorum. Vnde ſinguli non latebunt.

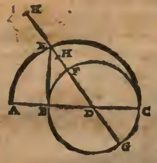
Hinc Effectio Geometrica.

SIt data ratio A B ad B C. Diuidatur B C bifariam in D, & ſupra totam A C facto ſemicirculo, erigatur B E perpendicularis ad A C. Tùm ſupra B C fiat inte-

ger circulus cuius centrum D, & connexa E D ſecet peripheriam in punctis F & G.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis noſtri par-
8. ſexti. tes, ſiquidem quadratum B D additur quadrato B E,
4. ſexti. hoc eſt rectangulo A B C, & fit quadratum D E,
17. ſexti. cuius latus D E additum dimidio B C, exhibet
E G.

Dico autem lineam E G fore ſummam extremarum, media exiſtente A B priore termino rationis. Sit enim, ſi fieri poteſt, ſumma extremarum maior vel minor E G & ęqualis G H. Quoniam igitur B C eſt æqualis F G, erit vt A B
9. quinti. ad B C; ita A B ad F G. Sed vt A B ad F G; ita eſt propter eamdem altitudinem rectangulum ſub A B in H G ad rectan-



1. ſexti. gulum H G F. Ergo cum rectangulum ſub ſumma extremarum H G in mediam A B ſit æquale quadratis ſecundæ & quartæ, erit vt A B ad B C; ita quadrata ſecundæ & quartæ, (æqualia rectangulo ex H G in A B)
8. ſexti. ad rectangulum H G F. Sed vt A B ad B C, ita qua-
4. ſexti. dratum mediæ B C ad quadratum B E. Ergo compo-
20. ſexti
12. quinti. nendo antecedentia ex vna parte, & conſequentia ex alia, erit vt A B ad B C; ita rectangulum ſub H G in A B plus quadrato mediæ A B, (hoc eſt quadrata trium intermediarum) ad rectangulum H G F plus quadrato B E.

Sed eſt vt A B ad B C ita quadrata trium intermediarum ad quadratum ſummę extremarum. Ergo rectan-
9. quinti. gulum H G F plus quadrato B E æquatur quadrato ſummæ extremarum G H. Sed quadratum G H ęquale eſt
2. ſecundi. rectangulis H G F & G H F. Igitur rectangula H G F & G H F æquantur rectangulo H G F plus quadrato B E. Et proinde dempto rectangulo communi, reſtabit

rectangulum G H F ęquale quadrato B E. Sed linea B E eſt perpendicularis ad extremitatem diametri. Ergo tangit. Et ita quadratum B E erit æquale rectangulo G E F. Igitur rectangulum G E F æquabitur rectangulo G H F, pars toti vel totum parti. Quod eſt abſurdum. Ergo ſumma extremarum nec poteſt eſſe maior nec minor G E. Igitur erit illi æqualis. Quod erat demonſtrandum. *16. tertij.* *36. tertii.*

PROPOSITIO XXVIII.

Hoc idem problema alio modo ſoluere.

ESto data eadem ratio 4. ad 9. Ponatur 1 R pro medio, & ſumatur 9 poſterior terminus rationis pro ſumma extremorum. Ergo ſi ducas ſummam extremorum 9 in mediam 1 R, fient 9 R pro aggregato quadratorum ſecundi & quarti, quibus ſi addas quadratum medii 1 Q, habebis 9 R + 1 Q pro quadratis trium intermediorum. Quadratum autem ſummæ extremorum eſt 81. Ergo 9 R + 1 Q ad 81 eſt in ratione data 4 ad 9. Igitur productus ſub extremis 81 R + 9 Q æquatur producto ſub mediis 324. Et poſt debitam reductionem 1 Q eſt æquale 36 − 9 R. Et fit 1 R ſiue medius 3, poſteriori termino rationis 9 exiſtente ſumma extremorum. Singulique proinde erunt $\frac{9}{2} - \text{℞}\,\frac{45}{4} \mid \text{℞}\,\frac{45}{4} - \frac{3}{2} \mid 3 \mid \text{℞}\,\frac{45}{4} + \frac{3}{2} \mid \frac{9}{2} + \text{℞}\,\frac{45}{4}$. *Lem. 14.* *Lem. 6.*

Hinc Canon.

PRoductum ſub terminis proportionis datæ iunge cum quadrato quod fit à dimidio poſterioris termini: huius enim aggregati radix quadrata ſupradicto multata dimidio exhibebit medium poſteriore termino rationis exiſtente ſumma extremorum. Vnde ſinguli non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

RESumatur figura Propoſ. præced. Et data eadem ratione A B ad B C. Fiant omnia vt illic imperatum eſt fieri Manifeſtum obſeruatas eſſe ſingulas Canonis Algebrici partes, & exhiberi E F.

Dico autem lineam E F fore mediam ex quæſitis, ſumma extremarum exiſtente B C poſteriore termino rationis. Sit enim, ſi fieri poteſt, media maior vel minor E F, & æqualis F H. Ergo rectangulum H F G ſub media in ſummam extremarum æquabitur quadratis
1. ſecundi. ſecundæ & quartæ. Cui addendo quadratum mediæ
17. ſexti.
3. ſecundi. F H, efficietur rectangulum G H F pro quadratis. Trium intermediarum. Igitur erit vt quadratum B C ad re-
8. ſexti. ctangulum G H F; ita B C ad A B; ſed tres illæ B C,
4. ſexti B E, A B, ſunt continuè proportionales, igitur vt pri-
20 ſexti. ma B C ad tertiam A B; ſic quadratum primę B C ad quadratum ſecundę B E. Igitur vt quadratum B C ad rectangulum G H F; ita quadratum B C ad quadratum B E. Ac proinde quadratum B E æquabitur rectan-
9. quinti. gulo G H F. Sed B E eſt perpendicularis ad extremi-
16 tertii. tatem diametri. Ergo tangit. Ergo quadratum B E æ-
36. tertii. quale eſt rectangulo G E F. Et ita rectangulum G E F æquabitur rectangulo G H F, pars toti, vel totum parti. Quod eſt abſurdum. Ergo media non poteſt eſſe maior nec minor F E. Et propterea erit illi æqualis. Quod erat demonſtrandum.

Appendix.

MVltis aliis modis potuit perfici operatio Algebrica vel ponendo 1 R pro ſumma extremorum, & capiendo poſteriorem terminum rationis pro medio. Vel ponendo 1 R pro medio, & ſumendo priorem terminum rationis pro ſumma extremorum, vel ponendo

1 R pro ſumma eorum qui ſunt in locis imparibus & accipiendo alterum terminum rationis aut pro medio aut pro ſumma extremorum ; aut ponendo 1 R pro medio vel pro ſumma extremorum & ſumendo alterum rationiſ terminum pro ſumma eorum qui ſunt in locis imparibus. Vnde patet vt minimum quatuordecim modis abſolui problema propoſitum, tùm Arithmeticè, tùm Geometricè.

Patet deinde quomodo poſſint inueniri quinque quantitates continuè proportionales data ratione quadratorum à tribus intermediis ad quadratum ſummæ extremarum, & quacumque ſumma vel differentia ex quinque : nam ſi nulla habita ratione iſtius ſummæ vel differentiæ, inueniantur prius quinque quantitates in ratione data prout hic factum eſt ; & fiat vt ſumma vel differentia homologa ex inuentis ad ſingulas inuentas ; ita ſumma vel differentia data ad alias, habebitur propoſitum.

Tertiò patet quomodo inueniri poſſint quinque proportionales data ratione quadratorum à ſingulis plus duplo mediæ quadrato, ad quadrata trium intermediarum, aut ad quadratum ſummæ extremarum : nam diuidendo, erit etiam data ratio quadratorum à tribus intermediis ad quadratum ſummæ extremarum vel contra.

Patet denique quomodo inueniri poſſint quinque proportionales data ſumma extremarum, & quadratis trium intermediarum. Quod aliter effectum eſt in 1 propoſ.

PROPOSITIO XXIX.

Data proportione quadratorum à tribus intermediis ad quadrata extremarum, inuenire quinque quantitates continuæ proportionales.

ESto data ratio 4 ad 7. Ponatur 1 R pro ſumma extremorum, & ſumatur 4 prior terminus rationis pro medio. Ergo quadratum ſummæ extremorum 1 Q multatum duplo quadrati medii 32, exhibebit quadrata extremorum 1 Q - 32. multiplicando verò ſummam extremorum 1 R per medium 4, habebis 4 R pro quadratis ſecundi & quarti, quibus ſi addas quadratum medii 16. Fiet aggregatum quadratorum à tribus intermediis 4 R † 16. Et proinde 4 R † 16 ad 1 Q - 32 eſt in ratione data 4 ad 7. Et ita productus ſub extremis 28 R † 112. æqualis erit producto ſub mediis 4 Q - 128. Ergo poſt debitam reductionem, & diuiſionem 1 Q æquabitur 7 R † 60. Et fit 1 R ſiue ſumma extremorum 12. Singulique 6 - ℞ 20 | ℞ 20 - 2 | 4 | ℞ 20 † 2 | 6 † ℞ 20.

Lem. 3. Lem. 6. Lem. 6.

Hinc Canon.

CApe duplum quadratum prioris termini, illudque adde cum producto terminorum rationis datæ: hanc ſummam iunge cum quadrato quod fit à dimidio poſterioris termini: iſtius enim aggregati radix quadrata ſupradicto addita dimidio exhibebit ſummam extremorum, priori termino rationis exiſtente medio quæſitorum. Vnde ſinguli non latebunt.

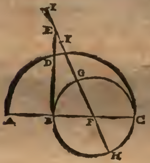
Hinc Effectio Geometrica.

SIt data ratio A B ad B C. Coniungantur illæ lineæ in directum. Et ſupra totam A C fiat ſemicirculus

erectaque B D perpendiculariter ad A C, producatur, donec linea B E poſſit quadratum B D plus duplo quadrati A B. Tùm factò ſupra B C integro circulo, cuius centrum F, ducta E F ſecet peripheriam in punctis G & H.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes, ſiquidem quadratum B D additur duplo quadrati A B, & fit quadratum B E, & hoc quadratum B E iunctum eſt quadrato B F, & fit quadratum F E; cuius latus F E additum dimidio ipſius B C, exhibet H E.

Dico autem lineam H E fore ſummam extremarum,



priore termino proportionis A B exiſtente media de quinque proportionalibus. Sit enim, ſi fieri poteſt, ſumma extremarum maior vel minor H E, & æqualis H I. Ergo quoniam B C eſt æqualis G H, erit vt A B ad B C; ita A B ad G H; ſed vt A B ad G H; ita eſt propter eamdem altitudinem, rectangulum ſub media A B & ſumma extremarum H I (quod eſt æquale quadratis ſecundæ & quartæ) ad rectangulum I H G: eſt autem vt eadem A B ad B C; ita quadratum A B ad quadratum B D, hoc eſt ad quadratum B E multatum duplo quadrato A B. Ergo componendo antecedentia ex vna parte, & conſequentia ex alia, erit vt rectangulum ſub A B in I H plus quadrato mediæ A B, hoc eſt vt quadrata trium intermediarum, ad rectangulum I H G plus quadrato B E minus duplo mediæ A B quadrato; ſic A B ad B C.

9. quinti. *1. ſexti.* *1. ſecundi.* *17. ſexti.* *8. ſexti.* *4. ſexti.* *10 ſexti.* *12 quinti.*

Sed linea B E eſt perpendicularis ad extremitatem diametri. Ergo tangens. Ac proinde quadratum B D æquatur rectangulo H E G. Igitur vt A B ad B C; ita

16 tertii. *36 tertii.*

rectangulum ſub A B in I H plus quadrato A B ad rectangulum I H G, plus rectangulo H E G, minus duplo quadrato A B. Igitur quoniam eſt vt A B ad B C, ita quadrata trium intermediarum ad quadrata extre-
9. quinti. marum, erit rectangulum I H G plus rectangulo H E G minus duplo mediæ A B quadrato, æquale quadratis extremarum. Sed quadratum ſummæ extremarum I H
1 ſecundi. æquatur rectangulis I H G & H I G. Ergo rectangula
4 ſecundi. I H G & H I G minus duplo quadrato mediæ A B, ſunt æqualia quadratis extremarum, atque ita rectangulum I H G plus rectangulo H E G minus duplo quadrato A B, æquatur rectangulo I H G plus rectangulo H I G minus duplo quadrato A B. Ergo ſublatis hinc inde, iis quæ ſunt communia, reſtabit rectangulum H I G æquale rectangulo H E G, pars toti vel totum parti. Quod eſt abſurdum. Ac proinde ſumma extremarum non poteſt eſſe maior vel minor H E. Ergo erit illi æqualis. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXX.

Idem problema alio modo ſoluere.

ESto data eadem ratio 4 ad 7. Ponatur 1 R pro ſumma extremorum & ſumatur 7 poſterior terminus rationis pro medio. Igitur multiplicando ſummam extremorum 1 R per medium 7. habebis 7 R pro quadratis
Lem. 14. ſecundi & quarti. Et ita 7 R † 49 eſt aggregatum quadratorum à tribus intermediis. At vero 1 Q - 98 erit
Lem. 5. ſumma quadratorum ab extremis. Et proinde 7 R † 49
Lem. 6. ad 1 Q - 98 eſt in ratione data 4 ad 7. Igitur productus ſub extremis 49 R † 343 æquabitur producto ſub
Lem. 6. mediis 4 Q - 392. Ergo poſt debitam reductionem & diuiſionem, 1 Q erit æquale $\frac{49\ R\ †\ 735}{4}$. Et fit 1 R ſiue ſumma extremorum 21, poſteriori termino rationis

existente

exiſtente medio. Vnde ſinguli erunt $\frac{21}{2}$ - ℞ $\frac{245}{4}$ | ℞ $\frac{245}{4}$ - $\frac{7}{2}$ | $7\frac{1}{2}$ ℞ $\frac{245}{4}$ + $\frac{7}{2}$ | $\frac{21}{2}$ + ℞ $\frac{245}{4}$.

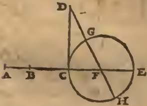
Hinc Canon.

DVplum ſolidum ex poſterioris termini quadrato in priorem terminum iunge cubo poſterioris termini: ſummam inde natam diuide per priorem terminum & quotientem ſerua. Tùm quadratum poſterioris termini diuide per priorem; quotientis cape dimidium, & eius quadrato adde quotientem ſeruatum: iſtius enim ſummæ radix quadrata ſupradicto addita dimidio, exhibet ſummam extremorum, poſteriori termino rationis exiſtente medio quæſitorum. Vnde ſinguli non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data ratio A B ad B C. Fiat vt A B ad compoſitam ex dupla A B & B C; ita quadratum B C ad aliud quadratum quod ſit C D. Tùm fiat vt A B ad B C; ita B C ad aliam lineam quæ ſit C E. Ponaturque C D perpendicularis ad E C, & diuiſa E C bifariam in F, centro F, interuallo F C vel F E, deſcribatur circulus ductaque & producta D F, ſecet peripheriam in G & H.

Maniſeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis noſtri partes; ſiquidem duplum ſolidum ex A B in quadratum B C, iunctum cum cubo B C facit ſolidum rectangulum ſub quadrato B C, in compoſitam ex dupla A B & B C. Hoc autem ſolidum rectangulum æquale



eſt ſolido ſub quadrato C D in lineam A B, cum ſit vt A B ad compoſitam ex dupla A B & B C; ita quadratum 34 vndec.

47. *primi.* B C ad quadratum C D. Quadratum autem C D additur quadrata C F (quæ eſt dimidium C E ortæ, diuiſione quadrati B C per lineam A B) & fit quadratum D F, cuius latus additum F H exhibet H D.

Dico autem lineam H D fore ſummam extremarum media exiſtente B C poſteriore termino rationis datæ. Cum enim ſit vt A B ad duplam A B plus B C; ita quadratum B C ad quadratum C D; cumque ſit etiam vt A B ad B C; ita B C ad C E; erit quoque vt B C ad duplam B C plus C E; ita quadratum B C ad quadratum C D; Sed vt B C ad duplam B C plus C E ita eſt propter eamdem altitudinem quadratum B C ad rectangulum ſub B C in duplam B C plus C E. (1. *ſexti.*) Igitur erit vt quadratum B C ad quadratum C D; ſic quadratum B C ad rectangulum ſub B C in duplam B C plus C E. Ac proinde quadratum C D æquabitur rectangulo ſub B C in duplam B C plus C E. (9. *quinti.*) Sed hoc rectangulum eſt æquale duplo quadrato B C plus rectangulo B C E. (1. *ſecundi.*) Ergo quadratum C D æquatur duplo quadrato B C & rectangulo B C E. Ac proinde per Propoſ. præced. (*Propoſ.* 29. *huius.*) linea B C exiſtente media, erit H D ſumma extrematum. Quod erat demonſtrandum.

Appendix.

Potuit in operatione Algebrica poni 1 R pro medio, & ſumi alter terminus rationis datæ pro ſumma extremarum. Item potuit poni 1 R pro ſumma eorum qui ſunt in locis imparibus & alteruter terminus rationis ſumi pro medio, aut pro ſumma extremorum. Item potuit poni 1 R pro ſumma extremorum & ſumi alter terminus pro ſumma eorum qui ſunt in locis imparibus. Item potuit poni 1 R pro medio & ſumi alter terminus pro ſumma eorum qui ſunt in locis imparibus. Vnde vt minimum decem Canones & Effectiones Geometricæ orirentur.

Deinde ex his patet quomodo data quacumque ſumma vel differentia quinque quantitatum continuè proportionalium, cum proportione quadratorum à tribus intermediis ad quadrata extremarum, poſſint inueniri ſingulæ: ſi enim reperiantur primò quinque quantitates in ratione data prædictorum quadratorum, & fiat vt ſumma vel differentia homologa ex quinque inuentis ad ſingulas; ita ſumma vel differentia data ad alias, perfectum erit problema.

Patet tertiò quomodo inueniri poſſint quinque in data ratione quadratorum à ſingulis ad quadrata extremarum, vel ad quadrata trium intermediarum: nam diuidendo, erit quoque data ratio quadratorum à tribus intermediis ad quadrata extremarum, vel contra, quod eſt hic ordinatum.

Patet denique quomodo inueniri queant quinque proportionales data ratione quam habet interuallum quadratorum à tribus intermediis & quadratorum ab extremis ad quadrata extremarum; nam componendo erit quoque data ratio quadratorum à tribus intermediis ad quadrata extremarum. Quod eſt effectum & ordinatum in Propoſ. præſenti & præcedente.

PROPOSITIO XXXI.

Data proportione quadratorum ab iis quæ ſunt in locis paribus ad quadrata earum quæ ſunt in imparibus locis, inuenire quinque continue proportionales quantitates.

ESto data ratio 3 ad 8. Ponatur ſumma extremorum 1 R, & ſumatur 3 prior terminus rationis pro medio quæſitorum. Multiplica 3 per 1 R, & habebis 3 R pro ſumma quadratorum ſecundi & quarti. Et quia vt ſæ- *Lem. 24.*

pius dictum in lib. 1. quadratum ſummæ extremorum in ſerie trium proportionalium, multatum quadrato medii exhibet aggregatum quadratorum à ſingulis tribus, ſi ab 1 Q tollas quadratum medii 3 relinquetur 1 Q - 9 pro aggregato quadratorum ab iis qui ſunt in locis imparibus. Igitur 3 R ad 1 Q - 9 erit in ratione data 3 ad 8. Et proinde productus ſub extremis 24 R æquabitur producto ſub mediis 3 Q - 27. Ergo poſt debitam reductionem & diuiſionem, 1 Q, erit æquale 8 R + 9. Et fit 1 R ſiue ſumma extremorum 9. Singulique ordinati erunt $\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{45}{4}}$ | $\sqrt{\frac{45}{4}} - \frac{3}{2}$ | 3 | $\sqrt{\frac{45}{4}} + \frac{3}{2}$ | $\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{45}{4}}$.

Lem. 3. *Lem. 6.* *Lem. 6.*

Hinc Canon.

QVadratum prioris termini proportionis datæ, adde quadrato quod fit à dimidio poſterioris: huius enim ſummæ radix quadrata ſupradicto addita dimidio exhibebit ſummam extremorum, priore termino rationis, exiſtente medio quæſitorum. Vnde ſinguli non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

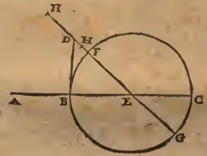
SIt data ratio A B ad B C. Erigatur perpendiculariter ad B C linea B D æqualis B A. Deinde diuidatur B C bifariam in E, & centro E, interuallo E B vel E C, fiat circulus; & connexa D E ſecet peripheriam in punctis F & G.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes, ſiquidem quadratum B D, hoc eſt A B additur quadrato B E, & fit quadratum D E; cuius latus D E additum E G, hoc eſt dimidio poſterioris termini B C, exhibet G D.

Dico autem lineam G D fore ſummam extremarum priori termino rationis A B exiſtente media quæſitarum.

Sit enim, ſi fieri poteſt, ſumma extremarum maior vel minor D G, & æqualis G H. Ergo quoniam B C eſt æqualis F G, erit vt A B ad B C; ita A B ad F G. Eſt autem vt A B ad F G; ita propter eamdem altitudinem rectangulum ſub media A B in ſummam extremarum H G (quod rectangulum eſt æquale quadratis ſecundæ & quartæ) ad rectangulum H G F. Igitur eſt vt A B ad B C; ita quadrata ſecundæ & quartæ ad rectangulum H G F & proinde quoniam eſt vt A B ad B C; ita quadrata ſecundæ & quartæ ad quadrata earum quæ ſunt in locis imparibus; erit rectangulum H G F æquale quadratis earum quæ ſunt in locis imparibus: hoc eſt rectangulum H G F æquabitur quadratis extremarum & quadrato mediæ. Atqui quadratum ſummæ extremarum H G æquatur quadratis extremarum plus duplo quadrato mediæ. Itemque illud idem quadratum H G eſt æquale rectangulis H G F & G H F.

9 quinti. 1. ſexti. 1. ſecundi. 17. ſexti. 9 quinti. 17. ſexti. 4. ſecundi. 17 ſexti. 2. ſecundi.



Ergo rectangula H G F & G H F æquantur rectangulo H G F plus quadrato mediæ A B, hoc eſt B D, & proinde dempto vtrinque communi rectangulo H G F, remanebit rectangulum G H F æquale quadrato B D. Sed linea B D eſt perpendicularis ad extremitatem diametri. Et proinde tangens. Igitur rectangulum G D F æquatur quadrato B D. Ergo rectangulum G D F erit æquale rectangulo G H F pars toti, vel totum parti. Quod eſt abſurdum. Itaque ſumma extremarum non poteſt eſſe maior vel minor G D. Ergo erit illi æqualis. Quod erat demonſtrandum.

16 tertii. 16. tertii.

PROPOSITIO XXXII.

Hoc idem problema alio modo perficere.

ESto data eadem ratio 3 ad 8. Ponaturque 1 R pro medio, & ſumatur prior terminus rationis datæ 3 pro ſumma extremorum. Igitur multiplicando ſummam
Lem. 24. extremorum 3 in medium 1 R, fient 3 R pro quadratis ſecundi & quarti & tollendo 1 Q ex quadrato ſummæ
Lem 3. extremorum 9 relinquetur 9 - 1 Q pro quadratis eorum
Lem. 6. qui ſunt in locis imparibus. Et proinde 3 R ad 9 - 1 Q erunt in ratione data 3 ad 8. Ergo productus ſub ex-
Lem. 6. tremis 4 R æquabitur producto ſub mediis 27 - 3 Q. Et poſt debitam reductionem & diuiſionem, 1 Q erit æquale 9 - 8 R. Fitque 1 R, ſiue medius 1. ſumma extremorum exiſtente 3 priore termino rationis. Vnde ſinguli ordinati erunt $\frac{3}{2}$ - ℞ $\frac{5}{4}$ | ℞ $\frac{5}{4}$ - $\frac{1}{2}$ | 1 | ℞ $\frac{5}{4}$ † ℞ $\frac{[illegible]}{2}$ | $\frac{3}{2}$ † ℞ $\frac{5}{4}$.

Hinc Canon.

QVadratum quod fit à dimidio poſterioris termini rationis datæ iunge quadrato prioris termini: huius aggregati radix quadrata ſupradicto multata dimidio exhibebit medium, priore termino rationis exiſtente ſumma extremorum. Vnde ſinguli non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

ESto data ratio A B ad B C, in figura Propoſ. præced. fiant omnia, vt illic imperatum eſt fieri. Manifeſtum eſt obſeruatas eſſe ſingulas Canonis partes & exhiberi F D.

Dico autem lineam F D fore mediam ex quæſitis, ſum-

ma extremarum exiſtente priore termino rationis A B. Sit enim, ſi fieri poteſt, media maior vel minor F D, & æqualis F H. Igitur rectangulum ſub media F H in ſummam extremarum A B æquabitur quadratis ſecundæ & quartæ. Eſt autem vt A B ad B C hoc eſt F G, ita propter eamdem altitudinem rectangulum ſub A B in H F ad rectangulum H F G; igitur cum ſit vt A B ad B C, ita rectangulum ſub A B in H F ad quadrata earum quæ ſunt in locis imparibus; erit rectangulum H F G æquale quadratis earum quæ ſunt in imparibus locis. Ergo ſi rectangulo H F G addas quadratum mediæ H F, fiet rectangulum G H F æquale quadrato ſummæ extremarum A B ſeu B D. Sed vt oſtenſum eſt in præcedenti quadratum tangentis B D æquatur rectangulo G D F. Igitur rectangulum G D F erit æquale rectangulo G H F, pars toti, vel totum parti. Quod eſt abſurdum. Itaque media non poteſt eſſe minor nec maior F B. Ergo erit illi æqualis. Quod erat demonſtrandum.

1. ſexti. 9 quinti. 3. ſecundi. 4 ſecundi. 17. ſexti. 16. tertij. 36. tertii.

Appendix.

POtuit poni 1 R in operatione Algebrica pro ſumma extremorum, & ſumi poſterior terminus rationis pro medio. Item potuit poni 1 R pro medio, & ſumi poſterior terminus rationis pro ſumma extremorum. Item potuit poni 1 R pro medio, & ſumi alter rationis terminus pro ſumma eorum qui ſunt in locis imparibus. Item potuit poni 1 R pro ſumma eorum qui ſunt in locis imparibus & ſumi alter rationis terminus pro ſumma eorum qui ſunt in imparibus locis. Item poni potuit 1 R pro ſumma eorum qui ſunt in locis imparibus & ſumi alter rationis terminus pro medio aut pro ſumma ſecundi & quarti. Ex quibus omnibus noui Canones & Effectiones Geometricæ orirentur.

Patet deinde quomodo data quacumque ſumma vel differentia & ratione prędicta quadratorum poſſint inue-

niri quinque quantitates continuè proportionales: ſi enim primò reperiantur quinque in ratione data, & fiat vt ſumma vel differentia homologa ad ſingulas inuentas; ita ſumma vel differentia data ad alias, habebitur propoſitum.

Patet tertiò quomodo inueniri poſſint quinque proportionales in ratione data quadratorum à ſingulis ad quadrata earum quæ ſunt in locis imparibus, vel earum quæ in paribus; nam diuidendo, habebitur ratio quæ hic data fuit.

Denique patet quomodo poſsint inueniri quinque proportionales data ratione quadratorum ſecundæ & quartæ ad interuallum quo quadrata ſecundæ & quartæ ſuperantur à quadratis reliquarum; nam componendo, erit quoque data ratio quadratorum primæ, tertiæ & quintæ ad quadrata earum quæ ſunt in locis paribus, quod fuit hîc ordinatum.

PROPOSITIO XXXIII.

Data ratione quadrati ſummæ earum quæ ſunt in locis paribus ad quadrata extremarum, inuenire quinque quantitates continuè proportionales.

ESto data ratio 100 ad 257. Ponatur 1 R pro ſumma
extremorum, & ſumatur prior terminus rationis
100 pro medio ex quæſitis, multiplica ſummam extre-
Lem. 24. morum 1 R per medium 100, habebiſque 100 R pro
Lem. 3. quadratis ſecundi & quarti, quibus ſi addas duplum
Lem. 6. quadratum medii 100, nempe 20000; fiet quadratum
ſummę eorum qui ſunt in locis paribus 100 R † 20000.
Præterea ſubtrahendo duplum quadratum eiuſdem me-
Lem. 3. dii de quadrato ſummæ extremorum, relinquentur
Lem. 6 quadrata extremorum 1 Q - 20000. Ac proinde

100

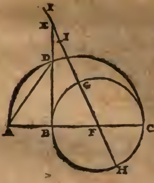
100 R † 20000 ad 1 Q - 20000 eſt in ratione data 100 ad 257. Igitur productus ſub extremis 25700 R † 5140000 æqualis erit producto ſub mediis 100 Q - 2000000. Ergo poſt debitam reductionem & diuiſionem, 1 Q æquabitur 257 R † 71400. Et propterea fit 1 R, ſiue ſumma extremorum 425. Singulique. 25. 50. 100. 200. 400. *Lem. 6.*

Hinc Canon.

DVplum quadratum prioris termini rationis datę adde cum duplo producti ſub terminis eiuſdem proportionis: ſummam hanc iunge cum quadrato quod fit à dimidio poſterioris termini: huius enim aggregati radix quadrata ſupradicto addita dimidio, exhibebit ſummam extremorum, priore termino rationis exiſtente medio quæſitorum. Vnde ſinguli non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data ratio A B ad B C. Et ſupra totam A C fiat ſemicirculus erectaque B D perpendiculari ad A C, nectatur A D. Tum producatur B D, donec B E poſsit duplum quadratum A D. Deinde diuiſa B C bifariam in F, centro F, interuallo F B vel F C, fiat circulus integer, connexaque & producta E F ſecet peripheriam circuli in punctis G & H.



Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes, ſiquidem quadratum A D æquatur rectangulo *8. ſexti.* C A B, hoc eſt quadrato A B, & rectangulo ſub terminis *4. ſexti.* rationis A B C. Ergo cum linea B E poſsit duplum qua- *17. ſexti.* *3 ſecundi.*

rectangulum ſub A B in I H plus quadrato A B ad rectangulum I H G, plus rectangulo H E G, minus duplo quadrato A B. Igitur quoniam eſt vt A B ad B C, ita quadrata trium intermediarum ad quadrata extre-
5. quinti. marum, erit rectangulum I H G plus rectangulo H E G minus duplo mediæ A B quadrato, æquale quadratis extremarum. Sed quadratum ſummæ extremarum I H
2 ſecundi, æquatur rectangulis I H G & H I G. Ergo rectangula
4 ſecundi. I H G & H I G minus duplo quadrato mediæ A B, ſunt æqualia quadratis extremarum, atque ita rectangulum I H G plus rectangulo H E G minus duplo quadrato A B, æquatur rectangulo I H G plus rectangulo H I G minus duplo quadrato A B. Ergo ſublatis hinc inde, iis quæ ſunt communia, reſtabit rectangulum H I G æquale rectangulo H E G, pars toti vel totum parti. Quod eſt abſurdum. Ac proinde ſumma extremarum non poteſt eſſe maior vel minor H E. Ergo erit illi æqualis. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXX.

Idem problema alio modo ſoluere.

ESto data eadem ratio 4 ad 7. Ponatur 1 R pro ſumma extremorum & ſumatur 7 poſterior terminus rationis pro medio. Igitur multiplicando ſummam extremorum 1 R per medium 7. habebis 7 R pro quadratis
Lem. 24. ſecundi & quarti. Et ita 7 R † 49 eſt aggregatum quadratorum a tribus intermediis. At vero 1 Q - 98 erit
Lem. 5. ſumma quadratorum ab extremis. Et proinde 7 R † 49
Lem. 6. ad 1 Q - 98 eſt in ratione data 4 ad 7. Igitur productus ſub extremis 49 R † 343 æquabitur producto ſub
Lem. 6. mediis 4 Q - 392. Ergo poſt debitam reductionem & diuiſionem, 1 Q erit æquale $\frac{49\ R\ †\ 735}{4}$. Et fit 1 R ſiue ſumma extremorum 21, poſteriori termino rationis exiſtente

exiſtente medio. Vnde ſinguli erunt $\frac{21}{2}$ - ℞ $\frac{245}{4}$ | ℞ $\frac{245}{4}$ - $\frac{7}{2}$ | 7 | ℞ $\frac{245}{4}$ + $\frac{7}{2}$ | $\frac{21}{2}$ + ℞ $\frac{245}{4}$.

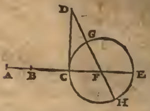
Hinc Canon.

DVplum ſolidum ex poſterioris termini quadrato in priorem terminum iunge cubo poſterioris termini: ſummam inde natam diuide per priorem terminum & quotientem ſerua. Tùm quadratum poſterioris termini diuide per priorem; quotientis cape dimidium, & eius quadrato adde quotientem ſeruatum: iſtius enim ſummæ radix quadrata ſupradicto addita dimidio, exhibet ſummam extremorum, poſteriori termino rationis exiſtente medio quæſitorum. Vnde ſinguli non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data ratio A B ad B C. Fiat vt A B ad compoſitam ex dupla A B & B C; ita quadratum B C ad aliud quadratum quod ſit C D. Tùm fiat vt A B ad B C; ita B C ad aliam lineam quæ ſit C E. Ponaturque C D perpendicularis ad E C, & diuiſa E C bifariam in F, centro F, interuallo F C vel F E, deſcribatur circulus ductaque & producta D F, ſecet peripheriam in G & H.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis noſtri partes; ſiquidem duplum ſolidum ex A B in quadratum B C, iunctum cum cubo B C facit ſolidum rectangulum ſub quadrato B C, in compoſitam ex dupla A B & B C. Hoc autem ſolidum rectangulum æquale



eſt ſolido ſub quadrato C D in lineam A B, cum ſit vt A B ad compoſitam ex dupla A B & B C; ita quadratum 14 vndec.

47. *primi.* B C ad quadratum C D. Quadratum autem C D additur quadrata C F (quæ eſt dimidium C E ortæ, diuiſione quadrati B C per lineam A B) & fit quadratum D F, cuius latus additum F H exhibet H D.

Dico autem lineam H D fore ſummam extremarum media exiſtente B C poſteriore termino rationis datæ. Cum enim ſit vt A B ad duplam A B plus B C; ita quadratum B C ad quadratum C D; cumque ſit etiam vt A B ad B C; ita B C ad C E; erit quoque vt B C ad duplam B C plus C E; ita quadratum B.C ad quadratum C D; Sed vt B C ad duplam B C plus C E ita eſt propter eandem altitudinem quadratum B C ad rectangu- 1. *ſexti.* gulum ſub B C in duplam B C plus C E. Igitur erit vt quadratum B C ad quadratum C D; ſic quadratum B C ad rectangulum ſub B C in duplam B C plus C E. Ac proinde quadratum C D æquabitur rectangulo ſub 9. *quinti.* B C in duplam B C plus C E. Sed hoc rectangulum eſt æquale duplo quadrato B C plus rectangulo 1. *ſecundi.* B C E. Ergo quadratum C D æquatur duplo quadrato B C & rectangulo B C E. Ac proinde per Propoſ. præ- *Propoſ. 29. huius.* ced. linea B C exiſtente media, erit H D ſumma extrematum. Quod erat demonſtrandum.

Appendix.

POtuit in operatione Algebrica poni 1 R pro medio, & ſumi alter terminus rationis datæ pro ſumma extremarum. Item potuit poni 1 R pro ſumma eorum qui ſunt in locis imparibus & alteruter terminus rationis ſumi pro medio, aut pro ſumma extremorum. Item potuit poni 1 R pro ſumma extremorum & ſumi alter terminus pro ſumma eorum qui ſunt in locis imparibus. Item potuit poni 1 R pro medio & ſumi alter terminus pro ſumma eorum qui ſunt in locis imparibus. Vnde vt minimum decem Canones & Effectiones Geometricæ orirentur.

Deinde ex his patet quomodo data quacumque ſumma vel differentia quinque quantitatum continuè proportionalium, cum proportione quadratorum à tribus intermediis ad quadrata extremarum, poſſint inueniri ſingulæ: ſi enim reperiantur primò quinque quantitates in ratione data prædictorum quadratorum, & fiat vt ſumma vel differentia homologa ex quinque inuentis ad ſingulas; ita ſumma vel differentia data ad alias, perfectum erit problema.

Patet tertiò quomodo inueniri poſſint quinque in data ratione quadratorum à ſingulis ad quadrata extremarum, vel ad quadrata trium intermediarum: nam diuidendo, erit quoque data ratio quadratorum à tribus intermediis ad quadrata extremarum, vel contra, quod eſt hic ordinatum.

Patet denique quomodo inueniri queant quinque proportionales data ratione quam habet interuallum quadratorum à tribus intermediis & quadratorum ab extremis ad quadrata extremarum; nam componendo erit quoque data ratio quadratorum à tribus intermediis ad quadrata extremarum. Quod eſt effectum & ordinatum in Propoſ. præſenti & præcedente.

PROPOSITIO XXXI.

Data proportione quadratorum ab iis quæ ſunt in locis paribus ad quadrata earum quæ ſunt in imparibus locis, inuenire quinque continue proportionales quantitates.

ESto data ratio 3 ad 8. Ponatur ſumma extremorum 1 R, & ſumatur 3 prior terminus rationis pro medio quæſitorum. Multiplica 3 per 1 R, & habebis 3 R pro ſumma quadratorum ſecundi & quarti. Et quia vt ſæ- *Lem. 14.*

Lem. 3. pius dictum in lib. 1. quadratum ſummæ extremorum *Lem. 6.* in ſerie trium proportionalium, multatum quadrato medii exhibet aggregatum quadratorum à ſingulis tribus, ſi ab 1 Q tollas quadratum medii 3 relinquetur 1 Q - 9 pro aggregato quadratorum ab iis qui ſunt in locis imparibus. Igitur 3 R ad 1 Q - 9 erit in ratione *Lem. 6.* data 3 ad 8. Et proinde productus ſub extremis 24 R æquabitur producto ſub mediis 3 Q - 27. Ergo poſt debitam reductionem & diuiſionem, 1 Q, erit æquale 8 R † 9. Et fit 1 R ſiue ſumma extremorum 9. Singulique ordinati erunt $\frac{9}{2}$ - ℞ $\frac{45}{4}$ | ℞ $\frac{45}{4}$ - $\frac{3}{2}$ | 3 | ℞ $\frac{45}{4}$ † $\frac{3}{2}$ | $\frac{9}{2}$ † ℞ $\frac{45}{4}$.

Hinc Canon.

QVadratum prioris termini proportionis datæ, adde quadrato quod fit à dimidio poſterioris: huius enim ſummæ radix quadrata ſupradicto addita dimidio exhibebit ſummam extremorum, priore termino rationis, exiſtente medio quæſitorum. Vnde ſinguli non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

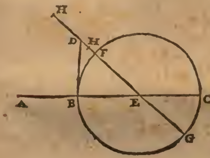
SIt data ratio A B ad B C. Erigatur perpendiculariter ad B C linea B D æqualis B A. Deinde diuidatur B C bifariam in E, & centro E, interuallo E B vel E C, fiat circulus; & connexa D E ſecet peripheriam in punctis F & G.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes, ſiquidem quadratum B D, hoc eſt A B additur quadrato B E, & fit quadratum D E; cuius latus D E additum E G, hoc eſt dimidio poſterioris termini B C, exhibet G D.

Dico autem lineam G D fore ſummam extremarum priori termino rationis A B exiſtente media quæſitarum.

Sit enim, ſi fieri poteſt, ſumma extremarum maior vel minor D G, & æqualis G H. Ergo quoniam B C eſt æqualis F G, erit vt A B ad B C; ita A B ad F G. Eſt autem vt A B ad F G; ita propter eamdem altitudinem rectangulum ſub media A B in ſummam extremarum H G (quod rectangulum eſt æquale quadratis ſecundæ & quartæ) ad rectangulum H G F. Igitur eſt vt A B ad B C; ita quadrata ſecundæ & quartæ ad rectangulum H G F & proinde quoniam eſt vt A B ad B C; ita quadrata ſecundæ & quartæ ad quadrata earum quæ ſunt in locis imparibus; erit rectangulum H G F æquale quadratis earum quæ ſunt in locis imparibus: hoc eſt rectangulum H G F æquabitur quadratis extremarum & quadrato mediæ. Atqui quadratum ſummæ extremarum H G æquatur quadratis extremarum plus duplo quadrato mediæ. Itemque illud idem quadratum H G eſt æquale rectangulis H G F & G H F.

9 quinti. *1. ſexti* *1. ſecundi.* *17. ſexti.*



9 quinti. *17. ſexti.* *4. ſecundi.* *17 ſexti.* *2. ſecundi.*

Ergo rectangula H G F & G H F æquantur rectangulo H G F plus quadrato mediæ A B, hoc eſt B D, & proinde dempto vtrinque communi rectangulo H G F, remanebit rectangulum G H F æquale quadrato B D. Sed linea B D eſt perpendicularis ad extremitatem diametri. Et proinde tangens. Igitur rectangulum G D F æquatur quadrato B D. Ergo rectangulum G D F erit æquale rectangulo G H F pars toti, vel totum parti. Quod eſt abſurdum. Itaque ſumma extremarum non poteſt eſſe maior vel minor G D. Ergo erit illi æqualis. Quod erat demonſtrandum.

6. tertii. *36. tertii.*

ma extremarum exiſtente priore termino rationis A B. Sit enim, ſi fieri poteſt, media maior vel minor F D, & æqualis F H. Igitur rectangulum ſub media F H in ſummam extremarum A B æquabitur quadratis ſecundæ & quartæ. Eſt autem vt A B ad B C hoc eſt F G; ita propter eamdem altitudinem rectangulum ſub A B in H F ad rectangulum H F G; igitur cum ſit vt A B ad B C, ita rectangulum ſub A B in H F ad quadrata earum quæ ſunt in locis imparibus; erit rectangulum H F G æquale quadratis earum quæ ſunt in imparibus locis. Ergo ſi rectangulo H F G addas quadratum mediæ H F, fiet rectangulum G H F æquale quadrato ſummæ extremarum A B ſeu B D. Sed vt oſtenſum eſt in præcedenti quadratum tangentis B D æquatur rectangulo G D F. Igitur rectangulum G D F erit æquale rectangulo G H F, pars toti, vel totum parti. Quod eſt abſurdum. Itaque media non poteſt eſſe minor nec maior F B. Ergo erit illi æqualis. Quod erat demonſtrandum.

1. ſexti. *9 quinti.* *3. ſecundi.* *4 ſecundi.* *17. ſexti.* *16. tertij.* *36. tertij.*

Appendix.

POtuit poni 1 R in operatione Algebrica pro ſumma extremorum, & ſumi poſterior terminus rationis pro medio. Item potuit poni 1 R pro medio, & ſumi poſterior terminus rationis pro ſumma extremorum. Item potuit poni 1 R pro medio, & ſumi alter rationis terminus pro ſumma eorum qui ſunt in locis imparibus. Item potuit poni 1 R pro ſumma eorum qui ſunt in locis imparibus & ſumi alter rationis terminus pro ſumma eorum qui ſunt in imparibus locis. Item poni potuit 1 R pro ſumma eorum qui ſunt in locis imparibus & ſumi alter rationis terminus pro medio aut pro ſumma ſecundi & quarti. Ex quibus omnibus noui Canones & Effectiones Geometricæ orirentur.

Patet deinde quomodo data quacumque ſumma vel differentia & ratione prędicta quadratorum poſſint inue-

niri quinque quantitates continuè proportionales: ſi enim primò reperiantur quinque in ratione data, & fiat vt ſumma vel differentia homologa ad ſingulas inuentas; ita ſumma vel differentia data ad alias, habebitur propoſitum.

Patet tertiò quomodo inueniri poſſint quinque proportionales in ratione data quadratorum à ſingulis ad quadrata earum quæ ſunt in locis imparibus, vel earum quæ in paribus; nam diuidendo, habebitur ratio quæ hic data fuit.

Denique patet quomodo poſsint inueniri quinque proportionales data ratione quadratorum ſecundæ & quartæ ad interuallum quo quadrata ſecundæ & quartæ ſuperantur à quadratis reliquarum; nam componendo, erit quoque data ratio quadratorum primæ, tertiæ & quintæ ad quadrata earum quæ ſunt in locis paribus, quod fuit hic ordinatum.

PROPOSITIO XXXIII.

Data ratione quadrati ſummæ earum quæ ſunt in locis paribus ad quadrata extremarum, inuenire quinque quantitates continue proportionales.

ESto data ratio 100 ad 257. Ponatur 1 R pro ſumma extremorum, & ſumatur prior terminus rationis 100 pro medio ex quæſitis, multiplica ſummam extremorum 1 R per medium 100, habebiſque 100 R pro quadratis ſecundi & quarti, quibus ſi addas duplum quadratum medii 100, nempe 20000; fiet quadratum ſummę eorum qui ſunt in locis paribus 100 R † 20000. Præterea ſubtrahendo duplum quadratum eiuſdem medii de quadrato ſummæ extremorum, relinquentur quadrata extremorum 1 Q - 20000. Ac proinde

Lem. 24. *Lem. 3.* *Lem. 6.* *Lem. 3* *Lem. 6*

100

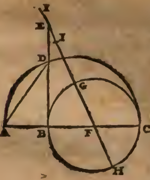
100 R † 20000 ad 1 Q - 20000 eſt in ratione data 100 ad 257. Igitur productus ſub extremis 25700 R † 5140000 æqualis erit producto ſub mediis 100 Q - 2000000. Ergo poſt debitam reductionem & diuiſionem, 1 Q æquabitur 257 R † 71400. Et propterea fit 1 R, ſiue ſumma extremorum 425. Singulique. 25. 50. 100. 200. 400. *Lem. 6.*

Hinc Canon.

DVplum quadratum prioris termini rationis datę adde cum duplo producti ſub terminis eiuſdem proportionis: ſummam hanc iunge cum quadrato quod fit à dimidio poſterioris termini: huius enim aggregati radix quadrata ſupradicto addita dimidio, exhibebit ſummam extremorum, priore termino rationis exiſtente medio quæſitorum. Vnde ſinguli non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data ratio A B ad B C. Et ſupra totam A C fiat ſemicirculus erectaque B D perpendiculari ad A C, nectatur A D. Tum producatur B D, donec B E poſſit duplum quadratum A D. Deinde diuiſa B C bifariam in F, centro F, interuallo F B vel F C, fiat circulus integer, connexaque & producta E F ſecet peripheriam circuli in punctis G & H.



Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes, ſiquidem quadratum A D æquatur rectangulo C A B, hoc eſt quadrato A B, & rectangulo ſub terminis rationis A B C. Ergo cum linea B E poſſit duplum qua- *8. ſexti.* *4. ſexti.* *17 ſexti.* *3 ſecundi*

drati A D, erit quadratum B E æquale duplo quadrato prioris termini A B, & duplo rectangulo ſub terminis A B C. Hoc autem quadratum B E additur quadrato quod fit à dimidio poſterioris termini B F, & fit quadratum E F, cuius latus E F additum F H exhibet E H.

Dico autem E H fore ſummam extremarum, priore termino rationis A B exiſtente media. Sit enim, ſi fieri poteſt, ſumma extremarum maior vel minor E H, &
9. quinti æqualis H I. Quoniam igitur B C eſt æqualis G H; erit
1 ſexti. vt A B ad B C; ita A B ad G H: eſt autem vt A B ad
4. ſexti. G H; ſic propter eandem altitudinem, rectangulum
8 ſexti. ſub A B in I H ad rectangulum I H G. Item vt ca-
20 ſexti. dem A B ad B C; ſic quadratum A B ad quadratum B D: Ergo componendo antecedentia ex vna parte, & conſequentia ex alia, erit vt A B ad B C; ita rectangulum ſub A B in I H plus quadrato A B ad rectangu-
11 quinti. lum I H G plus quadrato B D. Et iterum vtrique parti æquationis addendo idem quod fuit additum, erit quo-
12 quinti. que vt A B ad B C; ita rectangulum ſub A B in I H plus duplo quadrato A B, ad rectangulum I H G plus duplo quadrato B D. Sed rectangulum ex A B media in ſum-
1 ſecundi. *17 ſexti.* mam extremarum I H plus duplo quadrato mediæ A B,
4 ſecundi æquatur quadrato ſummæ earum quæ ſunt in locis paribus.

Eſt verò vt A B ad B C, ita quadratum ſummæ earum quæ ſunt in locis paribus ad quadrata extremarum: igitur rectangulum I H G plus duplo quadrato B D eſt æ-
9. quinti. quale quadratis extremarum. Sed quadratum ſummæ extremarum I H quod æquatur quadratis extremarum
4 ſecundi. *17 ſexti.* plus duplo mediæ quadrato, eſt etiam æquale rectangulis
2 ſecundi. I H G & H I G, igitur cum iam ſit probatum rectangulum I H G plus duplo quadrato B D æquari quadratis extremarum, neceſſe eſt rectangulum H I G eſſe æquale duplo quadrato B D plus duplo mediæ quadrato A B. Ac proinde rectangulum H I G æquabitur

quadrato B E (quod iam oſtenſum eſt æquale duplo quadrato B D plus duplo quadrato A B.) Sed linea B E eſt perpendicularis ad extremitatem diametri, ergo tangens. Igitur quadratum B E æquatur rectangulo H E G. *16. tertii* Ergo rectangulum H E G æquale eſt rectangulo H I G, *36 tertii.* pars toti, vel totum parti, quod eſt abſurdum. Itaque ſumma extremarum non poterit eſſe maior nec minor H E, ac proinde erit illi æqualis. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXXIV.

Hoc idem problema aliter ſoluere.

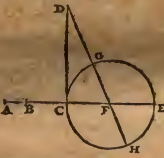
Esto data ratio 5 ad 7. Ponatur 1 R pro ſumma extremorum & ſumatur poſterior terminus rationis 7 pro medio. Igitur productus ex ſumma extremorum 1 R in medium 7. æquabitur quadratis ſecundi & quarti. *Lem 24.* Cui ſi addas duplum quadrati medii 7. habebis 7 R + 98 pro quadrato ſummæ ſecundi & quarti. Si verò ex quadrato ſummæ extremorum 1 Q tollas duplum quadratum medii, fiet aggregatum quadratorum *Lem. 5.* ab extremis 1 Q - 98. Et proinde 7 R + 98 ad 1 Q - 98 *Lem. 6.* erit in ratione data 5 ad 7. Quare productus ſub extremis 49 R + 686 æquatur producto ſub mediis *Lem. 6.* 5 Q - 490. Et poſt debitam reductionem & diuiſionem 1 Q erit æquale $\frac{49\,R - 1176}{5}$. Et fit 1 R ſiue ſumma extremorum 21. Poſteriori termino rationis exiſtente medio. Et ita ſinguli ordinati erunt $\frac{21}{2}$ - ℞ $\frac{245}{4}$ | ℞ $\frac{245}{4}$ - $\frac{7}{2}$ | 7 | ℞ $\frac{245}{4}$ + $\frac{7}{2}$ | $\frac{21}{2}$ + ℞ $\frac{245}{4}$.

Hinc Canon.

DVplum cubum poſterioris termini adde cum duplo ſolido ſub quadrato poſterioris in priorem terminum : ſummam inde natam diuide per priorem , & quotientem ſerua. Tum quadratum poſterioris termini diuide per priorem : quotientis huius cape dimidium , & huius dimidii quadrato adde quotientem ſupra ſeruatum : illius enim aggregati radix quadrata ſupradicto addita dimidio , exhibebit ſummam extremorum , poſteriore termino rationis exiſtente medio. Vnde ſinguli non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data ratio A B ad B C. Fiat vt A B ad duplam A C ; ita quadratum B C ad quadratum C D. Tum fiat quoque vt A B ad B C ; ita BC ad C E. Et diuiſa C E bifariam in F , centro F , interuallo F C , deſcribatur circulus , poſitaque C D perpendiculariter ad E C , nectatur D F , & producta ſecet peripheriam in punctis G , & H.



Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis partes , duplus enim cubus B C plus duplo ſolido ſub quadrato B C in A B æquatur ſolido rectangulo ſub dupla A C in quadratum B C. Sed illud ſolidum æquatur ſolido re-
14. *vndec.* ctangulo ſub quadrato C D in lineam A B ; ergo duplus cubus B C plus duplo ſolido ſub quadrato B C in lineam A B , diuiditur per lineam A B , & fit quadratum C D pro quotiente Geometrico : Quoniam autem eſt vt
17. *ſexti.* A B ad B C ; ita B C ad C E , quadratum B C æquale

eſt rectangulo ex A B in C E, & proinde quadratum B C diuiditur per lineam A B, & fit linea C E. Cuius dimidium eſt C F; quadrato autem C F additur quadratum C D, & fit quadratum D F, cuius latus D F additum F H exhibet D H. *47 primi.*

Dico autem lineam D H fore ſummam extremarum poſteriore termino rationis B C exiſtente media. Nam cum ſit vt A B ad B C; ita B C ad C E & vt A B ad duplam A C; ita quadratum B C ad quadratum C D; erit quoque vt B C ad duplam B E; ita quadratum B C ad quadratum C D. Sed vt B C ad duplam B E; ita eſt propter eandem altitudinem quadratum B C ad rectangulum duplum E B C; hoc eſt ad duplum quadratum B C plus duplo rectangulo B C E. Igitur erit vt quadratum B C ad quadratum C D, ita quadratum B C ad duplum quadratum B C plus duplo rectangulo B C E. Ergo quadratum C D æquabitur duplo quadrato B C plus duplo rectangulo B C E. Igitur per Propoſ. præced. linea H D erit ſumma extremarum B C exiſtente media. Quod erat demonſtrandum. *1. ſexti.* *3 ſecundi.* *9 quinti.*

Appendix.

Potuit poni 1 R pro medio in operatione Algebrica, & ſumi alteruter terminus rationis datæ pro ſumma extremorum. Item potuit poni 1 R pro ſumma eorum qui ſunt in locis imparibus, & ſumi alter terminus pro ſumma ſecundi & quarti, aut pro medio. Item potuit poni 1 R pro ſumma ſecundi & quarti & ſumi alter terminus pro ſumma eorum qui ſunt locis imparibus. Item potuit poni 1 R pro medio & ſumi alter terminus pro ſumma eorum qui ſunt in imparibus locis: vnde noui Canones & Effectiones Geometricæ orirentur.

Patet deinde quomodo inueniri poſſint quinque quantitates continuè proportionales, data quacumque

ſumma vel differentia illarum & prædicta quadratorum proportione: fiat enim vt ſumma vel differentia homologa ex quinque inuentis ad ſingulas; ita ſumma vel differentia data ad alias; & habebitur propoſitum.

Patet tertiò quomodo inueniri poſſint quinque proportionales data ratione quadratorum à ſingulis plus quadrato mediæ ad quadrata extremarum vel ad quadratum ſummæ earum quæ ſunt in locis paribus; nam diuidendo, habebitur quoque ratio quæ hic data fuit.

Denique patet etiam inueniri poſſe quinque proportionales data ratione quam habet interuallum quadrati ſummæ earum quæ ſunt in locis paribus, ad quadrata extremarum; nam componendo, habebis facile rationem quæ hic data fuit.

Hic etiam adnotare libet quomodo ſolui poſsit illud problema. Data ſumma ſecundæ & quartæ ex quinque proportionalibus, & quadratis extremarum inuenire ſingulas. Verbi gratia, ſit data ſumma numerorum 10 & aggregatum quadratorum 257. Poteſt quidem poni 1 R pro medio. Ergo 100 - 2 Q æquabitur quadra-

Lem. 3. Lem. 6. tis ſecundi & quarti. Et proinde diuidendo 100 - 2 Q per medium 1 R, habebis $\frac{100 - 2Q}{1R}$ pro ſumma extremorum cuius quadratorum $\frac{10000 + 4QQ - 400Q}{1Q}$ multatum duplo quadrati medii 2 Q, relinquit $\frac{10000 + 2QQ - 400Q}{1Q}$.

Lem. 3. Lem. 6. Igitur erit æquatio inter $\frac{10000 + 2QQ - 400Q}{1Q}$ & ſummam quadratorum ab extremis datam 257. Ergo 1 QQ æquabitur $\frac{657Q - 10000}{2}$. Et proinde 1 R ſiue medius eſt 4. Hinc quidem facile elicies Canonem, ſed non Effectionem Geometricam. Quare vt Geometricè ſoluas operandum vt in præſenti & præced. Propoſitione: data enim ſumma ſecundi & quarti 10 & aggregato qua-

dratorum ab extremis 257. datur quoque ratio quadrati ſummæ earum quæ ſunt in locis imparibus ad quadrata extremarum.

PROPOSITIO XXXV.

Data proportione quadrati ſummæ earum quantitatum quæ ſunt in locis paribus, ad quadrata earum quæ ſunt in imparibus locis, inuenire quinque proportionales.

ESto data ratio 100 ad 273. Ponatur 1 R pro ſumma extremorum, & ſumatur 100 prior terminus rationis datæ pro medio. Ergo multiplicando ſummam extremorum 1 R per medium 100. habebis 100 R pro quadratis ſecundi & quarti, quibus ſi addas duplum quadratum medii, fiet quadratum ſummæ ſecundi & quarti 100 R † 20000. Aliunde ſi ex quadrato ſummæ extremorum 1 Q tollas quadratum medii reſtabit 1 Q - 10000 pro aggregato quadratorum ab iis qui ſunt in locis imparibus. Igitur 100 R † 20000 ad 1 Q - 10000 eſt in ratione data 100 ad 273. Et ſic productus ſub extremis 27300 R † 5460000 æqualis erit producto ſub mediis 100 Q - 1000000. Ergo poſt debitam reductionem & diuiſionem 1 Q æquabitur 273 R † 64600. Et fit 1 R, ſiue ſumma extremorum 425. Singulique ſunt. 25. 50. 100. 200. 400. *Lem. 24* *Lem. 3.* *Lem. 4.* *Lem 6*

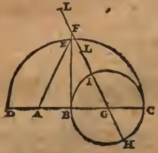
Hinc Canon.

MVltiplica poſteriorem terminum proportionis datæ per priorem, & duplum producti adde quadrato prioris termini: hoc aggregatum iunge cum quadrato quod fit à dimidio poſterioris termini: huius

enim ſummæ radix quadrata ſupradicto addita dimidio, exhibebit ſummam extremorum, priori termino rationis, exiſtente medio quæſitorum. Vnde ſinguli non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data ratio A B ad B C. Sumpta A D æquali A B, ſupra totam D C fiat ſemicirculus, erectaque D E perpendiculariter ad diametrum nectatur A E, & accipiatur B F æqualis ipſi A E. Tùm fiat circulus integer ſupra B C, cuius centrum ſit G, connexaque & producta F G ſecet circuli peripheriam in punctis H & I.



Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes, ſiquidem cum D B
8 ſexti. ſit dupla A B, duplum producti ſub terminis erit re-
4 ſexti ctangulum D B C, hoc eſt quadratum B E, cui ſi addas
17. ſexti. quadratum A B, fiet quadratum A E, hoc eſt B F.
47. primi. Hoc autem quadratum B F iunctum quadrato B G, facit quadratum F G, cuius latus F G additum G H exhibet F H.

Dico autem lineam F H fore ſummam extremarum, priore termino rationis A B exiſtente media. Sit enim, ſi fieri poteſt, ſumma extremarum maior vel minor F H, & æqualis H L. Igitur rectangulum ſub media
1 ſecundi. A B in ſummam extremarum H L æquabitur quadratis
17. ſexti. ſecundæ & quartæ; ſed vt A B ad B C hoc eſt I H, ita
1. ſexti. eſt propter eandem altitudinem rectangulum ſub A B in L H ad rectangulum L H I. Et eſt etiam vt A B
1 ſexti. ad B C; ita quadratum A B ad rectangulum A B C; ſiue, ita duplum quadratum A B ad duplum rectangulum

lum A B C, hoc eſt, ad rectangulum D B C, hoc eſt quadratum B E. Ergo componendo antecedentia ex vna parte, & conſequentia ex alia, erit vt A B ad B C; ita rectangulum ſub A B in L H plus duplo quadrato mediæ A B ad rectangulum L H I plus quadrato B E. Sed rectangulum ſub media A B in ſummam extremarum (quod iam eſt oſtenſum æquale quadratis ſecundæ & quartæ) plus duplo quadrato mediæ A B æquatur quadrato ſummæ earum quæ ſunt in locis paribus. Igitur vt A B ad B C; ita quadratum ſummæ earum quæ ſunt in locis paribus ad rectangulum L H I plus quadrato B E. *17. ſexti.* *4 ſecundi.*

Sed iubetur eſſe vt A B ad B C; ſic quadratum ſummæ earum ſunt in locis paribus ad quadrata earum quæ in imparibus. Ergo rectangulum L H I plus quadrato B E eſt æquale quadratis earum quæ ſunt in imparibus locis. Sed quadratum B F, hoc eſt A E æquatur quadrato B E plus quadrato mediæ A B. Igitur rectangulum L H I plus quadrato B F eſt æquale quadratis extremarum plus duplo mediæ A B quadrato, proindeque rectangulum L H I plus quadrato B F æquatur quadrato ſummę extremarum H L. Sed quadratum H L eſt æquale rectangulis L H I & H L I. Ergo rectangula L H I & H L I æquantur rectangulo L H I & quadrato B F. Et dempto communi rectangulo L H I, reſtabit rectangulum H L I æquale quadrato B F. Sed linea B F eſt perpendicularis ad extremitatem diametri. Ergo tangens. Igitur rectangulum H F I, æquabitur quadrato B F. Proindeque rectangulum H F I, erit æquale rectangulo H L I pars toti, aut totum parti; quod eſt abſurdum. Itaque ſumma extremarum non poteſt eſſe maior nec minor H F. Ergo erit illi æqualis. Quod erat demonſtrandum. *9 quinti.* *4. ſecundi.* *17. ſexti.* *1. ſecundi.* *16. tertii.* *36. tertii.*

PROPOSITIO XXXVI.

Idem problema alio modo perficere.

ESto data ratio 5 ad 8. Ponatur 1 R pro ſumma extremorum, & ſumatur poſterior terminus rationis 8 pro medio. Ergo productus ſub ſumma extremorum
Lem. 24. 1 R in medium 8, nempe 8 R, æquatur quadratis ſecundi & quarti, quibus ſi addas duplum quadratum medii,
Lem. 5. Lem. 6. habebis 8 R † 128 pro quadrato ſummæ ſecundi & quarti. Et quia quadratum ſummæ extremorum multatum quadrato medii exhibet quadrata eorum qui ſunt in locis imparibus, erit 1 Q - 64 æquale illis quadratis. Igitur 8 R † 128 ad 1 Q - 64 eſt in ratione data 5 ad 8. Et
Lem. 6. proinde productus ſub extremis 64 R † 1024 æquatur producto ſub mediis 5 Q - 320. Ergo poſt debitam reductionem & diuiſionem 1 Q erit æquale $\frac{64\ R\ †\ 1344}{5}$.
Et fit 1 R, ſiue ſumma extremorum 24. Igitur ſinguli erunt 12 - ℞ 80 | ℞ 80 - 4 | 8 | ℞ 80 † 4 | 12 † ℞ 80.

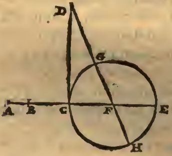
Hinc Canon.

DVplum cubum poſterioris termini iunge cum ſolido ſub quadrato poſterioris termini in priorem: ſummam inde natam diuide per priorem, & quotientem ſerua. Tum quadrata poſterioris termini diuide per priorem, & huius quotientis cape dimidium, cuius quadrato adde quotientem ſupra ſeruatum: iſtius enim ſummæ radix quadrata ſupradicto addita dimidio, exhibet ſummam extremorum, poſteriore termino rationis exiſtente medio. Vnde ſinguli non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data ratio A B ad B C. Fiat vt A B ad A C plus B C; ita quadratum B C ad quadratum C D. Tùm fiat quoque vt A B ad B C; ita B C ad C E. Diuiſaque C E bifariam in F, centro F, interuallo F C vel F E, deſcribatur circulus poſitaque C D perpendiculari ad C E, nectatur D F, & producta ſecet peripheriam in punctis G & H.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes; nam ſolidum ſub quadrato B C in lineam A C plus B C æquatur duplo cubo poſterioris termini plus ſolido ſub quadrato poſterioris in priorem terminum; cum autem fiat vt A B ad A C plus B C; ita quadratum B C ad quadratum C D erit ſolidum rectangulum ſub quadrato B C in A C plus B C, æquale ſolido rectangulo ſub quadrato C D in lineam A B. Ergo duplus cubus B C iunctus cum ſolido ſub quadrato B C in lineam A B diuiditur per lineam A B, & fit quadratum C D pro quotiente Geometrico. Cum verò tres illæ lineæ A B, B C, C E ſint continuè proportionales, erit quadratum mediæ æquale rectangulo ſub extremis; ac proinde quadratum mediæ diuiditur per vnam extremam A B, & fit altera extrema C E. Cuius dimidium eſt C F. Quadratum autem C F additur quadrato C D, & fit quadratum D F, cuius latus D F additum F H, exhibet D H. 14. vndec.



Dico verò lineam D H fore ſummam extremarum, poſteriori termino rationis B C exiſtente media. Nam cum tres illæ A B, B C, C E ſint proportionales, cumque

ſit vt A B ad A C plus B C; ita quadratum B C ad quadratum C D, erit etiam vt B C ad B E plus C E; ita quadratum B C ad quadratum C D. Sed vt B C ad B E
1 ſexti. plus C E, ita eſt propter eamdem altitudinem quadratum B C ad rectangulum ſub B C in B E plus C E. Ergo vt quadratum B C ad quadratum C D, ita quadratum B C ad rectangulum ſub B C in B E plus C E. Igitur quadra-
9 quinti tum C D eſt æquale rectangulo ſub B C in B E plus C E. atqui iſtud rectangulum æquatur quadrato B C plus du-
1. ſecundi plo rectangulo B C E; igitur quadratum C D eſt ęquale quadrato mediæ B C plus duplo rectangulo B C E. Ac proinde per præcedentem Propoſit. erit linea D H ſumma extremarum. Quod erat demonſtrandum.

Appendix.

POtuit poni 1 R in operatione Algebrica pro medio, & ſumi alter terminus rationis pro ſumma extremorum. Item poni potuit 1 R pro ſumma eorum qui ſunt in locis imparibus, & alter terminus rationis pro ſumma extremorum aut pro medio. Item potuit poni 1 R pro ſumma extremorum, aut medio, & ſumi alter terminus pro ſumma eorum qui ſunt in locis imparibus. Vnde multi Canones & Effectiones Geometricæ oriretur.

Patet deinde quomodo inueniri poſſint quinque quantitates continuè proportionales data quacumque ſumma vel differentia earum, cum prædicta quadratorum ratione, fiat enim vt ſumma vel differentia homologa ex inuentis ad ſingulas inuentas, ſic data ſumma vel differentia ad alias, & habebitur propoſitum.

Patet tertiò quomodo inueniri poſſint quinque proportionales in data ratione quadratorum à ſingulis plus duplo mediæ quadrato ad quadrata earum quæ ſunt in locis imparibus vel ad quadratum ſummæ earum quę in

paribus: nam diuidendo, erit quoque data ratio quæ hic datur.

Patet denique quomodo reperiantur quinque proportionales in data ratione quam habet interuallum quadrati ſummæ earum quæ ſunt in locis paribus, & quadratorum ab iis quæ ſunt in imparibus ad quadrata primæ, tertiæ, & quintæ. Nam componendo erit etiam data ratio quæ hic datur Lubet etiã hic adnotare quomodo ſolui poſſit problema quod huc remiſimus ex Appendice Propoſ. Data ſumma ſecundæ & quartæ ex quinque quantitatibus continuè proportionalibus, & aggregato quadratorum ab iis quæ in imparibus, inuenire ſingulas. Nam illis datis, datur quoque ratio quadrati quod fit à ſumma ſecundæ & quartæ ad quadrata earum quæ ſunt in locis imparibus. Si autem illud problema directe quis tentare vellet data ſumma ſecundi & quarti 10. Et aggregato quadratorum ab iis qui ſunt in locis imparibus 273. Solueret quidem numericè ſed non Geometricè. Nam ponendo 1 R pro medio, haberentur 100 - 2 Q pro *Lem. 3.*
quadratis ſecundi & quarti, quæ diuiſa per medium, *Lem. 6.*
nempe 1 R, exhibebunt $\frac{100 - 2\,Q}{1\,K}$ pro ſumma extremo- *Lem. 24.*
rum, ex cuius quadrato ſi tollas quadratum medii 1 Q, reſiduum $\frac{10000 + 3\,QQ - 400\,Q}{1\,Q}$ æquale erit dato aggregato *Lem. 3. Lem. 6.*
quadratorum 273. Ergo 1 R ſiue medius eſt 4. Hinc quidem facile poteſt elici Canon, ſed non Effectio Geometrica. Quare operandum potius vt in præſenti vel præcedenti Propoſitione.

PROPOSITIO XXXVII.

Data ratione quadrati mediæ ex quinque proportionalibus quantitatibus ad quadrata reliquarum, inuenire ſingulas.

ESto data ratio 16 ad 325. Ponatur 1 R pro ſumma extremorum. Et ſumpto priori termino rationis 16
Lem. 24. pro medio, multiplica 1 R per 16 habebiſque 16 R pro quadratis ſecundi & quarti. Similiter quadratum ſum-
Lem. 5. Lem. 6. mæ extremorum 1 Q multatum duplo quadrati medii 512, exhibebit quadrata extremorum 1 Q - 512. Quare ſi 1 Q - 512 addas cum 16 R, fient quadrata primi, ſecundi, quarti, & quinti 16 R + 1 Q - 512. Ergo 256 ad 16 R + 1 Q - 512 erit in ratione data 16 ad 325. Et ita
Lem. 6 productus ſub extremis 83400 æqualis eſt producto ſub mediis 256 R + 16 Q - 8192. Ergo 1 Q æquabitur 5712 - 15 R. Et proinde 1 R, ſiue ſumma extremorum eſt 68. Singuli igitur erunt 4. 8. 16. 32. 64.

Hinc Canon.

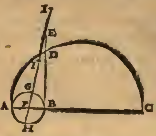
PRoducto terminorum proportionis datæ adde duplum quadratum prioris termini: aggregato huic iunge quadratum quod fit à dimidio eiuſdem termini prioris; iſtius enim ſummæ radix quadrata ſupradicto multata dimidio exhibebit ſummam extremorum, priore termino rationis exiſtente medio. Vnde ſinguli non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data ratio A B ad B C. Coniunctis illis in directum, erigatur B D perpendiculariter & producatur

vltra peripheriam circuli facti ſupra A C, donec linea B E poſſit quadratum B D plus duplo quadrati A B. Tùm diuiſa A B bifariam in F, centro F, interuallo F A, vel F B, fiat circulus integer, ductaque & producta E F ſecet eius peripheriam in punctis G & H.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes, ſquidem rectangulum ſub terminis rationis A B C, hoc eſt quadratum B D additur duplo quadrati A B, & fit quadratum B E, quod additur *47 primi.*
ad quadratum B F, & fit quadratum F E, cuius latus F E multatũ ipſa F G, exhibet G E.



Dico autem lineam G E fore ſummam extremarum priori termino rationis A B exiſtente media. Sit enim, ſi fieri poteſt ſumma extremarum maior vel minor G E & ęqualis G I. Ergo H I G rectangulum ſub ſumma earum quæ ſunt in locis imparibus in ſummam extremarum æquabitur quadrato *3. ſecundi.*
ſummæ extremarum G I, plus rectangulo H G I ſub media in ſummam extremarum; (quod rectangulum *1 ſecundi.*
pridem probatum eſt æquari quadratis ſecundæ & quartæ) ſed quadratum ſummæ extremarum G I eſt ęquale *17. ſexti.* *4 ſecundi.*
quadratis extremarum plus duplo medię quadrato. Igitur rectangulum H G I ęquabitur quadratis ſingularum *17 ſexti.*
plus quadrato mediæ. Atqui eſt vt A B ab B C; ita quadratum mediæ A B ad quadratum B D; itemque eſt vt *8 ſexti.* *4. ſexti.*
A B ad B C; ita quadratum mediæ A B ad quadrata *20. ſexti*
primæ, ſecundæ, quartæ, quintæ, hoc enim poſtulatur in problemate. Ergo vt quadratum A B ad quadratum B D; ita quadratum A B ad aggregatum quadratorum primæ, ſecundæ, quartæ & quintæ. Proindeq; quadratum *9. quinti.*
B D eſt æquale quadratis primæ, ſecundæ, quartæ & quintæ.

Ex conſtr. Sed linea B E poteſt quadratum B D plus duplo mediæ A B quadrato. Igitur quadratum B E ęquatur quadratis ſingularum plus quadrato mediæ. Igitur cum iam oſtenſum ſit üſdem æquali rectangulum H I G, erit rectangulum H I G æquale quadrato B E. Sed linea B E eſt perpendicularis ad extremitatem diametri. Ergo
16 tertii tangens. Ergo quadratum B E æquatur rectangulo
36 tertii. H E G, igitur rectangulum H E G æquale eſt rectangulo H I G pars toti vel totum parti, quod eſt abſurdum. Itaque ſumma extremarum non poteſt eſſe maior nec minor G E. Ergo erit illi æqualis. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

SI fuerint quinque continuè proportionales quantitates, quadratum ſummę extremarum, quadrata omnium plus quadrato medię, itemque quadrata extremarum plus duplo quadratorum ſecundæ & quartæ plus triplo quadrato mediæ, ſunt in continua proportione.
36. tertii. 17. ſexti. 20. ſexti. Eſt enim vt G E ad B E; ita B E ad H E. Ergo earum quadrata erunt quoque proportionalia.

PROPOSITIO XXXVIII.

Hoc idem problema alio modo ſoluere.

SIt data ratio 1 ad 10. Ponatur 1 R pro ſumma extremorum & ſumatur 10 poſterior terminus rationis pro
Lem. 24. medio. Ergo multiplicando 10 in 1 R fiet productus 10 R æqualis quadratis ſecundi & quarti. Similiter
Lem 3. Lem. 6. 1 Q - 200 æquabitur quadratis extremorum. Ergo colligendo illa duo, fiet ſumma quadratorum primi, ſecundi, quarti & quinti 10 R † 1 Q - 200. Et proinde 100 ad 10 R † 1 Q 200 eſt in data ratione 1 ad 10. Igi-
Lem. 6. tur productus ſub extremis 1000 ęquabitur producto ſub

ſub mediis 10 R † 1 Q - 200. Ac proinde poſt debitam reductionem 1 Q æquabitur 1200 - 10 R. Et fit 1 R ſiue ſumma extremorum 30 medio exiſtentę poſteriore termino rationis 10. Vnde ſinguli erunt. 15 - ℞ 125 | ℞ 125 - 5 | 10 | ℞ 125 † 5 | 15 † ℞ 125.

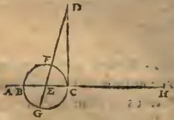
Hinc Canon.

CVbum poſterioris termini iunge cum duplo ſolido ſub quadrato poſterioris termini in priorem; ſummam iſtam diuide per priorem & quotientem adde quadrato quod fit à dimidio poſterioris termini: huius enim aggregati radix quadrata eodem multata dimidio, exhibebit ſummam extremorum, poſteriore termino rationis, exiſtente medio. Vnde ſinguli non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data ratio A B ad B C. Fiat vt A B ad A C plus A B; ita quadratum B C ad quadratum C D, ponaturque linea C D perpendicularis ad B C. Tùm diuiſa B C bifariam in E, centro E, interuallo E B, vel E C, deſcribatur circulus, connexaque & producta D E ſecet peripheriam in punctis F, & G.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes, ſiquidem rectangulum ſolidum ſub quadrato B C in compoſitam ex A C & A B æquatur cubo B C plus duplo ſolido ex quadrato B C in A B, cum autem ſit factum vt A B ad A C plus A B; ita quadratum B C ad quadratum C D, rectangulum ſolidum ſub quadrato B C in compoſitam ex A C & A B, æquabitur ſolido rectangulo ſub quadrato C D in lineam 14. unde?



A B. Ac proinde ſolidum rectangulum ſub quadrato B C in lineam compoſitam ex A C & A B diuiditur per lineam A B & fit quadratum C D pro quotiente Geometrico. Quadratum autem C D additur quadrato C E, & fit quadratum D E, cuius latus D E multatum E F exhibet F D.

Dico autem lineam F D fore ſummam extremarum poſteriore termino rationis B C exiſtente media quæſitarum. Fiat enim vt A B ad B C; ita B C ad C H, ergo erit etiam vt A B ad compoſitam ex A B & A C; ita B C ad compoſitam ex B C & B H. Igitur cum ſit vt A B ad compoſitam ex A B & A C; ita quadratum B C ad quadratum C D; erit quoque vt B C ad compoſitam ex B C & B H; ſic quadratum B C ad quadratum C D. Sed vt B C ad compoſitam ex B C & B H; ita *1. ſexti.* eſt quadratum B C ad rectangulum ſub B C in compoſitam ex B C & B H. Igitur vt quadratum B C ad quadratum C D; ita quadratum B C ad rectangulum ſub B C in compoſitam ex B C & B H. Proindeque qua- *9. quinti.* dratum C D æquabitur rectangulo ſub B C in compoſitam ex B C & B H. Atqui rectangulum ſub B C in com- *1. ſecundi.* poſitam ex B C & B H æquale eſt duplo quadrato B C & rectangulo B C H. Ergo quadratum C D æquatur duplo quadrato B C & rectangulo B C H. Igitur per præcedentem Propoſ. media quæſitarum exiſtente B C, erit ſumma extremarum F D. Quod erat demonſtrandum.

Appendix.

POtuit poni 1 R pro medio, & ſumi alter terminus rationis pro ſumma extremorum aut pro ſumma eorum qui ſunt in locis imparibus. Item potuit poni 1 R pro ſumma eorum qui ſunt in locis imparibus & ſumi alter terminus rationis pro medio aut pro ſumma extremorum. Item potuit poni 1 R pro ſumma extremorum & ſumi alter rationis terminus pro ſumma eo-

rum qui ſunt in locis imparibus. Vnde multi Canones & Effectiones Geometricæ orirentur.

Patet deinde quomodo inueniri poſſint quinque quantitates proportionales data quacumque ſumma vel differentia illarum cum ratione quadrati mediæ ad quadrata reliquarum.

Patet tertiò qua ratione inueniantur quinque proportionales data ratione quadratorum à ſingulis ad quadrata primæ, ſecundæ, quartæ & quintæ.

Patet denique quomodo inueniri poſſint quinque proportionales in data ratione quadrati medii ad interuallum quo quadratum mediæ ſuperatur à quadratis reliquarum. Nam componendo & per conuerſionem rationis, erit quoque data ratio, quę hic datur.

PROPOSITIO XXXIX.

Data proportione quadrati mediæ ad interuallum quo quadrata extremarum ſuperant quadrata ſecundæ & quartæ, inuenire quinque quantitates continue proportionales.

ESto data ratio 1 ad 4. Ponatur 1 R pro ſumma extremorum, & ſumpto priori termino rationis 1 pro medio, multiplica 1 R per 1 & habebis 1 R pro quadratis ſecundi & quarti. Si verò ex quadrato ſummæ extremorum 1 R tollas duplum quadratum medii, reſiduum 1 Q - 2 æquabitur quadratis extremorum. Inde igitur tolle quadrata ſecundi & quarti 1 R, & reſtabit 1 Q - 2 - 1 R pro interuallo quo quadrata extremorum ſuperant quadrata ſecundi & quarti. Et propterea 1 ad 1 Q - 2 - 1 R erit in ratione data 1 ad 4. Ergo productus ſub extremis 4. æquatur producto ſub mediis 1 Q - 2 - 1 R. Et proinde 1 Q eſt æquale 6 + 1 R. Ergo 1 R ſiue ſum-

Lem. 24.
Lem. 3.
Lem. 6.
Lem. 5.

ma extremorum erit 3. Eruntque ſinguli $\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}} \mid \sqrt{\frac{5}{4}} - \frac{1}{2} \mid 1 \mid \sqrt{\frac{5}{4}} + \frac{1}{2} \mid \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}$.

Hinc Canon.

PRoducto ex multicatione terminorum proportionis datæ, adde duplum quadratum prioris termini: huic aggregato iunge quadratum quod fit à dimidio eiuſdem termini prioris; iſtius enim ſummæ radix quadrata ſupradicto addita dimidio exhibebit ſummam extremorum, priori termino rationis; exiſtente medio quæſitorum. Vnde ſinguli non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt in figura Propoſ. 37. ratio data A B ad B C. Fiant omnia vt illic ordinatum fuit.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes, & fieri E H.

Dico autem lineam E H fore ſummam extremarum, exiſtente A B media. Sit enim, ſi fieri poteſt, ſumma extremarum maior vel minor E H, & æqualis H I, ergo
1. ſecundi. rectangulum I H G ſub ſumma extremarum in me-
17. ſexti. diam æquatur quadratis ſecundæ & quartæ. Sed qua-
4. ſecundi. dratum ſummæ extremarum H I quod æquatur qua-
17. ſexti. dratis extremarum plus duplo mediæ quadrato, eſt etiam æquale duobus rectangulis I H G & H I G. Ergo rectangulum H I G æquatur duplo quadrati mediæ plus interuallo quo quadrata extremarum ſuperant quadrata ſecundæ & quartæ. Atqui eſt vt A B ad B C; ita quadratum mediȩ A B ad illud interuallum ex hypo-
8. ſexti. theſi, & eſt etiam vt A B ad B C; ita idem quadratum
4. ſexti. A B ad quadratum B D.
20. ſexti.

Igitur vt quadratum A B ad illud interuallum; ita

quadratum A B ad quadratum B D. Igitur quadratum B D erit ęquale illi interuallo. Ergo quadratum B E, erit ęquale illi interuallo plus duplo quadrato mediæ, proindeque cum iiſdem æquatur rectangulum H I G, vt iam probatum eſt, ſequitur rectangulum H I G æquari quadrato B E. Sed linea B E eſt perpendicularis ad extremitatem diametri. Ergo tangens. Igitur quadratum B E æquale eſt rectangulo H E G. Et proinde rectangulum H E G æquabitur rectangulo H I G, pars toti vel totum parti. Quod eſt abſurdum. Itaque ſumma extremarum non erit maior nec minor H E. Ergo erit illi ęqualis. Quod erat demonſtrandum. *9. quinti.* *16. tertii.* *36. tertii.*

Corollarium.

SI fuerint quinque quantitates continuè proportionales, quadratum ſummę extremarum, duplum quadratum mediæ plus interuallo quo quadrata extremarum ſuperant quadrata ſecundę & quartę, itemque quadratum interualli ſummæ extremarum & medię ſunt in continua proportione: nam lineæ H E, B E, G E, ſunt continuè proportionales. Ergo & earum quadrata.

PROPOSITIO XL.

Hoc idem problema alio modo perficere.

ESto data eadem ratio 1 ad 4. Ponatur 1 R pro ſumma extremorum. Et ſumatur poſterior terminus rationis 4. pro medio. Ergo ducendo 1 R in 4 fient 4 R pro quadratis ſecundi & quarti. Similiter quadratum ſummę extremorum multatum duplo quadrati medii exhibebit 1 Q - 32 pro quadratis extremorum. Itaque ſi ab 1 Q - 32 tollas 4 R, reſiduum 1 Q - 32 - 4 R erit æquale interuallo quo quadrata extremorum ſuperant quadrata ſecundi & quarti. Quapropter 16 ad *24. lem.* *5. lem.* *6. lem.*

1 Q - 32 - 4 R erit in ratione data 1 ad 4. Ergo productus um. 6. ſub extremis 64 æquabitur producto ſub mediis 1 Q - 32 - 4 R. Igitur poſt debitam reductionem 1 Q æquale erit 96 † 4 R. Et fit 1 R ſiue ſumma extremorum 12, medio exiſtente poſteriori termino rationis. Et ſic ſinguli erunt 6 - ℞ 20 | ℞ 20 - 2 | 4 | ℞ 20 † 2 | 6 † ℞ 20.

Hinc Canon.

DVplum ſolidum ſub quadrato poſterioris termini rationis datę in priorem iunge cum cubo poſterioris termini: ſummam inde natam diuide per priorem, & quotientem adde quadrato quod fit à dimidio poſterioris termini: huius enim aggregati radix quadrata eidem addita dimidio exhibebit ſummam extremorum poſteriore termino rationis, exiſtente medio quęſitorum. Vnde ſinguli non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

REſumatur figura Propoſ. 38. Et data ratione A B ad B C, fiant omnia, ſicut illic imperatum eſt fieri.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis partes, & fieri D H.

Dico autem lineam D H fore ſummam extremarum, poſteriore termino rationis B C, exiſtente media quęſitarum. Sumpta enim duabus A B, & B C, tertia proportionali C H, erit vt A B ad compoſitam ex A B & A C; ita B C ad compoſitam ex B C & B H. Ergo vt B C ad compoſitam ex B C & B H; ita quadratum B C ad quadratum C D. Et propterea quadratum C D ęquabitur duplo quadrato B C plus rectangulo B C H. Igitur per pręcedentem, B C exiſtente media, erit D H ſumma extremarum. Quod erat demonſtrandum.

Appendix.

EX his patet multis aliis modis inueniri poſſe Canones & Effectiones Geometricas, vt in pręcedentibus. Patet deinde data quacumque ſumma vel differentia quantitatum ex quinque proportionalibus cum prædicta planorum ratione inueniri poſſe ſingulas. Patet denique quomodo vel diuidendo vel componendo poſſit reperiri ſolutio duorum aliorum problematum vt in præced. Appendicibus dictum eſt.

PROPOSITIO XLI.

Data proportione quadratorum à ſingulis ad quadratum ſummæ earum quæ ſunt in locis paribus, inuenire quinque quantitates continue proportionales.

ESto data ratio 11 ad 5. Ponatur 1 R pro ſumma extremorum, & ſumpto poſteriori termino rationis 5 pro medio quęſitorum, multiplica 1 R per 5, habebiſque 5 R pro quadratis ſecundi & quarti, quibus ſi addas du- *Lem. 14.*
plum quadrati medii nempe 50. fient 5 R † 50 pro *Lem. 3.*
quadrato ſummæ ſecundi & quarti. Similiter inueſti- *Lem. 6.*
gabis & compones aggregatum quadratorum à ſingulis: quadratum enim ſummę extremorum multatum quadrato medii exhibet quadrata eorum qui ſunt in locis imparibus 1 Q - 25 quibus adde quadrata ſecundi & quarti iam inuenta 5 R, fiet aggregatum quadratorum à ſingulis 1 Q - 25 † 5 R. Igitur 1 Q - 25 † 5 R ad 5 R † 50 eſt in ratione data 11 ad 5. Et ita productus ſub extremis 5 Q - 125 † 25 R æquatur producto ſub mediis *Lem. 6.*
55 R † 550: igitur poſt debitam reductionem & diuiſionem 1 Q eſt ęquale 6 R - 135. Et fit 1 R ſiue ſumma ex-

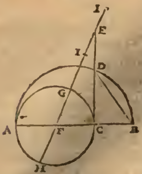
tremorum 15. Singulique $\frac{15}{2} - \text{℞}\,\frac{125}{4} \mid \text{℞}\,\frac{125}{4} - \frac{5}{2} \mid 5 \mid \text{℞}\,\frac{125}{4} + \frac{5}{2} \mid \frac{15}{2} + \text{℞}\,\frac{125}{4}$.

Hinc Canon.

DVplum producti ſub terminis proportionis datæ adde quadrato poſterioris termini, hanc ſummam iunge quadrato quod fit à dimidia terminorum differentia: huius enim aggregati radix quadrata dimidiæ addita terminorum differentiæ exhibet ſummam extremorum, poſteriore termino rationis exiſtente medio quæſitorum. Vnde ſinguli non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data ratio A B ad B C. Supra A B fiat ſemicirculus, erectaque perpendicularis C D producatur vltra peripheriam donec linea C E poſſit duplum quadratum B D plus quadrato C B. Tùm facto ſupra A C circulo integro cuius centrum F, connexa & producta E F ſecet peripheriam in punctis G & H.



Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes, ſiquidem quadratum

8. ſexti.
4. ſexti.
37. ſexti.

B D æquatur rectangulo ſub terminis proportionis comprehenſo A B C, cuius duplum additur quadrato poſterioris termini B C, & fit quadratum C E, quod iungitur quadrato F C dimidiæ terminorum differentiæ, & fit quadratum F E; cuius latus F E additum F H, exhibet H E.

Dico autem lineam H E fore ſummam extremarum poſte-

poſteriore termino rationis B C exiſtente media. Sit
enim, ſi fieri poteſt, ſumma extremarum maior vel mi-
nor H E, & æqualis H I. Quoniam ergo H G eſt æ- *9. quinti.*
qualis A C, erit vt A C ad C B; ita H G ad C B. *1. ſexti.*
Sed vt H G ad C B; ita propter eandem altitudinem
rectangulum I H G ad rectangulum ſub ſumma extre-
marum I H in mediam C B, hoc eſt ad quadrata ſecundæ *1. ſecundi.*
& quartæ. Item vt A C ad C B; ita quadratum C B *17. ſexti.*
ſimplum vel duplum ad quadratum C B ſimplum vel *8. ſexti.* *4. ſexti.*
duplum. Ergo componendo antecedentia ex vna parte *10. ſexti.*
& conſequentia ex altera, erit vt A C ad C B; ita re-
ctangulum I H G plus duplo quadrato C D ad rectan- *12. quinti.*
gulum ſub H I & C B plus duplo quadrato C B, hoc *4. ſecundi.*
eſt ad quadratum ſummæ earum quæ ſunt in locis pa- *17. ſexti.*
ribus.

Sed quia vt A B ad B C; ita quadrata ſingularum ad
quadratum aggregati ſecundæ & quartæ; erit diuiden-
do, vt A C ad C B, ita quadrata extremarum multata
quadrato mediæ ad quadratum aggregati ſecundæ &
quartæ. Ergo erit vt rectangulum I H G plus duplo
quadrato C D ad quadratum aggregati ſecundæ & quar-
tæ; ſic quadrata extremarum multata quadrato mediæ
ad idem quadratum aggregati ſecundæ & quartæ. Et
propterea rectangulum I H G plus duplo quadrato C D *9. quinti.*
erit æquale quadratis extremarum multatis quadrato
mediæ, ſed quadratum ſummæ extremarum H I, quod *1. ſecundi.* *17. ſexti.*
eſt æquale quadratis extremarum plus duplo mediæ *1. ſecundi.*
quadrato, æquatur etiam duobus rectangulis I H G &
H I G. Igitur rectangulum H I G eſt æquale triplo qua-
drati mediæ B C plus duplo quadrato C D, hoc eſt duplo *47. primi.*
quadrato B D plus quadrato B C. Proindeque rectan- *Ex conſtr.*
gulum H I G æquatur quadrato C E. Atqui linea C E *16. tertij.*
eſt perpendicularis ad extremitatem diametri. Ergo *36. tertij.*
tangens. Ergo quadratum C E eſt æquale rectangulo
H E G. Igitur rectangulum H E G æquabitur rectan-
gulo H I G pars toti vel totum parti, quod eſt abſur-

dum. Proindeque ſumma extremarum non poteſt eſſe maior nec minor HE. Ergo erit illi æqualis. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XLII.

Hoc idem problema alio modo perficere.

Data eadem ratione 11 ad 5. Ponatur 1 R pro quadratis ſingulorum, & ſumatur 5 poſterior terminus rationis pro ſumma ſecundi & quarti. Ergo 1 R ad 25 eſt in ratione data 11 ad 5. Igitur productus ſub extremis 5 R æquatur producto ſub mediis 275. Et fit 1 R,
Lem. 6. ſiue aggregatum quadratorum à ſingulis 55. Data autem ſumma ſecundę & quartæ 5. & aggregato quadratorum à ſingulis 55, inueniuntur ſinguli per Propoſ. 12. huius. Eruntque $\sqrt{\frac{45}{4}} - \frac{5}{2} \mid \frac{5}{2} - \sqrt{\frac{45}{4}} \mid \sqrt{5} \mid \frac{5}{2} - \sqrt{\frac{45}{4}} \mid \sqrt{\frac{45}{4}} + \frac{5}{2}$.

Aliter, ponatur 1 R pro ſumma eorum qui ſunt in locis imparibus, & ſumatur poſterior terminus rationis 5 pro ſumma ſecundi & quarti. Igitur ſumma omnium erit 1 R † 5 ex cuius quadrato 1 Q † 25 † 10 R ſi tollas duplum producti ſub ſumma omnium in ſummam ſecundi & quarti, nempe 10 R † 50. Reſiduum 1 Q - 25 æquale erit quadratis ſingulorum. Et proinde 1 Q - 25 ad 25 erit in ratione data 11 ad 5. Igitur productus ſub
Lem. 6. extremis 5 Q - 125 æquatur producto ſub mediis 275. Et fit 1 Q, 80. Et 1 R ſiue ſumma eorum qui ſunt in locis imparibus $\sqrt{80}$. Vnde ſinguli cognoſcentur vt ſuprà per Propoſ. 1. huius.

Aliter, ponatur 1 R pro ſumma omnium, & ſumatur terminus rationis poſterior 5 pro ſumma ſecundi & quarti. Igitur ſi ex 1 Q ſubtrahas duplum producti ſub ſumma omnium 1 R in ſummam ſecundi & quarti 5. Quod duplum eſt 10 R, reſiduum 1 Q - 10 R eſt ęquale

quadratis ſingulorum. Proindeque 1 Q - 10 R ad 25; erit in ratione data 11 ad 5. Igitur productus ſub extremis 5 Q - 50 R æquatur producto ſub mediis 275. Et poſt debitam reductionem & diuiſionem 1 Q erit æquale 55 + 10 R. Et fit 1 R, ſiue ſumma omnium ℞ 80 + 5 vnde ſinguli erunt cogniti per Propoſ. 1. huius. *Lem. 6.*

Hinc Canon.

PRoductus ſub terminis rationis æquabitur aggregato quadratorum à ſingulis, poſteriore termino exiſtente ſumma ſecundi & quarti.

Productum ſub terminis adde quadrato poſterioris termini, & habebis quadratum ſummæ eorum qui ſunt in locis imparibus, poſteriore termino rationis exiſtente ſumma ſecundi & quarti.

Quadratum poſterioris termini adde producto ſub terminis rationis datæ : huius enim ſummæ radix quadrata addita poſteriori termino exhibet ſummam omnium, poſteriori termino rationis exiſtente ſumma ſecundi & quarti.

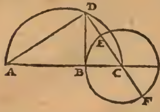
Quilibet Canon correſpondet ſuæ operationi Algebricæ.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data ratio A B ad B C. Supra A C fiat ſemicirculus, erectaque B D perpendiculari ad diametrum nectatur A D & D C. Tùm centro C, interuallo C B deſcribatur integer circulus, cuius peripheria ſecetur à linea D C producta in punctis E & F.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulos Canones, tùm quia productus ſub terminis A B C æquatur quadrato B D, tùm quia illud quadratum B D iungitur cum quadrato B C, & fit quadratum C D, tùm denique quia latus quadrati C D additur C F hoc eſt B C & fit D F. *8. ſexti. 4. ſexti. 17. ſexti. 47. primi.*

8. *ſexti.* 4. *ſexti.* 10. *ſexti* Dico autem primo quadratum B D æquari quadratis



ſingularum poſteriore termino rationis B C exiſtente ſumma ſecundæ & quartæ: eſt enim vt A B ad B C ita quadrata ſingularum ad quadratum B C, ex hypotheſi. Sed vt A B ad B C; ita quadratum B D ad quadratum B C. Igitur vt quadrata ſingularum ad quadratum B C, ita quadratum B D ad

9 *quinti.* quadratum B C. Proindeque quadratum B D æquatur quadratis ſingularum. Data autem ſumma ſecundæ & quartæ B C & linea B D potente quadrata ſingularum quinque, inueniuntur ſingulæ per Propoſ. 12. huius.

Dico ſecundo lineam C D fore ſummam earum quæ

47 *primi.* ſunt in locis imparibus: nam quadratum C D æquatur quadratis B D, B C. Ergo cum quadratum B D ſit æquale quadratis ſingularum, & B C ſit ſumma ſecundæ & quartæ, erit C D ſumma earum quæ ſunt in locis imparibus. Per Corollar. Propoſ. 11. huius.

Dico tertiò D F fore ſummam omnium. Sequitur ex præcedente: nam C F eſt æqualis C B. Igitur cum C D ſit oſtenſa æqualis ſummæ earum quæ ſunt in locis paribus & C B ſupponatur ſumma ſecundæ & quartæ. Erit D F ſumma omnium. Quod erat demonſtrandum.

Data autem ſumma omnium D F vel ſumma earum quæ ſunt in locis imparibus D C & linea B D potente quadrata ſingularum diſtinguuntur ſingulæ, per 7 & 10 Propoſ. huius.

Appendix.

POſſet plurimis aliis modis procedi in operatione Algebrica, quod iam aliquoties monuiſſe ſatis erit. Patet deinde quomodo inueniri poſſint quinque quan-

titates continue proportionales, data quacumque ſumma vel differentia illarum cum proportione prædictorum quadratorum. Si enim fiat vt ſumma vel differentia homologa ex inuentis ad ſingulas inuentas; ita ſumma vel differentia data ad alias, habebitur propoſitum.

Patet deinde quomodo inueniri poſſint quinque proportionales data ratione quadratorum à ſingulis plus quadrato aggregati ſecundæ & quartæ ad aggregatum quadratorum à ſingulis, vel ad quadratum aggregati ſecundæ & quartæ: nam diuidendo, habebitur ratio quæ hic data fuit.

Patet etiam quomodo inueniantur quinque in data ratione quadratorum à ſingulis ad quadrata extremarum multata quadrato mediæ, nam componendo, & per conuerſionem rationis, & diuidendo, habebitur ratio hic data.

Patet denique quomodo aliter ſolui poſsit problema propoſitum in Propoſ. 12. huius. Nam dato aggregato quadratotum à ſingulis, & ſumma eorum quæ ſunt in locis paribus, datur etiam ratio præſens.

PROPOSITIO XLIII.

Data ratione quadratorum à ſingulis ad quadratum ſummæ extremarum, inuenire quinque quantitates continue proportionales.

Esto data ratio 11 ad 9. Ponatur 1 R pro medio & ſumatur poſterior terminus rationis 9 pro ſumma extremorum. Ergo multiplicando ſummam extremorum 9 per medium 1 R, habebis 9 R pro quadratis ſecundi & quarti. Deinde quadratum ſummæ extremorum 81 multatum quadrato medii 1 Q exhibet 81 - 1 Q pro *Lem. 14.* *Lem. 5.* *Lem. 6.*

quadratis eorum qui ſunt in locis imparibus. Et proinde coniungendo illas ſummas quadratorum, fiet aggregatum quadratorum à ſingulis 81 - 1 Q † 9 R. Ergo 81 - 1 Q † 9 R ad 81 eſt in ratione data 11 ad 9. Igitur

Lem 6

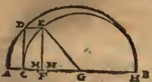
productus ſub extremis 729 - 9 Q † 81 R eſt æqualis producto ſub mediis 891. Et poſt debitam reductionem & & diuiſionem erit 1 Q æquale 9 R - $\frac{162}{9}$. Fitque 1 R ſiue medius 3. ac propterea ſinguli erunt $\frac{9}{2}$ - ℞ $\frac{45}{4}$ | ℞ $\frac{45}{4}$ - $\frac{3}{2}$ | 3 | ℞ $\frac{45}{4}$ † $\frac{3}{2}$ | $\frac{9}{2}$ † ℞ $\frac{45}{4}$.

Hinc Canon.

SOlidi ſub quadrato poſterioris termini rationis datæ in priorem, & cubi à poſteriore termino orti differentiam diuide per poſteriorem terminum: quotientem inde natum tolle ex quadrato quod fit à dimidio poſterioris terminis: huius enim reſidui radix quadrata ſupradicto detracta dimidio, exhibet medium, poſteriore termino rationis exiſtente ſumma extremorum. Vnde ſinguli non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data ratio A B ad B C. Supra A B & ſupra B C deſcribãtur duo ſemicirculi, erectaque C D perpendiculariter ad A B, ducatur D E parallela ipſi A B, & demittatur E F perpendicularis ad diametrum.



Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici

25. vndec.

partes, ſiquidem ducta E G ad G centrum poſterioris ſemicirculi, cum ſolidum ſub quadrato B C in lineam A B,

8. ſexti.

& cubus B C, habeant eandem baſim, eorum differen-

cia erit ſolidum ſub quadrato B C in lineam A C. Cum *4. ſexti.*
verò ſit vt C B ad A C; ita quadratum B C ad quadratum *20. ſexti*
C D, ſolidum rectangulum ſub quadrato B C in lineam
A C, ęquabitur ſolido rectangulo ſub quadrato C in li- *34. undec.*
neam C B. Ac propterea ſolidum rectangulum ſub qua-
drato B C in lineam A C, diuiditur per lineam B C, &
fit quadratum C D pro quotiente Geometrico. Illud
autem quadratum C D, hoc eſt E F tollitur de
quadrato E G, quod fit à dimidio poſterioris termi-
ni rationis datæ, & relinquitur quadratum F G,
cuius latus F G detractum eidem dimidio exhibet
C F.

Dico autem C F fore mediam quęſitarum, poſterio-
re termino rationis B C exiſtente ſumma extremarum.
Sit enim, ſi fieri poteſt, media maior vel minor C F, &
æqualis C H. Ergo rectangulum B C H æquabitur *1. ſecundi.*
quadratis ſecundę & quartę, & proinde rectangulum *17. ſexti.* *3. ſecundi.*
B H C erit æquale quadratis ſecundæ & quartæ multa-
tis quadrato mediæ C H. Sed quoniam eſt vt A B ad
B C; ita quadrata ſingularum ad quadratum B C, erit
diuidendo, vt A C ad C B, ita quadrata ſingularum mul-
tata quadrato ſummæ extremarum ad quadratum C B.
Sed eſt vt A C ad C B; ita quadratum C D ad quadra- *8 ſexti.*
tum C B. Igitur vt quadratum C D ad quadratum C B; *4. ſexti.* *20. ſexti.*
ita quadrata ſingularum multata quadrato ſummæ ex-
tremorum ad idem quadratum C B. Ac proinde qua-
dratum C D æquale eſt quadratis ſingularum multatis *9. quinti.*
quadrato ſummæ extremarum C B. Ergo cum quadra-
tum ſummę extremarum æquetur quadratis extremarum *4 ſecundi.*
plus duplo mediæ quadrato, erit quadratum C D æquale *17 ſexti.*
quadratis ſecundæ & quartæ multatis quadrato mediæ
C H.

Ergo quoniam iam probatum eſt iiſdem æquari re-
ctangulum C H B, erit quadratum C D hoc eſt F E æ-
quale rectangulo C H B. Sed quadratum F E æqua- *8. ſexti.*
tur rectangulo C F B. Igitur rectangulum C F B eſt *4. ſexti.* *17. ſexti.*

æquale rectangulo CHB, quod eſt abſurdum, & contra quintam ſecundi elementorum. Ergo media non poteſt eſſe maior nec minor C F. Ac proinde erit ipſi æqualis. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XLIV.

Hoc idem problema alio modo ſoluere.

Data eadem ratione 11 ad 9. Ponatur 1 R pro interuallo medii & ſummę extremorum. Et ſumatur poſterior terminus rationis pro ſumma extremorum. Igitur medius erit 9 - 1 R. Quo ducto in ſummam ex-
Lem. 4. tremorum 9, habebis productum 81 - 9 R æqualem quadratis ſecundi & quarti. Si vero ex quadrato ſummæ ex-
Lem 3. tremorum 81 tollas quadratum medii 81 † 1 Q - 18 R.
Lem. 6. Habebis reſiduum 18 R - 1 Q æquale quadratis primi, tertii, & quinti. Igitur iungendo 18 R - 1 Q cum 81 - 9 R, fiet aggregatum quadratorum à ſingulis 81 † 9 R - 1 Q. Ergo 81 † 9 R 1 Q ad 81. eſt in ratione data 11 ad 9. Et ita productus ſub extremis 729 † 81 R - 9 Q æquabitur producto ſub mediis 891. Et poſt debitam reductionem & diuiſionem 1 Q æquatur $9 R - \frac{162}{9}$. Fitque 1 R, ſiue differentia medii & ſummæ extremorum 6. quam ſi tollas ex 9. habebis medium 3. Dato autem medio 3. & ſumma extremorum 9, facile diſcernuntur ſinguli vt ſuprà factum eſt.

Hinc Canon.

Vbi à poſteriore termino rationis orti, & ſolidi ſub quadrato poſterioris termini in priorem, cape differentiam, eamque diuide per poſteriorem: quotientem inde natum tolle ex quadrato quod fit à dimidio poſterioris termini; huius enim reſidui radix quadrata ſupra-
dicto

dicto addita dimidio, exhibebit interuallum medii & ſummæ extremorum, poſteriore termino rationis exiſtente ſumma extremorum. Vnde ſinguli non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

RESumatur figura Propoſ. præced. & data eadem ratione A B ad B C, fiant omnia ſicut illic fieri imperatum fuit.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes, & fieri F B.

Dico autem lineam F B fore interuallum mediæ & ſummæ extremarum, poſteriore termino rationis exiſtente ſumma extremarum. Demonſtratio clara eſt ex dictis, nam C B exiſtente ſumma extremarum, F C eſt media ex Propoſ. præced. Ergo C B exiſtente ſumma extremarum, erit F B interuallum quo ſumma extremarum ſuperat mediam. Quod erat oſtendendum.

Appendix.

POſſet plurimis aliis modis procedi in operatione Algebrica ponendo pluries 1 R pro diuerſis numeris, & ſumendo alterum terminum rationis datæ pro aliis, vnde multi Canones & Effectiones Geometricæ orirentur.

Deinde patet quomodo data quacumque ſumma vel differentia ex quinque proportionalibus, & prædicta quadratorum ratione, inueniri poſſint ſingulæ, faciendo vt ſumma vel differentia homologa ex inuentis ad ſingulas inuentas; ita ſumma vel differentia data ad alias.

Patet denique quomodo vel componendo vel diuidendo inueniri poſsit ſolutio duorum aliorum problematum vt in ſuperioribus explicatum eſt.

PROPOSITIO XLV.

Data ratione quadratorum à ſingulis ad quadratum ſummæ earum quæ ſunt in locis imparibus, inuenire quinque quantitates continue proportionales.

ESto data ratio 11 ad 16. Ponatur 1 R pro medio & ſumatur poſterior terminus rationis 16, pro ſumma primi, tertii, & quinti. Ergo tollendo 1 R ex 16, reſtabit 16 - 1 R ſumma extremorum. Igitur multiplicando 16 - 1 R per 1 R, habebis 16 R - 1 Q pro quadratis ſe-
Lem 24. cundi & quarti. Iam autem quadratum ſummę extremorum quod eſt 256 † 1 Q - 32 R multatum quadrato
Lem. 5. medii exhibebit 256 - 32 R pro quadratis primi, tertii,
Lem. 6. & quinti. Ergo ſi addas 256 - 32 R cum 16 R - 1 Q, fiet ſumma quadratorum à ſingulis 256 - 16 R - 1 Q. Et proinde 256 - 16 R - 1 Q ad 256 eſt in ratione data 11 ad 16. Igitur productus ſub extremis 4096 - 256 R - 16 Q
Lem. 6. æquabitur producto ſub mediis 2816. Et poſt debitam reductionem & diuiſionem, 80 - 16 R æqualia erunt 1 Q. Fitque 1 R, ſiue medius 4. Quo ſublato de poſteriore termino rationis 16, reſtabit 12 pro aggregato extremorum. Ergo ſinguli erunt 6 - ℞ 20 | ℞ 20 - 2 | 4 | ℞ 20 † 2 | 6 - ℞ 20.

Hinc Canon.

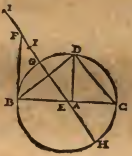
EX cubo poſterioris termini proportionis datæ tolle ſolidum ſub quadrato poſterioris termini in priorem: reſiduum diuide per poſteriorem terminum, & quotientem inde natum adde quadrato quod fit à dimidio poſterioris termini: huius enim ſummæ radix quadrata ſupradicto multata dimidio exhibet medium, poſterio-

re termino rationis exiſtente ſumma eorum qui ſunt in locis imparibus.

Hinc Effectio Geometrica.

Esto data ratio A B ad B C. Supra B C fiat circulus & erecta A D perpendiculariter ad B C, nectatur C D cui æqualis perpendiculariſque ad extremitatem diametri erigatur B F. Diuiſaque B C bifariam in E, iungatur F E, & producta ſecet peripheriam in punctis G. H.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis partes, ſiquidem cubus B C multatus ſolido rectangulo ſub quadrato B C in A B, relinquit ſolidum rectangulum ſub quadrato B C in A C. Sed tres illę lineę A C, C D, C B ſunt continuè proportionales. Ergo vt B C ad A C; ita quadratum B C ad quadratum D C. Proindeque ſolidum rectangulum ſub quadrato B C in lineam A C ęquatur ſolido rectangulo ſub quadrato D C in lineam B C. Igitur ſolidum rectangulum ſub quadrato B C in lineam A C diuiditur per lineam B C, & fit quadratum D C pro quotiente Geometrico. Quadratum autem D C, hoc eſt B F, additur quadrato B E, & fit quadratum F E, cuius latus F E multatum E G, exhibet F G.



8 *ſexti.* 4 *ſexti.* 10. *ſexti.* 34 *vndec.*

Dico autem lineam F G fore mediam ex quæſitis, poſteriore termino rationis B C exiſtente ſumma earum quæ ſunt in locis imparibus. Sit enim, ſi fieri poteſt, media, maior aut minor G F & æqualis G I. Ergo rectangulum H I G ſub media in ſummam extremarum plus dupla media ęquatur quadrato aggregati ſecundę & quartæ. Cum autem ſit vt B C ad A B, ita quadra- *Corollar. propoſ. 1. huius.*

8. ſexti. tum ſummæ earum quæ ſunt in locis imparibus B C, ad
4. ſexti quadrata ſingularum; itemque vt B C ad A B ita quadra-
20. ſexti tum idem B C ad quadratum B D; erit vt quadratum
B C ad quadrata ſingularum; ita quadratum B C
9 quinti. ad quadratum B D. Ac propterea quadratum B D æ-
quabitur quadratis ſingularum. Sed quadratum B C
47. primi æquatur quadratis B D, D C. Itemque quadratum B C
Corollar. æquatur quadrato B D (æquali quadratis ſingularum)
Prop. 10. & quadrato aggregati ſecundæ & quartæ, ergo quadra-
huius. tum C D, hoc eſt B F, eſt quadratum aggregati ſecundæ
& quartæ. Ac proinde quadratum B F æquatur rectan-
gulo H I G. Eſt autem linea B F perpendicularis
16. tertii. ad extremitatem diametri. Ergo tangens. Igitur qua-
36. tertii. dratum B F eſt ęquale rectangulo H F G. Ergo rectan-
gulum H F G æquabitur rectangulo H I G pars toti, vel totum parti, quod eſt abſurdum. Itaque media non poteſt eſſe maior nec minor F G, igitur erit illi æqualis. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XLVI.

Idem problema alio modo perficere.

Data eadem ratione 11 ad 16. Ponatur 1 R pro ſumma extremarum, & ſumatur poſterior terminus rationis 16 pro aggregato eorum qui ſunt in locis imparibus. Igitur tollendo 1 R ex 16 reſtabit medius 16 - 1 R per quem ſi multiplices ſummam extremorum
Lem. 24. 1 R, habebis 16 R - 1 Q pro quadratis eorum qui ſunt in locis paribus. At verò quadratorum ſummæ extremorum 1 Q multatum, quadrato medij quod eſt 256 † 1 Q
Lem. 3.
Lem. 6. - 32 R, exhibet 32 R - 256 pro quadratis primi, tertii & quinti, ergo ſi addas 32 R - 256 cum 16 R - 1 Q fiet ſumma quadratum à ſingulis 48 R - 256 - 1 Q. Et proinde 48 R - 256 - 1 Q ad 256 erit in ratione data 11 ad 16.
Lem. 6. Ergo productus ſub extremis 768 R - 4096 - 16 Q ęqua-

bitur producto ſub mediis 2816. Et poſt debitam reductionem & diuiſionem 1 Q eſt ęquale 48 R - 432. Fitque 1 R, ſiue ſumma extremorum 12 poſteriore termino rationis 16 exiſtente ſumma eorum qui ſunt in locis imparibus. Quare ſi ex 16 tollas 12, reſtabit medius 4. Atque ideò ſinguli erunt 6 + ℞ 20 | ℞ 20 + 2 | 4 | ℞ 20 - 2 | 6 - ℞ 20.

Hinc Canon.

CVbum poſterioris termini rationis datæ adde cum ſolido ſub quadrato poſterioris termini in priorem: hoc aggregatum diuide per poſteriorem, & quotientem inde natum tolle ex quadrato quod fit a tribus dimidiis poſterioris termini: huius enim reſidui radix quadrata detracta tribus dimidiis ſupradictis exhibebit ſummam extremorum poſteriore termino rationis exiſtente ſumma eorum qui ſunt in locis imparibus. Vnde ſinguli non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data ratio A B ad B C. Fiat vt B C ad B C plus B A; ita quadratum B C ad aliud quadratum quod ſit D E. Tum producta B C donec B F ſit æqualis tribus dimidiis ipſius B C, centro F, interuallo F B, deſcribatur circulus, ponaturque ad extremitatem diametri illius linea D E perpendicularis. Deinde ducatur E G parallela D B, donec occurrat peripheriæ in puncto G, ex quo demittatur G H perpendicularis ad diametrum.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes; ſiquidem cubus B C additus cum ſolido rectangulo ſub quadrato B C in lineam A B facit ſolidum rectangulum ſub quadrato B C in compoſitam ex B C & B A, cum autem fiat vt B C ad B C plus B A: ita quadratum B C ad quadratum D E, erit ſolidum rectangu-

34. *vndec.* lum ſub quadrato D E in lineam B C æquale ſolido ſub quadrato B C in compoſitam ex B C & B A. Et proinde ſolidum rectangulum ſub quadrato B C in compoſitam ex B C & B A diuiditur per lineam B C, & fit quadratum D E hoc eſt G H. Ducta autem F G eſt ſemidiameter proindeque æqualis tribus dimidiis B C. Et ex quadrato F G tollitur quadratum G H, reſtatque quadratum F H, cuius latus F H tollitur ex F D, & exhibetur H D.



Dico autem lineam H D fore ſummam extremarum poſteriore termino rationis exiſtente ſumma earum quę ſunt in locis imparibus. Sit enim, ſi fieri poteſt, ſumma extremarum maior aut minor H D, & æqualis D I. Ergo cum ſemediameter æqualis ſit tribus dimidiis B C, erit tota diameter B D tripla B C. Igitur cum D I ſit ſumma extremarum erit B I ęqualis duplæ B C plus media, & proinde rectangulum D I B ęquabitur duplo re-
1. *ſecundi* ctangulo ſub ſumma extremarum in ſummam earum quę ſunt in locis imparibus, plus rectangulo ſub ſumma extremarum in mediam (quod pridem oſtenſum eſt ęquale quadratis ſecundę & quartę) rectangulum verò ſub ſumma earum quæ ſunt in locis imparibus in ſummam extremarum ęquale eſt quadrato ſummæ extremarum plus rectangulo ſub ſumma extremarum in mediam. Igitur rectangulum D I B ęquale eſt quadratis ſecundæ
17. *ſexti.* & quartæ plus duplo quadrato ſummę extremarum plus
4. *ſecundi.* duplo rectangulo ſub ſumma extremarum in mediam. Hæc autem omnia ſimul ſumpta æqualia ſunt quadratis ſingularum plus quadrato ſummę earum quæ ſunt in locis imparibus. Igitur rectangulum D I B æquatur quadratis ſingularum plus quadrato ſummæ earum quæ ſunt in locis imparibus.

Sed eſt vt A B ad B C; ita quadrata ſingularum ad

quadratum ſummæ earum quæ ſunt in imparibus: igitur componendo erit vt B A plus B C ad B C; ita quadrata ſingularum plus quadrato ſummæ earum quæ in imparibus, ad quadratum ſummæ earum quæ in imparibus B C; igitur inuertendo, eſt vt B C ad B C plus B A; ita quadratum B C ad quadrata ſingularum plus quadrato ſummæ earum quæ ſunt in locis imparibus. Ergo cum factum ſit vt B C ad B C plus B A; ſic quadratum B C ad quadratum D E; erit quoque vt quadratum B C ad quadrata ſingularum plus quadrato ſummæ earum quæ ſunt in locis imparibus; ita idem quadratum B C ad quadratum D E, igitur quadratum D E eſt æquale quadratis ſingularum plus quadrato ſummæ earum linearum quæ *9. quinti.* in imparibus locis ſunt. Sed quadratum D E, hoc eſt *8 ſexti.* G H, æquatur rectangulo B H D, ergo rectangulum *4. ſexti.* B H D eſt æquale quadratis ſingularum plus quadrato *17. ſexti.* ſummę earum quę in imparibus. Sed iiſdem eſt oſtenſum æquale rectangulum B I D. Igitur rectangulum B H D æquatur rectangulo B I D. Quod eſt abſurdum, & contra quintam ſecundi. Itaque ſumma extremarum non poterit eſſe maior nec minor D H. Ergo erit illi æqualis. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

SI fuerint quinque quantitates continuè proportionales, quadratum ſummæ extremarum, quadrata ſingularum plus quadrato ſummæ earum quæ ſunt in locis imparibus, itemque quadruplum quadratum ſummæ earum quæ ſunt in locis imparibus plus triplo quadrato mediæ plus duplo quadratorum ſecundæ & quartæ, erunt in continua proportione: nam H D, H G, H B ſunt continuè proportionales, ergo & earum quadrata erunt *22. ſexti* quoque proportionalia.

PROPOSITIO XLVII.

Idem problema aliter ſoluere.

DAta eadem ratione 11 ad 16. Ponatur 1 R pro quadratis ſingulorum, & ſumatur 16 pro ſumma eorum qui ſunt in locis imparibus. Igitur erit vt 11 ad 16; Lem. 6. ita 1 R ad 256. Ergo productus ſub extremis 2816 æqualis erit producto ſub mediis 16 R. Et proinde 1 R ſiue quadrata ſingulorum ſunt 176. Vnde per Propoſ. 10. huius, erunt ſinguli 6 - ℞ 20 | ℞ 20 - 2 | 4 | ℞ 20 + 2 | 6 + ℞ 20.

Hinc Canon.

SOlidum ſub quadrato termini poſterioris in priorem rationis datæ terminum diuide per poſteriorem & habebis quadrata ſingulorum, poſteriore termino rationis exiſtente ſumma eorum qui ſunt in locis imparibus.

Vel breuius.

PRoductus ſub terminis rationis datæ erit æqualis aggregato quadratorum à ſingulis, poſteriore termino exiſtente ſumma eorum qui in imparibus.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data ratio A B ad B C. Inter A B & B C ſumatur media proportionalis B D.



Manifeſtum eſt obſeruari integrum Canonem, ſiquidem quadratum B D 17. ſexti. æquabitur rectangulo C B A.

Dico autem lineam B D poſſe quadrata ſingularum, poſteriore termino rationis B C exiſtente ſumma earum

quæ

quę ſunt in locis imparibus. Erit enim vt B A ad B C; ita quadratum B D ad quadratum B C. Sed vt B A ad B C; ita quadrata ſingularum ad quadratū B C; ergo vt quadratum B D ad quadratum B C; ita quadrata ſingularum ad quadratum B C. Et propterea quadratum B D æquatur quadratis ſingularum. Quod erat demonſtrandum. 20. ſexti. 9. quinti.

Data autem ſumma B C & linea B D potente quadrata ſingularum, inueniuntur ſingulæ per Propoſ. 10. huius.

PROPOSITIO XLVIII.

Hoc idem problema aliter ſoluere.

DAta eadem ratione 11 ad 16. Ponatur 1 R pro ſumma eorum qui ſunt in locis paribus, & ſumatur poſterior terminus rationis 16 pro ſumma eorum qui ſunt in locis imparibus ergo ſumma omnium erit 16 † 1 R ex cuius quadrato 256 † 1 Q † 32 R, ſi tollas duplum rectangulum ſub ſumma omnium in 1 R nempe 32 R † 2 Q, reſiduum 256 - 1 Q æquabitur quadratis ſingulorum. Igitur 256 - 1 Q ad 256, eſt in ratione data 11 ad 16. Ac proinde productus ſub extremis 4096 - 16 Q æqualis erit producto ſub mediis 2816. igitur poſt debitam reductionem, & diuiſionem, 1 Q æquatur 80, & fit 1 R ſiue ſumma ſecundi & quarti ℞ 80. Singulique vt ſuprà. Per Propoſ. 1. huius. Lem. 1

Similiterque poſſet poni 1 R pro ſumma ſecundi & quarti & ſumi prior terminus rationis pro ſumma reliquorum.

Hinc Canon.

EX cubo poſterioris termini rationis datæ, tolle ſolidum ſub quadrato poſterioris termini in priorem:

reſiduum diuiſum per poſteriorem exhibebit quadratum ſummæ ſecundi & quarti, ſumma reliquorum exiſtente poſteriori termino rationis.

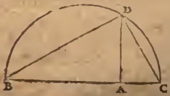
Vel breuius.

PRoductus ſub poſteriori termino rationis in differentiam terminorum æquabitur quadrato ſummæ ſecundi & quarti poſteriore termino rationis exiſtente ſumma eorum qui ſunt in locis imparibus.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data ratio A B ad B C. Supra B C deſcribatur circulus, & erecta perpendiculari A D nectantur B D & C D.

8. ſexti.
4. ſexti.
17. ſexti.



Manifeſtum eſt obſeruari integrum Canonem & fieri D C, ſiquidem vt dictum eſt ſæpius, rectangulum B C A æquatur quadrato D C.

Dico autem lineam D C fore ſummam ſecundæ & quartæ poſteriori termino rationis B C exiſtente ſumma reliquarum. Nam quadratum B C æquatur quadratis ſingularum plus quadrato quod fit à ſumma ſecundæ & quartæ. Sed idem quadratum B C æquale eſt quadratis B D, D C, quadratum verò B D (quod æquatur rectangulo C B A) eſt æquale quadratis ſingularum. Ergo quadratum D C æquabitur quadrato aggregati ſecundæ & quartæ; atque ideò linea D C erit ſumma ſecundæ & quartæ. Quod erat demonſtrandum.

Corollar. propoſ. 10. huius.

47. primi.

Propoſ. 46. huius.

Appendix.

MVltis aliis modis potuiſſet procedi in operatione Algebrica, ex quibus noui Canones & nouę Ef-

ſectiones Geometricæ oriræntur; ſed aliquid relinquendum exercitationi Lectoris. Patet deinde quomodo data quacumque ſumma vel differentia ex quinque proportionalibus & prædicta quadratorum ratione, poſſint ſingulæ quantitates inueniri. Patet præterea quomodo diuidendo vel componendo poſſint ſolui duo alia problemata huic affinia, ſicut in præcedentibus dictum eſt.

PROPOSITIO XLIX.

Data ſummæ earum quæ ſunt in locis paribus, & ſolido ſub quadrato mediæ in ſummam extremarum plus dupla media inuenire quinque quantitates proportionales.

ESto data ſumma 10. & ſolidum 400. Ponaturque medius quinque numerorum quæſitorum 1 R. Et quia ex Corollario Propoſ. 1. huius in ſerie quinque proportionalium, eſt vt ſumma extremorum plus duplo medio ad medium; ita quadratum ſummæ eorum qui ſunt in paribus locis ad quadratum medii. Si multiplices quadratum ſummæ datæ 10 nempe 100, per 1 R, fiet productus 100 R æqualis ſolido dato 400. Ergò 1 R, ſiue medius eſt 4. Singulique 1. 2. 4. 8. 16.

Hinc Canon.

DIuide ſolidum datum per quadratum ſummæ numerorum datæ, & habebis medium. Vnde ſinguli non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

SIt data linea A pro ſumma earum quæ ſunt in locis paribus, & linea B poſſit ſolidum rectangulum ſub

quadrato mediæ in ſummam extremarum plus dupla media. Fiat vt quadratum A ad quadratum B; ita linea B ad aliam quæ ſit C.

Manifeſtum eſt obſeruari integrum Canonem, ſiquidem hoc poſito, ſolidum rectangulum ſub quadrato, A in lineam C, æquabitur cubo B. Et proinde cubus B diuiditur per quadratum A, & fit linea C pro quotiente Geometrico.

54. vndec.

Dico verò lineam C fore mediam ex quæſitis. Nam vt dictum eſt, ſi fuerint quinque quantitates proportionales, erit vt ſumma extremarum plus dupla media ad mediam; ita quadratum aggregati ſecundæ & quartæ ad quadratum mediæ. Ergo ſolidum rectangulum ſub extremis comprehenſum, hoc eſt cubus B æquatur ſolido ſub mediis, id eſt, ſub quadrato A in mediam. Sed factum eſt vt quadratum A ad quadratum B; ita linea B ad lineam C. Ergo idem cubus B æqualis erit ſolido rectangulo ex quadrato A in lineam C. Cùm igitur linea A ſit ſumma ſecundæ & quartæ, erit linea C media quæſitarum. Quod erat demonſtrandum.

Corollar. Propoſ. 11 huius.

34. vndec.

Appendix.

EX his patet quomodo ſolui poſſit iſtud problema. data ſumma extremarum plus dupla media, & ſolido ſub media in quadratum aggregati ſecundæ & quartæ, inuenire quinque proportionales. Soluitur enim beneficio eiuſdem Corollarij,

PROPOSITIO L.

Data ſumma extremarum, & ſolido ſub quadratis ſecundæ & quartæ in mediam inuenire quinque quantitates proportionales.

ESto data ſumma 6. & ſolidum 24. Ponatur autem 1 R pro medio. Et quia in ſerie quinque proportionalium, ex Corollario Propoſ. 8. huius. Eſt vt ſumma extremorum ad medium; ita quadrata ſecundi & quarti ad quadratum medii. Multiplicando 1 Q per ſummam datam 6, fiet æquatio inter 6 Q & ſolidum datum 24. Et proinde 1 Q erit 4. Et 1 R ſiue medius 2. Et quinque quæſiti erunt $3 - \sqrt{5} \mid \sqrt{5} - 1 \mid 2 \mid \sqrt{5} + 1 \mid 3 + \sqrt{5}$.

Hinc Canon.

DIuide ſolidum datum per ſummam numerorum datam, & prodibit in quotiente quadratum medii ex quæſitis. Vnde ſinguli non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

ESto data linea A pro ſumma extremarum & ſit linea B potens ſolidum ex quadratis ſecundæ & quartæ in mediam. Fiat vt linea A ad lineam B; ita quadratum B ad aliud quadratum quod ſit C.

Manifeſtum eſt obſeruari integrum Canonem, ſiquidem hoc poſito ſolidum rectangulum ſub quadrato C in lineam A ęquabitur cubo B & conſequenter cubus B diuiditur per lineam A. Et fit quadratum C pro quotiente Geometrico. 34. vndec.

Dico autem lineam C fore media[illegible] quæſitis, nam

Corollar. prop. 8. huius. vt demonſtratum eſt ſuprà, in ſerie quinque proportionalium. eſt vt ſumma extremarum ad mediam; ita quadrata ſecundæ & quartæ ad quadratum mediæ. Ergo ſolidum ſub extremis, hoc eſt ſub quadrato mediæ & linea A æquabitur ſolido ſub mediis, hoc eſt cubo B. *14 vndec.* Sed iam oſtenſum eſt eumdem cubum B ęquari ſolido rectangulo ex quadrato C in lineam A, igitur ſolidum rectangulum ex quadrato C in lineam A, æquatur ſolido rectangulo ex quadrato mediæ in lineam A. Et proinde linea C erit media. Quod erat demonſtrandum.

Appendix:

HInc ſolues iſtud problema. Data ſumma quadratorum ſecundæ & quartæ, itemque ſolido ſub quadrato medię in ſummam extremarum, inuenire quinque quantitates continuè proportionales: ſi enim diuidas ſolidum datum per ſummam quadratorum datam, habebis mediam ex quæſitis.

PROPOSITIO LI.

Data ſumma omnium & ſolido ſub quadratis ſingularum in ſummam earum quæ ſunt in locis paribus inuenire quinque quantitates proportionales.

ESto datus numerus 31 pro ſumma omnium & 3410 pro ſolido. Ponatur autem 1 R productus ex ſumma eorum qui ſunt in locis paribus & interuallo quo ſumma primi, tertii & quinti ſuperat ſummam ſecundi & quarti. Ergo multiplicando 31 per 1 R, habebis 31 R æquales ſolido dato 3410 ex Corol. Propoſ. 7. huius. & p[illegible] R. ſiue productus ſupradictus erit 110. Ponatur ergo nunc [illegible] pro interuallo quo ſumma eorum

qui ſunt in locis imparibus ſuperat ſummam ſecundi & quarti. Igitur 31 - 1 R erit duplum ſummæ ſecundi & quarti: & proinde $\frac{31 - 1R}{2}$ erit ſumma ſecundi & quarti. Ergo ſi hanc multiplicaueris per 1 R; fiet productus $\frac{31 R - 1 Q}{2}$ æqualis producto iam inuento 110. Et ita erit æquatio inter 1 Q & 31 R - 220. Ergo 1 R, ſiue interuallum quo ſumma primi, tertii & quinti ſuperat ſummam ſecundi & quarti eſt 11. Singulique erunt vt ſuprà. 1. 2. 4. 8. 16.

Hinc Canon.

DIuide ſolidum datum per ſummam omnium, quotientis duplum tolle ex quadrato dimidiæ omnium ſummæ: huius enim relicti radix quadrata ſupradicto addita vel detracta dimidio, exhibebit interuallum ſummæ earum quæ ſunt in locis imparibus & ſummæ ſecundi & quarti. Vnde ſinguli non latebunt.

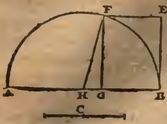
Hinc Effectio Geometrica.

ESto linea A B ſumma omnium. Et linea C potens ſolidum ſub quadratis ſingularum in ſummam ſecundi & quarti. Fiat autem vt A B ad C; ita quadratum C ad aliud quadratum quod ſit B D. Ponaturque linea B D perpendiculariter ad A B: & producta B D, donec B E poſſit duplum quadratum B D, ducatur E F parallela diametro B A, occurrens peripheriæ in puncto F, ex quo demittatur F G perpendicularis ad A B.

Manifeſtum eſt obſeruari ſingulas Canonis Algebrici partes, ſiquidem cum factum ſit, vt A B ad C; ita quadratum C ad quadratum B D, erit ſolidum rectangulum ſub extremis æquale cubo C: & ſic diuiditur cubo per ſummam omnium A B, & fit quadratum

quotiente Geometrico. Cuius duplum eſt quadratum
47. primi. B E, hoc eſt G F. Ducta autem F H ad centrum, tollitur F G quadratum de quadrato F H dimidiæ omnium ſummæ, & remanet quadratum H G, cuius latus H G additum vel detractum dimidio ipſius A B, exhibet A G vel G B.

Dico autem A G vel G B fore interuallum quo ſumma earum quæ ſunt in locis imparibus ſuperat ſummam
Corollar. Prop. 7. huius. earum quæ in paribus: nam quia eſt vt ſumma omnium ad ſummam ſecundæ & quartæ, ſic quadrata ſingularum ad rectangulum ex ſumma earum quæ ſunt in locis paribus in interuallum quo ſumma primæ, tertiæ & quintæ ſuperat ſummā ſecundæ & quartæ: erit ſolidum ſub me-
Propoſ. 34. Decimotertij. diis, hoc eſt cubus C æqualis ſolido ſub extremis; hoc eſt ſub ſumma omnium A B in rectangulum prædictum. Sed factum eſt vt linea A B ad lineam C; ita quadratum C ad quadratum B D, ergo per eamdem Propoſ. cubus C eſt æqualis ſolido ſub linea A B & quadrato B D. Igitur ſolidum ſub linea A B & quadrato B D ęquatur ſolido ſub linea A B & rectangulo ſupradicto. Et proinde rectangulum ſupradictum ęquale erit quadrato B D.



Ergo duplum illius rectanguli æquatur quadrato B E, hoc eſt F G, hoc eſt rectangulo A G B. igitur rectangulum ſub A G & dimidia G B, vel ſub G B & dimidia A G æquale eſt quadrato B D. Ergo quoniam A B eſt ſumma omnium, erit A G vel G B interuallum quo ſumma earum quæ ſunt in locis imparibus ſuperat ſummam ſecundæ & quartę. Quod erat demonſtrandum.

Quoniam verò contingit aliquando, vt ſumma ſecundæ & quartæ maior ſit prędicto interuallo, & aliquando minor; vt dignoſcas vtra illarum duarum linea-

rum,

rum, ſit interuallum quod quæritur, inueſtiga an B D quadratum æquale ſit rectangulo ſub B G in dimidiam A G; ſi enim res ita habet, G B erit interuallum prædictum & A G dupla ſumma ſecundæ & quartæ. Si verò contra quadratum B D æquetur rectangulo ſub A G, & dimidia G B, erit A G eiuſmodi interuallum; & G B dupla ſumma earum quæ ſunt in locis paribus. Data autem ſumma earum quæ ſunt in locis paribus, & ſumma earum quę in imparibus cognoſcuntur ſingulæ, per Propoſ. 1. & 2. huius.

Appendix.

DAto eodem ſolido, itemque plano ſub ſumma ſecundæ & quartæ in interuallum quo ſumma earum quę ſunt in locis imparibus ſuperat ſummam ſecundæ & quartę, poſſunt inueniri quinque proportionales: nam diuidendo ſolidum datum per planum, habebis ſummam omnium. Hac autem ſumma inuenta, poſſes duabus aliis viis inuenire nouos Canones, & nouas affectiones Geometricas vel ponendo vnam radicem pro ſumma ſecundæ & quartæ; vel pro ſumma eorum quæ ſunt in locis imparibus.

PROPOSITIO LII.

Data ſumma quadratorum à ſingulis & ſolido ſub ſumma omnium, & plano ex ſumma ſecundæ & quartæ in interuallum quo ſumma earum quæ ſunt in locis imparibus ſuperat ſummam earum quæ in paribus, inuenire quinque proportionales.

ESto data ſumma quadratorum à ſingulis 341. & ſolidum 3410. Ponatur autem 1 R pro ſumma ſe-

Corol. Propoſ. 7. huius. cundi & quarti. Ergo per Corollarium Propoſ. 7. huius, multiplicando 341 per 1 R, habebis ſolidum 341 R æquale dato ſolido 3410. Igitur 1 R, ſi e ſumma ſecundi & quarti eſt 10. Data autem ſumma ſecundi & quarti vna cum aggregato quadratorum à ſingulis inueniuntur ſinguli 1. 2. 4. 8. 16. Prop. 11. huius.

Hinc Canon.

DIuide ſolidum datum per ſummam quadratorum à ſingulis, & habebis ſummam eorum qui ſunt in locis paribus. Vnde ſinguli non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

ESto data linea A potens quadrata ſingularum, & linea B potens ſolidum in propoſitione explicatum. fiat autem vt quadratum A ad quadratum B, ita linea B ad aliam lineam quæ ſit C.

Manifeſtum eſt obſeruari integrum Canonem, ſiquidem hoc poſito ſolidum ſub quadrato A in lineam C, erit æquale cubo B, & ita cubus B diuidetur per quadratum A & fiet linea C pro quotiente Geometrico. 34. vndec.

Dico autem lineam C fore ſummam ſecundæ & quartę: nam ex præcedentibus quadratum A æquatur rectangulo ſub ſumma omnium in interuallum quo ſumma earum quæ ſunt in locis imparibus ſuperat ſummam ſecundæ & quartæ. Ergo ſi ex vtroque plano & ſumma ſecundæ & quartæ fiant duo ſolida, illa erunt inter ſe æqualia. Sed cubus B eſt æqualis ſolido poſteriori & aliunde, iam eſt oſtenſum ſolidum ſub quadrato A in lineam C ęquari cubo B. Ergo ſolidum ſub quadrato A & linea C æquatur ſolido ſub quadrato A & ſumma ſecundæ & quartæ, & proinde linea C, erit ſumma ſecundæ & quartæ. Quod erat demonſtrandum. Corollar. 7. huius.

Data autem ſumma ſecundæ & quartæ C, & linea A

potente quadrata ſingularum, diſcernuntur ſingulæ, per Propoſ. 12. huius.

PROPOSITIO LIII.

Data ſumma earum quæ ſunt in locis imparibus, & ſolido ſub aggregato quadratorum à tribus intermediis in mediam, inuenire quinque quantitates proportionales.

ESto data ſumma 8. & ſolidum 32. Ponatur autem 1 R pro medio, & quoniam in ſerie quinque proportionalium eſt vt ſumma extremarum ad medium; *Corollar. Propoſ. 13. huius.* ita quadrata ſecundi & quarti ad quadratum medii; erit componendo vt ſumma eorum qui ſunt in locis imparibus ad medium; ſic quadrata trium intermediorum ad quadratum medii. Ergo multiplicando ſummam 8 per 1 Q, fiet æquatio inter 8 Q & ſolidum datum 32. Et proinde 1 Q eſt 4. Et 1 R, ſiue medius erit 2. Singulique 3 − ℞5 | ℞5 − 1 | 2 | ℞5 + 1 | 3 + ℞5.

Hinc Canon.

DAtum ſolidum diuide per ſummam eorum qui ſunt in locis imparibus, & habebis quadratum medii. Vnde ſinguli non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

ESto data linea A pro ſumma earum quæ ſunt in locis imparibus, & linea B poſſit ſolidum ſub aggregato quadratorum à tribus intermediis in mediam. Fiat vt linea A ad lineam B; ita quadratum B ad aliud quadratum, quod ſit C.

Manifeſtum eſt obſeruari integrum Canonem : hoc
14 *vndec.* enim poſito cubus B æquabitur ſolido rectangulo ſub quadrato C in lineam A. Et proinde cubus B diuiditur per lineam A, & fit quadratum C pro quotiente Geometrico.

Corollar. Propoſ 13. huius. Dico autem lineam C fore mediam ex quæſitis. Nam cum ſit vt ſumma extremarum ad mediam; ita quadrata ſecundæ & quartæ ad quadratum mediæ; erit componendo vt ſumma earum qui ſunt in locis imparibus ad mediam; ita quadrata trium intermediarum ad quadratum mediæ. Ergo ſolidum rectangulum ſub
14 *vndec.* quadratis trium intermediarum in mediam, ſiue cubus B, æquabitur ſolido rectangulo ſub ſumma earum quæ ſunt in locis imparibus, hoc eſt ſub A in quadratum mediç. Sed idem cubus B iam eſt oſtenſus ęqualis ſolido rectangulo ſub linea A in quadratum C. Ergo ſolidum rectangulum ſub linea A in quadratum C æquatur ſolido rectangulo ſub linea A in quadratum mediæ; & proinde linea C eſt media. Quod erat demonſtrandum.

Appendix.

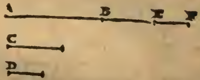
EX hoc patet quomodo ſolui poſſit iſtud problema: Dato aggregato quadratorum à tribus intermediis, & ſolido ſub ſumma trium quantitatum quæ ſunt in locis imparibus, in quadratum mediæ, inuenire ſingulas. Nam diuidendo ſolidum per planum habebis mediam.

ARITHMETICA GEOMETRIÆ.

NE ipſo hæreas in limine, moneo me vocare Arithmeticam Geometriæ illam artem qua Geometricè perficiuntur quatuor vulgaris Arithmeticæ ſpecies quę nuncupantur Additio, Subſtractio, Multiplicatio & Diuiſio.

ADDITIO Geometrica.

VEl addendæ erunt inter ſe lineæ, vel plana, vel ſo- 1.
lida: ſi lineæ, conuertendæ erunt omnes collocando eas in directum conſequenter & immediatè, ita enim habebitur ſumma æqualis ſingulis partibus ſimul ſumptis. Vt ſi datæ ſint tres lineæ A B, C, & D protrahatur A B donec B E ſit æqualis C; & E F æqualis D. Dico A F fore æqualem tribus datis. Hoc clarius eſt quam vt probatione indigeat.



Si verò addenda 2.
ſint plana, vel illa erunt quadrata, vel alterius cuiuſcumque ſpeciei: ſi quadrata, connectantur eorum latera ad angulos rectos, & abſoluatur

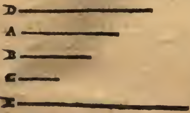
triangulum rectangulum; tunc enim baſis ſubtendens angulum rectum erit linea cuius quadratum equabitur duobus quadratis datis, vt ſi dentur duo quadrata A B & B C, oportet connectere lineas A B & B C perpendiculariter, & ducenda eſt poſtmodum A C. Dico quadratum A C fore equale duobus quadratis A B. B C. per 47. lib. 1. Euclidis.



3 Si plura quadrata addenda eſſent quam duo, negotium non foret multo operoſius: nam addendum eſſet quadratum A C cum tertio quadrato, & haberetur ſumma trium quæ addita cum quarto, exhiberet ſummã quatuor, & ita deinceps.

4 Si verò plana addenda non eſſent quadrata, ſed vel triangula vel rectangula rhombi vel rhomboides vel aliç figurç multi-lateræ; oporteret primum illa reducere in quadrata, & facienda additio vt ſupra. Reductio autem illa facile fiet per 35. Et 41. l. 1. Elementorum & 17. ſexti.

5 Si quadratum addendum foret cum circulo parabola ellipſi, &c. Oporteret prius quadrare circulum & parabolam, &c. vt habet Clauius in l.4. Geometriæ practicæ, & facienda additio vt ſuprà.



6 Si autem ſolida ſint addenda, vel erũt cubi vel parallelepipeda vel ſpherç vel coni vel cylindri vel alia corpora: ſi cubi, hoc modo addentur, ſit cubus A addendus cum cubo B, duabus lineis A & B, ſumantur hinc inde tertiæ proportionales C & D quæ inter ſe addantur, ita-

ut linea E ſit ęqualis C & D ſimul ſumptis. Dico ſolidum A B E fore ſummam duorum cuborum A & B. Nam per 36. vndecimi A B C ſolidum parallelepipedum rectangulum æquale eſt cubo B, & ſolidum B A D cubo A. Cum ergo ſolida illa habeant eandem baſim A B, erit ſumma illorum, ſolidum A B E. Et proinde ſolidum A B E æquabitur cubis, A & B. Quod erat demonſtrandum.

Si plures cubi addendi eſſent quam duo, oporteret ſolidum A B E reducere ad cubum per 38. l. 8. Geomet. practicæ Clauii, & cubum illum adiungere tertio Propoſito, vt ſuprà. 7

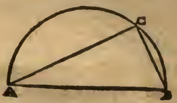
Si verò alia corpora addenda eſſent cubo oporteret prius illa cubare per 40. Propoſ. l. 8. Geom. pract. Clauii & facienda reliqua vt prius. 8

SVBSTRACTIO

Geometrica.

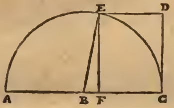
Vel imperatur ſubtrahi lineas à lineis, vel plana à planis, vel ſane ſolida à ſolidis. Si agatur de lineis res eſt perfacilis & habetur, ex 3. Propoſit. lib. 1. element. 1

Si vero ſubtrahenda ſint plana vel illa erunt quadrata vel alterius cuiuſcumque ſpeciei: ſi quadrata, poteſt illud abſolui duobus, modis, primò latus minoris quadrati inſcribendo in ſemicirculos cuius diameter ſit latus maioris quadrati, vt ſi ex quadrato A B iubeatur tolli quadratum A C, fiat ſe- 2



micirculus ſupra A B & inſcribatur A C, nectaturque C B. Dico quadratum C B fore reſiduum nam: cum angulus A C B ſit in ſemicirculo rectus erit, & proinde quadratum A B æquabitur quadratis A C, C B: quare ſublato quadrato A C ex quadrato A B relinquitur quadratum C B. Quod eſt propoſitum.

3 Aliter quoque illud idem perfici poteſt, vt ſi ex quadrato A B tollendum foret quadratum C D, ſumenda eſſet B C ęqualis A B, & centro B interuallo B A, faciendus ſemicirculus: tùm C B erigenda perpendiculariter ad A C, ducendaque D E parallela C A, quę ſemper occurret peripheriæ, alioquin problema erit impoſſibile; occurrat ergo in puncto E ex quo demittatur E F perpendiculariter ad A C. Dico quadratum B F fore reſiduum quæſitum: ducta enim B E erit æqualis A B, eiuſque quadratum æquale eſt quadratis E F, B F per 47 primi. Igitur ſublato quadrato E F de quadrato B E hoc eſt A B, relinquitur quadratum B F.



4 Si plura eſſent ſubtrahenda quadrata ab vno, oporteret prius illa inter ſe addere vt dictum eſt in Additione n. 3. Tùm Subſtractio vnius quadrati ab altero facienda vt mox fuit explicatum.

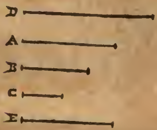
5 Quod ſi plana ſubtrahenda non forent quadrata, ſed alterius ſpeciei vt ſunt triangulum, rectangulum, rhombus, &c. Oportet primum illa reducere in quadrata per 35. & 41. lib. primi element. & 17. ſexti & Subſtractio facienda vt prius.

6 Si quadratum ſubtrahendum, foret à circulo parabola ellipſi, &c. vel contra: oportet & quadrare circulum

&

& parabolam, &c. vt quadrari poſſunt, & reliqua perficienda, vt ſuprà.

Si autem ſubtrahendũ ſit ſolidũ à ſolido vel illud erit 7
cubus, vel parallelepipedum, vel ſphæra, vel conus, vel cylindrus, vel aliud corpus: ſi cubus addendus ſubtrahendus ſit à cubo, res peragetur in hunc modum. Sit cubus B tollendus ex cubo A, duabus illis lineis A B, ſumantur hinc inde tertiæ proportionales C & D. quarum minor C tollatur ex maiore D & remaneat differentia E, Dico ſolidum A B E fore reſiduum quæſitum: nam ex 36. vndecimi A B C, ſolidum æquatur cubo B;



& B A D cubo A; igitur cum illa duo ſolida habeant eamdem baſim, ſe habebunt vt altitudines & proinde differentia altitudinum E cum plano A B exhibebit differentiam cuborum A & B. Quod eſt propoſitum.

Si plures cubi ſubtrahendi forent ab vno, oporteret 8
eos prius addere inter ſe vt dictum eſt in Additione n. 7. & ſummam factam ſubtrahere à cubo propoſito vt ſuprà.

Si verò alia corpora ſubtrahenda eſſent, oporteret prius illa cubare prout cubari poſſunt ex iis quæ di- 7
cta ſunt in Additione, num. 8. Et facienda reliqua vt prius.

MVLTIPLICATIO

Geometrica.

1 ILlud imprimis animaduertendum eſt longe aliud eſſe multiplicare quantitatem continuam per numerum, & aliud multiplicare eam per quantitatem continuam: nam multiplicare eam per numerum, eſt opus additionis ſimplicis, ſi numerus ille ſit integer; vt ſi ſit multiplicanda linea A B per 3 ſumenda eſt A C tripla linea A B. Similiter ſi multiplicandum ſit quadratum A B per *3* oportet inuenire lineam A D. cuius quadratum triplum ſit quadrati A B. ex additione ſuperius tradita n. *3*. Si vero numerus ille eſſet fractus, opus eſt additionis & ſubſtractionis ſimul: vt ſi multiplicanda eſſet Linea A B per $\frac{3}{4}$ oporteret primò ſumere A C triplam A B & ipſius A C ſumendus foret quadrans A D propter denominatorem fractionis. Idemque dicendum de quadrato & cubo.

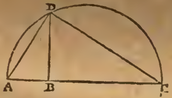




2 Quod ſi multiplicare oporteat quantitatem continuam per quantitatem continuam, habendum hoc pro certo multiplicationem illam fieri beneficio anguli recti, ſiue agatur de planis ſiue de ſolidis; non enim quodcumque planum à duabus lineis ortum correſpondet multiplicationi numerorum; ſed tantum illud quod vocatur rectangulum: & ratio eſt quia multiplicationis terminus non eſt incertus, quilibet autem terminus productus à duabus rectis lineis preter planum rectangulum incertus eſt &

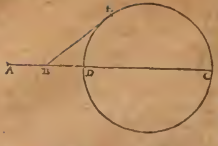
indeterminatus, ergo nullum planum præter illud eſt terminus multiplicationis.

Illud ergo in vniuerſum dici poteſt quod linea in li- 3
neam gignit planum, & linea in planum gignit ſolidum: & linea in ſeipſam facit quadratum, linea vero in ſuum quadratum facit cubum: & ſi lubet ad imaginarias quantitates ſcandere, linea in cubum gignit quadrato quadratum, linea in quadrato-quadratum facit quadrato-cubum; linea in quadrato cubum facit cubo cubum: & permutatim. Rurſus quadratum in ſe facit quadrato-quadratum in cubum facit quadrato-cubum; quadratum in quadrato-quadratum facit cubo cubum. Et permutatim. Similiter, manendo ſemper in quantitatibus imaginariis; linea in ſolidum facit plano-planum; linea in plano-planum gignit plano-ſolidum; linea in plano-ſolidum gignit ſolido-ſolidum.



Si igitur multipli- 4
care oporteat lineam A B per lineam B C, oportebit illas coniũgere in directum & ſupra totam A C facere ſemicirculum & ex puncto B erigere perpẽdiculariter B D. Dico quadratum B D fore æquale rectangulo ex A B in B C. Ductis enim A D & D C fiet triangulum A D C rectangulum, quia angulus A D C in ſemicirculo: rectus eſt igitur, cum ex angulo recto demittatur D B perpendicularis ad baſim A C, fient triangula tria æquiangula, & proinde erit vt A B ad B D; ita B D ad B C, quare quadratum mediæ B D æquatur rectangulo A B C.

Aliter idem poteſt effici hoc modo. Ex data maiore 5
B C tollatur B D minori A B ęqualis: tùm facto ſupra D C circulo ducatur B E ipſum circulum tangens. Dico



quadratum B E æquari rectangulo C B D. Euidens eſt problema ex 36. tertii.

3 Quod ſi lubet multiplicare ſuperficiem quamcumque per lineam, coniungatur linea ad angulos rectos cum ſuperficie & fiat ſolidum : Dico illud fore productum multiplicationis. Maioris tamen commoditatis gratia, oportet prius reducere ſuperficiem in quadratum; vt ex illo & altitudine data fiat parallelepipedum rectangulum, tunc enim per Propoſ. 38. l. 8. Geomet. pract. Clauii poterit vtcumque fieri cubus illi parallelepipedo æqualis.

D I V I S I O

Geometrica.

1 Notandum illud eſt imprimis longe aliud eſſe diuidere quantitatem continuam per numerum, aliud verò diuidere eam per quantitatem continuam; nam diuidere ipſam per numerum eſt opus ſimplicis ſubſtractionis ſi numerus ille ſit integer : vt ſi diuidenda ſit linea vel ſuperficies per 4. ſumendus erit lineæ vel ſuperficiei quadrans, hoc autem fit per ea quæ ſupra tradita ſunt in ſubſtractione : ſi vero numerus ille eſſet fractus, opus foret additionis & ſubſtractionis ſimul : vt ſi diuidendum eſſet quadratum per $\frac{3}{4}$ oporteret primo illius quadrati ſumere quadruplum per ea quæ dicta ſunt in additione n. 3. propter denominatorem 4. Et illius quadrupli ſumendus foret triens propter numeratorem 3. & ſic abſoluta foret diuiſio.

Quod ſi diuidenda ſit quantitas continua per quantitatem continuam illud in vniuerſum dici poteſt quod ſuperficies diuiſa per lineam, facit lineam; ſolidum diuiſum per ſuperficiem, facit lineam; diuiſum verò per lineam facit ſuperficiem. Quadratum diuiſum per latus reſtituit latus; cubus vero diuiſus per latus reſtituit quadratum lateris, diuiſus autem per quadratum lateris reſtituit latus. Et ſi lubet ab imaginariis quantitatibus deſcendere (quod non eſſe abſurdum nec inutile iudidicabit prudens Lector ex dicendis) quadrato-quadratum diuiſum per latus reſtituit cubum, diuiſum verò per cubum reſtituit latus, diuiſum autem per quadratum reſtituit quadratum. Quadrato cubus diuiſus per quadratum reſtituit cubum; diuiſus autem per cubum reſtituit quadratum; diuiſus per quadrato-quadratum reſtituit latus & contra. Similiter manendo ſemper in quantitatibus imaginariis plano-planum diuiſum per ſolidum facit lineam plano-ſolidum per lineam facit plano-planum; ſolido ſolidum diuiſum per ſolidum facit ſolidum; diuiſum per plano-ſolidum facit lineam; diuiſum per planum, facit plano-planum; & permutatim. Denique illud non omittendum quod apud authores idem eſt diuidere quantitatem continuam per quantitatem continuam, ac quantitatem continuam adplicare continuæ quantitati. 2

Si ergo oporteat diuidere quadratum quodcumque 3
per quamcumque lineam; fiat vt linea ad latus quadrati; ita illud latus ad aliam lineam per 11. ſexti Elementorum & tertia linea inuenta erit quotiens diuiſionis. Ratio eſt quia quotiens diuiſionis aliud nihil eſt quam quantitas quæ multiplicata per quantitatem partitricem facit quantitatem diuidendam; atqui in noſtro caſu linea inuenta multiplicata per lineam diuidentem, facit quadratum diuidendum, quia per 17 ſexti, trium linearum proportionalium media poteſt rectangulũ ſub extremis; igitur linea inuenta eſt quotiens diuiſionis Geometricæ.

4 Quod ſi lubeat rectangulum quodcumque cuius latera circa angulum rectum ſint inæqualia diuidere per quamcumque lineam, illud poteſt fieri altero ex his duobus modis: primò reducendo illud rectangulum ad quadratum per 13. ſexti. & poſtea operando vt prius. Secundo ſine tali reductione, faciendo vt linea partitrix ad vnum latus rectanguli, ita alterum latus rectanguli ad aliam lineam, id autem fit per 12. ſexti. Et hæc linea quarta proportionalis inuenta erit quotiens diuiſionis, ſiquidem rectangulum ſub extremis per 16 ſexti erit æquale rectangulo ſub mediis, ergo cum quotiens aliud nihil ſit quam quantitas quæ multiplicata per quantitatem partitricem producit quantitatem diuidendam, manifeſtum eſt lineam inuentam, eſſe quotientem Geometricæ diuiſionis.

5 Simili ratione ſi oporteret triangulum, rhombum vel rhomboidem trapezium aut quamcumque figuram multilateram diuidere per quamlibet lineam rectam, reducenda foret illa figura plana in quadratum vel in rectangulum & poſtea operandum, vt prius dictum eſt n. 3. & 4.

6 Si cubus diuidendus foret per quadratum, oporteret facere vt quadratum partitiuum ad quadratum quod eſt baſis cubi; ita latus cubi ad aliam lineam & hæc linea inuenta foret quotiens diuiſionis Geometricæ. Ratio eſt eadem quę prius, quia nimirum quadratum partitiuum cum linea inuenta facit ſolidum ęquale cubo diuidendo per 34. vndecimi.

7 Si contra cubus eſſet diuidendus per lineam, oporteret facere vt linea ad latus cubi ita quadratum quod eſt baſis cubi ad aliud quadratum, & propter eamdem rationem quadratum inuentum erit quotiens diuiſionis Geometricæ.

8 Similiter ſi parallelepipedum rectangulum diuidendum eſſet per quadratum aut quodcumque aliud planum; faciendum foret vt quadratum aut a-

liud planum partitiuum ad baſim parallelepipedi rectanguli ; ita eius altitudo ad aliam lineam : & hæc linea erit quotiens. Si vero idem parallelepipedum diuidi deberet per lineam , oporteret facere, vt linea partitrix ad altitudinem parallelepipedi ita baſis illius ad aliud planum. Et illud planum inuentum foret quotiens Geometricæ diuiſionis.

Quod ſi vel vna figura ſolida , vel plures , vel 9
vna ſphæra, vel plures diuidendæ forent aut per vnam lineam aut per vnum planum , reducenda eſſet vel hæc figura ſolida vel illæ plures , vel ſphæra , vel ſphæræ in cubum vnum per ea quæ habet Clauius Propoſit. 40. & 41. libr. octau. Geometr. practica, & tunc facienda diuiſio vt mox diximus numer. ſext. & ſept.

Quantitatum etiam imaginariarum fieri diuiſionem 10
quodammodo nihil vetat ; ſi enim plano - ſolidum diuidi proponatur per quadratum A ; fiat vt quadratum A ad planum incluſum in plano-ſolido ; ita ſolidum ibidem incluſum ad aliud ſolidum quod ſit B. Dico B fore quotientem diuiſionis Geometricæ : nam quantitas imaginaria conflata ex plano A in ſolidum B, eſſet æqualis plano-ſolido diuidendo. Similiter , ſi quadrato - quadratum foret diuidendum vel per planum aliquod datum vel per lineam vel per cubum nullo negotio totum illud opus abſolueretur. Hoc eſt plane inutile , inquies ; imò verò : ſæpius enim inde elicitur Propoſitum etiam Geometricè, vt patet in Propoſit. 48. libr. 2. noſtræ Clauis , vbi quadrato - quadratum poſterioris termini diuiſum eſt per planum ſub terminis proportionis iunctum cum triplo quadrato poſterioris termini. Et inuentum eſt quadratum ſummæ mediorum poſteriore termino rationis exiſtente ſumma omnium. Fateor tamen illas quantitates imaginarias nihil profuturas vltra ſolido-ſolidum, at vero intra illum terminum erunt vtiliſſimæ.

ALGEBRICARVM PRÆCEPTIONVM EPITOME.

INter eos qui Algebræ explicandæ operam nauarunt, vix vllum reperias qui præcepta eius ſuperfuſis tenebris non inuoluat, menteſque tyronum tanta operationum diuerſitate non confundat, vt nemo ferè ſingulas memoria poſſit complecti: inde factum vt multi abhorrerent à præclaris illius ſcientiæ inuentis, arbitrati habenda ſemper eſſe præ oculis volumina integra ad tutiùs & expeditiùs operandum.

Ego re attentiùs conſiderata, dedi in lucem ante aliquot annos vernacula lingua epitomem quamdam Algebricarum præceptionum, quæ cum faciles admodum viſæ ſint, exiſtimaui Appendicis loco attexendas nouæ noſtræ Claui Geometricæ, vt eodem in tomo reperirentur omnia quæ ſunt ad eam artem neceſſaria.

Atque vt initium faciam, conſideranda eſt attentè hæc tabula triplici ordine inſtructa: in ſupremo quidē videtur

0	1	2	3	4	5	6	7	8	&c.	Exponentes.
N. Numerus abſolutus.	R. Radix.	Q. Quadratum.	C. Cubus.	QQ. Quadrato-quadratum.	S. Surſolidus.	QC. Quadrato-cubus.	S 2. Surſolidus ſecundus.	QQQ. Quadrato quadrato quadratū.	&c.	Characteres Coſſici.
1	2	4	8	16	32	64	128	256	&c.	progreſ. Geom.

progreſſio naturalis, cuius termini tali ratione diſpoſiti ſunt, vt habeant ſub ſe immediatè characteres Coſſicos, quorum ſunt exponentes. In infimo autem ordine eſt progreſſio geometrica incipiens ab vnitate quæ poteſt eſſe dupla, tripla, quadrupla, &c. Ego in commodiorem vſum appoſui duplam. Aduerte igitur R, eſſe characterem Coſſicum qui ſignificat radicem, & exponentem ipſius eſſe vnitatem ſuperius in primo ordine notatam. C, eſt character coſsicus qui ſignificat cubum, & cuius exponens eſt 3 ſuprà notatus. Q C, eſt character coſsicus qui ſignificat quadrato-cubum, & cuius exponens eſt *6* in primo ordine ſuper criptus. Et ſic de aliis. Retine iſtos loquendi modos, ſchema propoſitum diligenter intuere, & his in præſenti contentus eſto.

Poſſes hanc tabulam in infinitum protrahere hoc modo. Cape duos numeros qui in ſe inuicem multiplicati producant aliquem exponentem, & habebis ſtatim characterem coſsicum ipſi exponenti ſupponendum: verbi gratia, Si cupias habere characterem coſsicum exponentis *6*, cape 2 & 3 (quia illi duo numeri in ſe multiplicati, producunt *6*) tum adde illorum characteres Q & C, & habebis Q C. Pro charactere exponentis *6*. Similiter character exponentis 8 & Q Q Q. Quia ſub exponentibus 2 & 4 qui inuicem multiplicati producunt 8, reperiuntur characteres Q. & Q Q. Sic character exponentis 12 foret Q Q C. Quia 12 eſt numerus productus per multiplicationem 2 in *6*. vel *3* in 4.

Quod ſi exponens eſt numerus primus (id eſt qui non producitur ex multiplicatione duorum aliorum conſiderabis quem ordinem teneat ab exponente 5. & eius characterem coſsicum vocabis ſur-ſolidum ſecundum, tertium, vel quartum, &c. Pro ipſius ordine character ipſius 5 eſt S. Character 7 eſt S 2. Character 11 eſt S 3. Et ſic conſequenter ſub exponentibus qui ſunt numeri

li

primi, collocabis reliquos ſurſolidos.

CAPVT PRIMVM.

Algorithmus numerorum coſsicorum ſimplicium, compoſitorum, vel diminutorum.

EXplicandum eſt primò quid ſit Algorithmus, quid numerus coſsicus ſimplex, quid compoſitus, quid diminutus. Nomine Algorithmi aliud nihil intelligo quam operationes comprehenſas ſub quatuor ſpeciebus quæ vocantur additio, ſubtractio, multiplicatio, diuiſio. Per numerum coſsicum ſimplicem intellige eum in quo non exprimitur ſignum † quod ſignificat plus, neque iſtud - quod ſignificat minus. Contrà verò, numerus compoſitus eſt qui habet plures particulas iunctas per ſignum † Diminutus autem ille eſt cuius particulæ nectuntur per ſignum . Numerus qui nullum habet ſignum ante ſe expreſſum, cenſetur habere ſignum †.

§. 1. *Additio numerorum coſsicorum ſimplicium.*

VEl numeri coſsici ſimplices ſunt eiuſdem denominationis, (id eſt eiuſdem characteris) vel diuerſæ: ſi eiuſdem, facienda eſt additio numerorum ſicut in Arithmetica vulgari, & ſummæ dandus eſt idem character. Exempli cauſa ſi vis addere 3 R cum 5 R, addendo 3 cum 5, habebis 8 R. Similiter, ſi addideris 23 Q cum 152 Q, fiet ſumma 175 Q.

Quod ſi ſint diuerſæ denominationis: hoc eſt, ſi habeant diuerſum characterem coſsicum, oportet eos addere interpoſito ſigno †. Vt ſi vis addere 6 R cum 4 Q, habebis ſummam 6 R † 4 Q. Similiter ſi addideris 22 cum 5 C, fiet ſumma 22 † 5 C.

§. 2. *Subſtractio numerorum coſsicorum ſimplicium.*

VEl coſsici ſimplices ſunt eiuſdem vel diuerſæ denominationis: ſi eiuſdem, facienda ſubſtractio numerorum, vt in Arithmetica vulgari, & reſiduo dandus idem character: verbi gratia, ſi vis ſubtrahere 3 Q & 8 Q, tollendo 3 & 8. habebis 5 Q pro reſiduo. Similiter ſi ſubtraxeris 23 C & 175 C, fiet reſiduum 152 C.

Si verò coſsici ſimplices ſint diuerſæ denominationis, facienda ſubſtractio per interpoſitionem ſigni - verbi cauſa, ſi vis tollere 6 R & 4 Q, habebis pro reſiduo 4 Q - 6 R. Similiter, ſi ſubtraxeris 38 C & 825, reſiduum erit 825 - 38 C.

§. 3. *Multiplicatio numerorum coſsicorum ſimplicium.*

HAbendà hic eſt ratio tùm numerorum abſolutorum tum characterum coſsicorum: ſi ergo coſsicus multiplicetur per abſolutum, ducendi erunt primùm numeri abſoluti inter ſe, & producto dandus idem character; vt ſi multiplices 5 R per 13. ducendo 5 in 13 fit 65, cui ſi adnectas characterem R, habebis productum 65 R. Similiter ſi velis multiplicare 23 per 18 Q, productus erit 414 Q.

Quod ſi multiplicentur numeri coſsici per numeros coſsicos, oportet multiplicare numeros abſolutos inter ſe, & producto dandus eſt character exponentis, qui fit addendo exponentes qui pertinebant ad characterem multiplicatum & multiplicantem: vt ſi multiplices 2 R per 3 Q, fit 6 C, tùm quia ducendo 2 in 3, fiunt 6, tùm quia exponens R eſt vnitas quæ addita exponenti Q

nimirum 2, facit ſummam 3 quæ eſt exponens characteris C, qui propterea debet dari producto. Similiter ſi velis multiplicare 3 R per 82 S. Ducendo 3 in 82. fit 246. Deinde exponens characteris R. eſt 1. exponens verò characteris S. eſt 5. Illi duo exponentes ſimul additi faciunt ſummam 6 quæ ſumma 6 eſt exponens characteris QC. Quare producto 246 dandus eſt character QC. Et ita multiplicando 3 R per 82 S. Fit productus 246 QC.

§. 4. *Diuiſio numerorum coſſicorum ſimplicium.*

MVlta ſolent hic ſpeculatiuè dici: praxis verò in hoc conſiſtit vt perficiatur diuiſio ſupponendo numerorum diuiſorem numero diuidendo per interiectam lineolam, vt fit in fractionibus. Verbi cauſa. ſi vis diuidere 12 Q per 5 R, habebis pro quotiente $\frac{12\,Q}{5\,R}$. Similiter, diuidendo 6 QC per 8 S. Habebis pro quotiente $\frac{6\,QC}{8\,S}$.

§. 5. *Additio numerorum compoſitorum & diminutorum.*

OBſeruandus hic aliquis ordo, & numeri taliter diſponendi, vt qui ſunt eiuſdem denominationis ſibi inuicem reſpondeant: hoc facto ſi habeant idem ſignum, adduntur vt in Arithmetica vulgari & ſummæ datur idem ſignum: verbi gratia, ſi vis addere 7 Q † 2 R - 4 C cum 3 Q - 2 C habebis ſummam 10 Q † 2 R - 6 C vt ex propoſito ſchemate facilius intelliges.

7 Q	†	2 R	-	4 C
3 Q	†	0	-	2 C
10 Q	†	R	-	6 C.

Similiter ſi vis addere 5 † 7 Q † 8 R cum 3 Q † 9 R - 8 ordinabis numeros modo ſupradicto & habebis 10 Q † 17 R - 13 vt ex ſchemate intelligi facile poteſt.

7 Q † 8 R - 5
3 Q † 9 R - 8
10 Q † 17 R - 13.

Quod ſi numeri habeant ſigna diuerſa, minor ſubtrahitur ex maiore, & reſiduo datur ſignũ maioris numeri exempli cauſa, ſi vis addere 6 Q † 7 R cum 7 Q - 12 R habebis pro ſumma totali 13 Q - 5 R quia minor numerus 7 propter diuerſitatem ſignorum ſubtrahitur & maiori 12 & reſiduum eſt 5. Similiter addendo 2 Q - 8 R † 6 C cum 3 Q † 7 R - 27 C fit ſumma 5 Q - 1 R - 21 C.

6 Q † 7 R
7 Q - 12 R
13 Q - 5 R.

2 Q - 8 R † 6 C
3 Q † 7 R - 27 C
5 Q - 1 R - 21 C.

§. 6. *Subſtractio numerorum compoſitorum & diminutorum.*

Connecte ſingulas particulas numeri ſubtrahendi cum particulis numeri à quo debet fieri ſubſtractio, mutatis tamen prius ſignis numeri ſubtrahendi; tùm ſi qui ſint numeri eiuſdem denominationis, addantur inter ſe, & ſic abſoluta erit ſubſtractio. Exempli gratia ſi vis ſubtrahere 18 Q - 15 R de 6 Q - 10 R, commutato ſigna particularum numeri ſubtrahendi, & habebis 15 R - 18 Q. Tùm per § præcedentẽ connecte illas particulas cum particulis numeri 6 Q - 10 R, & reſiduum ſubſtractionis faciendæ erit 5 R - 12 Q.

6 Q - 10 R
18 Q - 15 R
6 Q - 10 R † 15 R - 18 Q
5 R - 12 Q

Similiter ſi quis ſubtrahat 6 - 2 Q - 3 R de 3 Q † 7 R - 27 C. Commutatis particulis numeri ſubtrahendi habebis 27 C - 7 R - 3 Q quare ſi hunc numerum connectas cum 6 2 Q - 3 R addendo inter ſe particulas eiuſdem denominationis, habebis 5 Q - 27 C † 10 R - 6 pro reſiduo vt videre eſt in exemplo appoſito.

3 Q † 7 R 27 C
6 - 2 Q - 3 R
3 Q † 7 R - 27 C - 6 † 2 Q † 3 R
5 Q † 10 R - 27 C - 6

§. 7. *Multiplicatio numerorum compoſitorum & diminutorum.*

PRimò recolendum quod diximus in §. 3. de numeris coſſicis ſimplicibus: Deinde aduertendum ſingulas particulas numeri multiplicati debere duci in ſingulas particulas multiplicatoris, vt fit in Arithmetica vulgari: Tertiò denique mandandum memoriæ eadem ſigna ponere ſignum †, diuerſa ſigna ponere ſignum -. Verbi gratia, ſi multiplices 3 Q - 2 R per 8 R. Multiplica primò 2 R per 8 R & fiunt 16 Q ex §. 3. Et quia multiplicatus & multiplicator habent ſigna diuerſa, dandum eſt producto ſignum - & proinde fiet - 16 Q. Præterea 3 Q per 8 R producunt 24 C, cui dandum eſt ſignum † propterea quod multiplicatus & multiplicator habent eadem ſigna. Itaque ſic ſtabit exemplum.

3 Q - 2 R
8 R
24 C - 16 Q

Similiter praxis multiplicationis apparebit in duobus ſequentibus exemplis.

2 R † 4 Q
3 Q - 5
- 10 R - 20 Q
6 C † 12 QQ
6 C † 12 QQ - 10 R - 20 Q

3 R - 2 Q † 8
6 † 3 R - 5 Q
- 15 C † 10 QQ - 40 Q
9 Q - 6 C † 24 R
18 R - 12 Q † 48
42 R - 43 Q - 21 C † 48 † 10 QQ

§. 8. *Diuiſio numerorum compoſitorum vel diminutorum.*

ABſoluitur breuiter ponendo lineolam inter numerum diuiſum & diuiſorem, ita tamen vt diuiſus ſit in ſuperiori loco, diuiſor verò in inferiori: vt ſi lubeat diuidere 4 C - 3 Q † 2 R per 5 R - 4 C, habebis pro quotiente $\frac{4 C - 3 Q \dagger 2 R}{5 R - 4 C}$. Similiter ſi velis diuidere 5 Q - 2 R per 3 † 5 R - 8 Q fiet quotiens $\frac{5 Q - 2 R}{3 \dagger 5 R - 8 Q}$.

§ 9. *Algorithmus fractionum.*

MVlta hic nectunt præcepta Algebriſtæ: Ego tamen nullum omnino trado, quia ſi rectè intelligantur fractiones Arithmeticæ vulgaris, & aliunde obſeruentur omnia quæ hactenus dicta ſunt, experieris omnes præceptiones particulares ſuperfluas fore, vt potè quæ contineantur in illis.

CAPVT II.

Regula Algebræ & eius explicatio.

NEceſſarium plane fuit præmittere operationes præcedentes, vt ſenſim ſterneretur via ad Regulam Algebræ, quæ ſine additione, ſubſtractione, multiplicatione, & diuiſione perfici non poteſt. Nunc ergo iis expeditis ſupereſt proponamus Algebræ regulam quæ vnica eſt, & eius ſingulas partes clarè breuiterque explicemus.

§. 1. *Regula Algebræ.*

PRo numero incognito ponatur vna radix quæ iuxta quæſtionis tenorem examinetur, donec peruentum ſit ad æquationem. Hęc æquatio reducatur, ſi reductione opus eſt. Deinde diuidatur altera pars ęquationis per numerum maioris characteris coſſici. His enim peractis vel quotiens, vel quotientis aliqua radix exhibebit valorem radicis quæ prius erat incognita. Ecce tibi integram Algebræ regulam, verùm ſingulæ eius partes explicandæ.

§. 2. *Quomodo inuenienda ſit æquatio.*

HAbetur in regula id fieri debere examinando radicem iuxta quæſtionis tenorem, id eſt, aduertendo diligenter ſingulas conditiones problematis propoſiti, vt integrè illis ſatisfiat, poſtquam enim illis ſatisfactum eſt, reperitur æquatio inter aliquem numerum datum, & alium numerum inuentum. Exempli gratia, quæritur numerus qui additus cum ſuo quadrato faciat 20. Pono hunc numerum qui mihi eſt ignotus, eſſe 1 R, eius quadratum eſt 1 Q (ſiquidem omnis numerus mul-

tiplicatus per ſeipſum, producit ſuum quadratum) 1 R autem multiplicata per 1 R, facit 1 Q per §. 3. capitis primi. Ergo 1 R † 1 Q æquatur 20. Hic vides ęquationem inter numerum datum 20, & numerum inuentum 1 R † 1 Q.

Similiter ſi quæratur numerus, à quo ſublato vno triente & vno quadrante, reſidui quadratum æquetur numero inueniendo addito cum 13. Pono hunc numerum inueniendum eſſe 1 R, huius triens eſt $\frac{1\,R}{3}$ & quadrans eſt $\frac{1\,R}{4}$ quibus ſubductis ab 1 R, reſiduum eſt $\frac{5\,R}{12}$. Huius reſidui quadratum eſt $\frac{25\,Q}{144}$ quod iuxta quæſtionis tenorem debet æquari numero inueniendo addito cum 13. Numerus autem inueniendus eſt 1 R. Ergo 1 R † 13 æquantur $\frac{25\,Q}{144}$. Ecce ęquationem inuentam.

§. 5. *Quomodo reducenda ſit æquatio.*

AEquatio inuenta reducitur vel addendo eundem numerum vtrique termino æquationis, vel ſubtrahendo eundem numerum ab vtroque termino, vel ſane multiplicando aut diuidendo vtrumque terminum ęquationis per eundem numerum; ita enim ſemper manet illæſa & integra æquatio poſt eiuſmodi operationes: vt ſi 1 R † 1 Q æquatur 20, erit etiam æquatio inter 1 R † 1 Q † 2 C & 20 † 2 C. Addendo videlicet 2 C vtrique parti æquationis. Ita ſubtrahendo vtrobique 1 R, erit etiam æquatio inter 1 Q & 20 - 1 R. Similiter multiplicando vel diuidendo vtrumque terminum æquationis per 3, habebis quoque æquationem inter 3 R † 3 Q & 60 per multiplicationem; & per diuiſionem deprehendes etiam æquationem inter $\frac{1\,R\,\dagger\,1\,Q}{3}$ & $\frac{20}{3}$.

Porro, vt fiat hæc reductio vtiliter, ità procedendum eſt in ea, vt maior character coſſicus maneat ſolitarius ex vna parte æquationis afficiens vnitatem: proindeque ex omnibus reductionibus mox factis, nulla eſt vtilis ad finem ab Algebra intentum pręter ſecundam, in qua 1 Q reperitur ſolitarium ex vna parte & æquale 20 - 1 R.

Pari modo ſi cupias reducere æquationem alteram in §. 2. inuentam inter 1 R † 13 & $\frac{25\,Q}{144}$ ita procedes: quoniam maior character coſſicus eſt ſolitarius ex vna parte, laborabis tantùm ad hoc vt afficiat vnitatem id autem præſtabis hoc modo, reduces 1 R † 13 in fractionem ſuppoſita vnitate & interiecta lineola: ſic enim habebis $\frac{1\,R \dagger 13}{1}$ æquari $\frac{25\,Q}{144}$. Quoniam verò illę duæ fractiones ſunt æquales, erit talis ratio numeratoris primæ fractionis ad ſuum denominatorem; qualis eſt numeratoris ſecundæ fractionis ad ſuum denominatorem: igitur multiplicando eas fractiones decuſſatim, productus ex primo in quartũ, æquabitur producto ex ſecundo in tertium, per Propoſ. 19. ſeptimi Elementi. Et ita 144 R † 1872 ęquabuntur 25 Q. Ergo

$$\frac{1\,R \dagger 13}{1} \times \frac{25\,Q}{144}.$$

diuidendo vtrumque terminum æquationis illius poſterioris per 25 numerum maioris characteris, erit æquatio inter $\frac{144\,R \dagger 1872}{25}$ & 1 Q. Vbi vides maiorem characterem coſſicum ex vna parte ſolitarium afficere vnitatem. Hic eſt vnicus finis reductionis.

Dixi in regula Algebræ reducendam æquationem cum reductione opus eſt, quia contingit aliquando vt nulla ſit neceſſitas, dum videlicet reperitur æquatio inter duos numeros coſſicos ſimplices collaterales (nu-

meros collaterales voco, quorum exponentes vnitate dumtaxat ſe ſuperant) vt ſi reperta ſit æquatio inter 60 R & 15 Q, nulla eſt opus reductione, ſed ſtatim reperitur valor radicis 4, diuidendo 60 per 15, qui eſt numerus maioris characteris coſſici.

§. 4. *Quando ſit extrahenda Radix.*

QVoties numeri coſſici ſunt ſimplices & collaterales, non eſt opus extractione radicis, ſed ſatis eſt facere diuiſionem per numerum maioris characteris; quotiens enim illius diuiſionis oſtendit valorem radicis primò poſitæ. Vt ſi ſit æquatio inter 2 R & 28. diuido 28 per 2. & quotiens 14 eſt valor 1 R. Similiter ſi 24 Q reperiantur ęqualia 3 C, diuido 24 per 3 & quotiens 8 eſt valor radicis.

Sed cum termini æquationis non ſunt collaterales, extrahenda eſt aliqua radix quadrata, cubica, quadrato-quadrata, &c. iuxta characterem coſſicum qui remanebit poſt hypobibaſmum.

Quod ſi quęras quid ſit hypobibaſmus & quomodo fiat: Reſpondeo hypobibaſmum aliud nihil eſſe quam depreſſionem characteris, illumque fieri per ſubſtractionem minoris exponentis & maiore: vt reperta æquatione inter 10 QC & 90 QQ cognoſco in tabula initio propoſita exponentem QC eſſe 6. & exponentem QQ eſſe 4.. Quare tollo 4 & 6, & reſtat 2 qui eſt exponens Q. Et proinde concludo 10 Q æquari 90. Ita deprimuntur characteres illæſa æquatione. His igitur peractis diuido 90 per 10 qui eſt numerus maioris characteris, & inuenio 9 ex quo eruenda eſt radix quadrata propter characterem Q, & habetur 3 pro valore radicis.

§. 5. *Quomodo ſit extrahenda radix ex numeris compoſitis & diminutis.*

NOndum planè explorata eſt ratio extrahendi radices ex numeris compoſitis & diminutis, niſi quando exponentes trium terminorum æquationis ſeruant inter ſe ſaltem in aliquo ſitu proportionem Arithmeticam: vt ſi reperiatur æquatio inter 1 Q & 20 - 1 R, tunc poterit erui radix de 20 - 1 R quia exponentes trium numerorum qui componunt æquationem, ſunt 2. 0. 1. qui hoc modo diſpoſiti 0. 1. 2. ſeruant eamdem diſtantiam, & proinde eamdem Arithmeticam proportionem.

Verùm quæret aliquis qualem oporteat eruere radicem & quomodo id cognoſcetur. Reſpondeo maiorem characterem qui relictus fuit poſt hypobibaſmum præclarè oſtendere qualis radix ſit eruenda; vt in exemplo propoſito, vbi 1 Q æquatur 20 - 1 R, debet erui radix quadrata, propter maiorem characterem qui eſt Q. Modus autem faciendi hanc extractionem continetur vniuerſaliter, his præceptis.

Primò dimidium numeri radicum ſume. Secundò huius dimidii quadrato adde vel detrahe numerum abſolutum, prout afficitur ſigno † vel -. Tertiò ſummæ vel reſidui radicem extrahe. Quartò huic radici adde vel detrahe dimidium numeri radicum pro qualitate ſigni: atque hæc vltima ſumma vel vltimum reſiduum exhibebit valorem radicis primò poſitæ. Exempli gratia quærendus ſit numerus cuius duplum additum eius quadrato faciat 24. inueniam per §. 2. æquationem inter 2 R † 1 Q & 24. Prætereà reducam hanc æquationem per §. 3. tollendo vtrobique 2 R, vt maior character coſſicus remaneat ſolitarius, & ſic 1 Q æquatur 24 - 2 R. Inſuper adnoto non eſſe opus diuiſione

quia maior character afficit vnitatem. Deinde deprehendo tres exponentes terminorum ęquationis ſeruare proportionem Arithmeticam. quare extraho radicem quadratam de 24 - 2 R hoc modo. Dimidium numeri radicum eſt 1 quia numerus radicum eſt 2. Secundò huius dimidii quadratum eſt 1. cui addo numerum abſolutum 24, quia cenſetur habere ſignum †, & fit 25. Tertiò eruo radicem quadratam ex 25, & eſt 5. quartò huic radici 5 detraho dimidium numeri radicum nempè vnitatem propter ſignum - & reſiduum 4 eſt valor radicis quæ prius erat ignota.

Similiter ſi velis eruere radicem numeri compoſiti $\frac{144 R \dagger 1872}{25}$ qui inuentus eſt æqualis 1 Q, in §. 3. operaberis hoc modo. Numerus radicum eſt $\frac{144}{25}$ cuius dimidium eſt $\frac{72}{25}$. Huius dimidii quadratum eſt $\frac{5184}{625}$. cui ſi addas numerum abſolutum $\frac{1872}{25}$ affectum ſigno †, fiet ſumma $\frac{5\ 984}{625}$. Cuius ſummæ radix quadrata eſt $\frac{228}{25}$. Quæ radix addita dimidio numeri radicum nempe $\frac{72}{25}$ exhibet $\frac{300}{25}$ ſiue 12 pro valore 1 R.

Hic notandum numeros diminutos in quibus abſolutus afficitur ſigno habere duas radices. Maior eruitur vt dictum eſt: minor verò, habetur ſubtrahendo radicem quadratam reſidui ex dimidio numeri radicum: verbi gratia, ſi quæratur numerus, cuius octuplum mulctatum 12 ęquetur eius quadrato, inuenietur per §. 2. æquatio inter 1 Q & 8 R - 12. Maior radix erit 6 minor verò 2, in hac quæſtione vtraque radix exhibet ſolutionem: hoc tamen non ſemper contingit.

Quod ſi extrahenda foret radix quadrato-quadrata, oporteret primò eruere radicem quadratam vt mox

dixi, deinde ex hac radice quadrata, ſterùm eruenda eſſet radix quadrata, vt docetur in Arithmetica vulgari, & tunc haberetur radix quadrato-quadrata numeri propoſiti: vt inuenta æquatione inter 1 Q Q & 2 Q † 8. deprehendes radicem quadratam eſſe 4 per methodum mox traditam ſumendo dimidium numeri radicum ſiue numeri minore charactere affecti qui tunc ſubit vicem radicum, &c. Tùm ex 4. erues iterum radicem quadratam quæ eſt 2. habebiſque valorem radicis primò poſitæ. Pari modo ſi foret inuenta æquatio inter 1 QC & 2 C † 48. Eruenda primùm foret radix quadrata de hoc numero compoſito 2 C † 48 & eſt 8, ex quo iterùm oporteret extrahere radicem cubicam, quę erat extrahenda radix quadrato-cubica, vt patet ex charactere Q C. qui eſt in vno termino æquationis, & ità 2 eſt valor radicis.

§. 6. *Quomodo cognoſcatur an quæſtio ſit impoßibilis, vel ridicula, vel male propoſita.*

PAtet ſtatim quæſtionem eſſe impoſſibilem quando poſt completas operationes contingit æquatio inter minorem & maiorem numerum vel ſimplicem vel compoſitum: vt ſi poſt examinatas alicuius problematis conditiones, reperias æquationem inter 6 R & 24 R. Vel inter 3 Q † 5 & 4 † 2 Q, pars enim æquaretur toti.

Cognoſcitur deinde quæſtionem eſſe ridiculam & inutilem dum contingit æquatio inter duos numeros ęquales & eiuſdem denominationis: vt ſi inuenta foret æquatio inter 8 Q & 8 Q, inde enim nulla poteſt erui noua cognitio.

Denique male propoſitam eſſe quæſtionem conſtat, dum ſine vlla difficultate & induſtria deprehenduntur

multi numeri, ſatisfacientes omnibus conditionibus p oblematis propoſiti.

CAPVT III.

Algorithmus & vſus ſecundarum radicum.

ALiquando accidit vt ſimul & ſemel proponantur plures numeri inueniendi, & tunc non vna tantùm ſed plures radices ponuntur pro ſolutione quæſtionis, tùm ad facilius operandum, tùm ad vitandam confuſionem quę facilè oriretur ex primis radicibus. Solent igitur Algebriſtæ in hoc caſu vti ſecundis radicibus quas ita exprimunt. 1 A, 1 B, &c.

§. 1. *Additio ſecundarum radicum.*

SI ſecundæ radices ſunt eiuſdem denominationis & characteris, adduntur earum numeri, & ſummæ factę datur eadem denominatio & character: vt ſi addas 5 A cum 4 A, fiunt 9 A. Similiter 3 B cum 21 B, fiunt 24 B. Si verò ſunt diuerſæ denominationis, addendæ ſunt per ſignum †: vt ſi velis addere 5 A cum 5 B, fiunt 5 A † 6 B pro ſumma.

§. 2. *Subſtractio ſecundarum radicum.*

SI ſecundę radices ſunt eiuſdem denominationis, tollitur vnus numerus ab altero & reſiduo datur eadem denominatio: vt ſi tollas 5 A de 9 A, remanent 4 A. Similiter ſi tollas 21 B de 24 B, reſtant 3 B. Si vero ſunt diuerſę denominationis, tollitur vna de alia per interpoſitionem ſigni - vt ſi velis tollere 6 B de 8 A, reſiduum eſt 8 A - 6 B.

§. 3. *Multiplicatio ſecundarum radicum.*

SI ſunt eiuſdem denominationis, non aliter procedi-tur quàm in primis radicibus: vt ſi multiplices 4 A per 7 A habebis 28 A Q pro producto. Si autem ſunt diuerſæ denominationis, vtraque denominatio retinetur in producto: vt ſi ducas 3 R in 5 A, fiunt 15 R A. Similiter ſi 2 B multiplices per 4 A, fiunt 8 B A.

§ 4. *Diuiſio ſecundarum radicum.*

POteſt ſemper abſolui hæc diuiſio per lineolam di-uidendo & diuiſori interiectam: nihilominus tamen diligenter eſt adnotandum quod quando diuiditur numerus adſertus duabus radicibus per alium numerum adſertum vna ex iiſdem radicibus, retinetur in quotiente altera: exempli gratia, ſi 3 A R diuidas per 2 A, habebis $\frac{3\,R}{2}$ pro quotiente. Quod facile ex hypobibaſmo intelligi poteſt.

§. 5. *Extractio & vſus ſecundarum radicum.*

POſtquam reperta eſt & reducta æquatio per operationes ſecundarum radicum, eruitur radix vti diximus in capite præcedenti: verbi cauſa ſi 1 A Q æquatur 25, dicendum erit 5 eſſe valorem radicis ſecundæ. Similiter ſi 1 A Q æquatur 4 A † 12. Sumendum erit dimidium numeri radicum nempe dimidium 4, &c. vt explicatum eſt in §. 5. capitis præcedentis; & repe-rietur 6 pro valore 1 A.

Porrò cum finis ſecundarum radicum ſit vt reducantur ad primas; poſt eiuſmodi reductionem, incipienda

iterùm eſt operatio, & ponendum per primas radices id quod inuentum eſt pro valore ſecundatum, vt oſtendetur infrà Capite quinto.

CAPVT IV.

Algorithmus numerorum ſurdorum ſiue irrationalium, vnà cum extractione radicis.

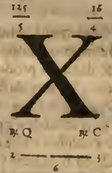
RAdices ſurdas ſiue irrationales eas vocamus quæ ſignum aliquod radicale habent ante ſe, & quæ propriè loquendo ſunt numeri abſoluti, licet non poſſint exprimi vllo numero communi, nec integro, nec fracto. Signum hoc radicale ita deinceps deſignabimus, ℞.

Radices ſurdæ aliæ ſunt ſimplices vt ℞ Q 5 id eſt radix quadrata 5 vel ℞ C 10, hoc eſt radix cubica 10. Aliæ ſunt compoſitæ vt ℞ Q 5 † ℞ C 6. Id eſt radix quadrata 5 plus radice cubica 6. Et inter compoſitas aliquæ vocantur vniuerſales quarum ſignum radicale extenditur ad omnes particulas ſequentes quæ parentheſi includuntur, vt R Q (14 † R Q 4) id eſt radix quadrata numeri 14 coniuncti cum radice quadrata 4. Qui totus numerus eſt 4. Nam 14 † radice quadrata 4 quæ eſt 2, facit 16, cuius radix quadrata eſt 4. Quando deinceps apponemus ſimpliciter ℞ ſine adiuncto intelligemus radicem quadratam.

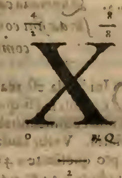
§. 1. *Reductio radicum ſurdarum ſimplicium ad eamdem denominationem.*

COllocanda ſunt 1. ſigna radicalia ſub numeris ad quos attinent. 2. multiplicandi ſunt numeri decuſſatim per ſigna vt habeantur alii noui. 3. Addenda

ſunt ſigna inter ſe, quod fit. multiplicando eorum exponentes & producti characterem faciendo communem duobus nouis numeris iam inuentis. Exempli gratia, ſi velim reducere ad eamdem denominationem ℞ Q 5 & ℞ C 4. Collocandæ ſunt primò illæ radices ſicut hic collocantur. Deinde multiplicandi ſunt numeri per ſigna radicalia decuſſatim, 4 videlicet quadratè propter ℞ Q oppoſitam, & 5 cubicè propter ℞ C oppoſitam; & ita habentur noui numeri producti 16 & 125. Tertiò exponentes ſignorum ℞ Q & ℞ C ſunt 2 & 3 quorum productus eſt 6, ſumo igitur in tabula initio propoſita characterem exponentis 6 qui eſt Q C pro denominatore communi, & loco duarum priorum radicum ſurdarum quæ erant diuerſæ denominationis, ſcilicet ℞ Q 5 & ℞ C 4, habebo duas nouas eiuſdem denominationis & valoris, nempe ℞ Q C 125 & R Q C 16.



Paulò aliter numerus abſolutus & radix reducuntur ad eamdem denominationem; vt ſi 2 & ℞ Q 8 debeant hoc modo reduci, collocabuntur vt ſuprà. Et 2 quadratè multiplicabitur propter ℞ Q oppoſitam, ſed neque 8 ducetur in O propter exponentem O neque 2 exponens Q in O propter eamdem rationem. Quare 2 & ℞ Q 8 reducentur ad ℞ Q 4 & ℞ Q 8. Et ſic quando proponitur numerus abſolutus reducendus ad eamdem denominationem



cum radice, oportet tantùm multiplicare numerum abſolutum in ſe ſecundum exigentiam characteris radicalis.

§. 2. *Multiplicatio & diuiſio radicum ſurdarum ſimplicium.*

SI radices illæ ſunt eiuſdem denominationis, oportet duntaxat multiplicare vel diuidere numeros inter ſe, & dandum producto vel quotienti idem ſignum radicale. Vt ℞ 7 ducta in ℞ 2 facit ℞ 14. Et ℞ C 2 in ℞ C 32 facit ℞ C 64. Hoc eſt 4. Similiter ℞ 20 diuiſa per ℞ 10 exhibet ℞ 2 pro quotiente & ℞ C 96 diuiſa per ℞ C 4 exhibet ℞ C 24 pro quotiente.

Quod ſi radices ſunt diuerſæ denominationis, reducendæ ſunt prius ad eamdem denominationem per §. præcedentem, & tunc facienda multiplicatio vel diuiſio vt mox dictum eſt: exempli gratia ℞ 3 multiplicata per 2 exhibet productum ℞ 12. Item ℞ 5 per ℞ C 4 exhibet productum ℞ Q C 2000. Similiter ℞ 12 diuiſa per 2 dat quotientem ℞ 3 & ℞ Q C 2000 diuiſa per ℞ C 4 dat in quotiente ℞ 5.

§. 3. *Quomodo cognoſci poteſt, an duæ radices ſurdæ ſint commenſurabiles vel incommenſurabiles.*

DIuidenda eſt maior radix per minorem per §. præcedentem, ſi quotiens eſt rationalis, ambæ radices erunt commenſurabiles: ſi contra, erunt incommenſurabiles. Verbi cauſa, quoniam ℞ 24 diuiſa per ℞ 6 dat pro quotiente ℞ 4 quæ eſt 2 numerus rationalis, duæ illæ radices ℞ 24 & ℞ 6 ſunt commenſurabiles. Similiter, quoniam ℞ 24 diuiſa per ℞ 8 dat pro quotiente ℞ 3 quæ eſt numerus ſurdus & irrationalis, concluden-

dum has duas radices ℞ 24 & ℞ 8 eſſe incommenſurabiles.

§. 4. *Additio duarum radicum ſimplicium irrationalium.*

SI radices ſint incommenſurabiles, non poſſunt addi niſi per ſignum † vt ℞ 24 addita cum ℞ 8 facit ℞ 24 † ℞ 8. Et ℞ C 36 addita cum ℞ C 6 facit ℞ C 36 † ℞ C 6.

Quod ſi eiuſmodi radices ſint commenſurabiles, quotienti rationali qui fit diuidendo maiorem per minorem, addenda eſt vnitas, & habebitur ſumma quæ multiplicata per minorem duarum radicum addendarum dabit productum qui erit ſumma quæſita: exempli gratia, quoniam ℞ 24 & ℞ 6 commenſurabiles, ſic addentur. Diuiſa maiore per minorem habebo 2 pro quotiente rationali, huic quotienti 2 addo vnitatem & fit 3, per quem (reductum tamen prius ad eamdem denominationem) multiplico ℞ 6 quæ eſt minor duarum propoſitarum, & fit ℞ 54 pro ſumma quæſita.

℞ 24 ℞ 6	(℞ 4 vel 2 1 ――― 3	℞ 6 3 ――― ℞ 54

Similiter ℞ 32 diuiſa per ℞ 2 exhibet 4 pro quotiente rationali, cui addita vnitate fit 5, per quem ſi multiplices ℞ 2 fit ſumma quæſita ℞ 50. Duarum radicum ℞ 32 & ℞ 2. Pari modo ℞ C 80 addita cum ℞ C 10 facit pro ſumma quæſita ℞ C 270.

§. 5. *Subſtractio radicum ſimplicium irrationalium.*

SI radices ſint incommenſurabiles ſubtrahitur minor à maiore per ſignũ - vt ℞ 8 ſubſtracta de ℞ 24 exhibet ℞ 24 - ℞ 8 pro reſiduo. Et ℞ C 6 ſubſtracta de ℞ C 36 dat reſiduum ℞ C 36 - ℞ C 6.

Si verò ſint commenſurabiles quotienti rationali qui fit diuidendo maiorem per minorem, detrahitur vnitas & per reſiduum multiplicatur minor propoſitarum radicum habeturque, reſiduum quæſitum: vt ſi velis tollere ℞ 6 de ℞ 24, diuidendo maiorem per minorem habetur quotiens rationalis 2, ex quo ſublata vnitate, remanet 1, per quam minor radix nempe ℞ 6 multiplicata, exhibet ℞ 6 pro reſiduo.

℞ 24	(℞ 4	vel 2	℞ 6
℞ 6		1	1
		1	℞ 6

Similiter ℞ 50 diuiſa per ℞ 2 exhibet 5 pro quotiente rationali, cui detracta vnitate fit 4, per quem ſi multiplices ℞ 2, fit ℞ 32 pro reſiduo quæſito ſubſtractionis ℞ 2 & ℞ 50.

Pari modo ℞ C 10 ſublata de ℞ C 270 exhibet ℞ C 80 pro reſiduo quęſito.

§. 6. *Additio & ſubſtractio numerorum ſurdorum, compoſitorum & diminutorum.*

NVllum hic trado præceptum nouum: aduerte tantùm ad ea quæ dicta ſunt circa ſignum † & - in paragrapho quinto & ſexto, cap. 1. Et ad id quod mox.

fuit explicatum in paragrapho 4 & 5 huius cap. Circa additionem & ſubſtractionem numerorum ſurdorum ſimplicium, & nulla erit difficultas: vt ſi oporteat addere 5 † ℞ 24 cum ℞ 6 † 3 aut 6 - ℞ 3 cum ℞ 27 - 2 fit ſumma 8 † ℞ 54. aut 4 † ℞ 12.

5 † ℞ 24	exempla	6 - ℞ 3
3 † ℞ 6	additionis	℞ 27 - 2
8 † ℞ 54		4 † ℞ 12

Similiter ſi oporteat tollere 3 - ℞ 6 & 5 † ℞ 24 aut 8 - ℞ 50 de ℞ 72 - 4 fit reſiduum primæ ſubſtractionis ℞ 54 † 2. Et reſiduum ſecundæ, ℞ 242 - 12.

5 † ℞ 24	exempla	℞ 72 - 4
3 - ℞ 6	ſubſtractionis	8 - ℞ 50
℞ 54 † 2.		℞ 242 - 12.

§. 7. *Multiplicatio numerorum ſurdorum compoſitorum & diminutorum.*

IN hac multiplicatione nullis eſt opus nouis pręceptis: recole tantùm eadem ſigna ponere in producto ſignum †, & diuerſa ſignum - itemque particulares ſingulas vt rite multiplicentur inter ſe, debere prius ad eamdem reduci denominationem.

5 † ℞ 24	exempla	℞ 2 † 7
3 - ℞ 6	multiplicationis	℞ 2 † 7
- ℞ 150 - ℞ 144 vel 12.		† ℞ 98 † 49
15 † ℞ 216		2 † ℞ 98
15 † ℞ 216 - ℞ 150 - ℞ 144		2 † ℞ 98 † ℞ 98 † 49
vel per reductionem		vel per reductionem
3 † ℞ 6 productus		51 - ℞ 392 productus.

§. 8. *Diuiſio numerorum ſurdorum compoſitorum & diminutorum.*

SI diuiſor eſt ſimplex, facilè fit diuiſio ponendo lineolam inter diuiſorem & numerum compoſitum diuidendum: vt ſi oporteat diuidere ℞ 2 † ℞ 5 per 8, quotiens diuiſionis erit $\frac{℞ 2 † ℞ 5}{64}$.

Sed quia poteſt aliquando contingere vt diuiſor ſit etiam numerus compoſitus vel binomium, id eſt, numerus compoſitus ex duabus particulis coniunctis per ſignum † vel trinomium, id eſt, numerus compoſitus ex tribus particulis &c. Ideò neceſſe eſt explicare quomodo hæc diuiſio perfici poſſit.

Si diuiſor eſt binomium, multiplicandus eſt per eius apotomem tam numerus diuidendus quàm diuiſor (ſi verò diuiſor eſſet apotome, multiplicandus eſſet per eius binomium tam diuiſor quam numerus diuidendus) per hanc multiplicationem habebitur nouus diuidendus & nouus diuiſor: nouus autem diuiſor erit ſemper rationalis, & proinde ſupponendus tantùm erit numero diuidendo per interiectam lineolam: verbi gratia, ſi velim diuidere ℞ 6 - 2 per ℞ 5 † ℞ 3 capio apotomem diuiſoris nempe ℞ 5 - ℞ 3 (apotome enim alicuius binomij continet eoſdem plane numeros binomij cum ſigno -) per quam multiplico numerum diuidendum & diuiſorem & & ex priori illarum multiplicationum, fit productus ℞ 30 - ℞ 20 - ℞ 18 † ℞ 12 pro nouo diuidendo: ex poſteriori autem multiplicatione fit 2 pro nouo diuiſore: proindeque quotiens diuiſionis eſt $\frac{℞ 30 - ℞ 20 - ℞ 18 † ℞ 12}{4}$.

℞ 6

℞ 6 − 2	℞ 5 † ℞ 3
℞ 5 − ℞ 3	℞ 5 − ℞ 3
− ℞ 18 † ℞ 12	− ℞ 15 − ℞ 9
℞ 30 − ℞ 20	℞ 25 † ℞ 15
℞ 30 − ℞ 20 − ℞ 18 † ℞ 12	℞ 25 − ℞ 15 † ℞ 15 − ℞ 9
	vel per reductionem 2.

$$\left(\frac{\text{℞ } 30 - \text{℞ } 20 - \text{℞ } 18 \dagger \text{℞ } 12}{4}\right.$$

Quod ſi diuiſor ſit trinomium, ſeruanda eſt eadem methodus: multiplicandus, inquam, eſt tum diuidendus quum diuiſor per apotomem diuiſoris, vel vt magis propriè loquar, per eumdem diuiſorem, commutato tantùm ſigno vltimæ particulæ, & poſt multiplicationem habebitur nouus diuiſor qui erit duarum tantùm particularum: & proinde quæretur vt prius iterum nouus diuidendus & nouus diuiſor qui hac vice erit rationalis: vt ſi vis diuidere 4 per ℞ 2 † ℞ 3 † ℞ 6 fit nouus diuidendus ℞ 32 † ℞ 48 − ℞ 96 & nouus diuiſor ℞ 24 − 1 & poſt alteram operationem fit iterùm nouus diuidendus ℞ 768 † ℞ 1152 † ℞ 32 − ℞ 2304 ſiue 48 † ℞ 48 − ℞ 96 & nouus diuiſor ſimplex 23. Quare quotiens totius diuiſionis erit $\frac{\text{℞ } 768 \dagger \text{℞ } 1152 \dagger \text{℞ } 32 - 48 \dagger \text{℞ } 48 - \text{℞ } 96}{23}$ & quia ℞ 768 eſt commenſurabilis cum ℞ 48, itemque ℞ 1152 cum ℞ 32 quotiens erit $\frac{\text{℞ } 1200 \dagger \text{℞ } 1568 - 48 - \text{℞ } 96}{23}$ vt videre eſt in ſchemate operationum.

4
℞ 2 † ℞ 3 - ℞ 6
℞ 32 † ℞ 48 - ℞ 96 nouus diuidendus.

℞ 2 † ℞ 3 † ℞ 6
℞ 2 † ℞ 3 - ℞ 6
- ℞ 12 - ℞ 18 - 6
℞ 6 † 3 † ℞ 18
2 † ℞ 6 † ℞ 12
2 † ℞ 24 † 3 - 6 vel per reduct.
℞ 24 - 1 nouus diuiſor

℞ 32 † ℞ 48 - ℞ 96	℞ 24 - 1
℞ 24 † 1	℞ 24 † 1
℞ 32 † ℞ 48 - ℞ 96	† ℞ 24 - 1
℞ 768 † ℞ 1152 - ℞ 2304 vel 48	24 - ℞ 24
	23 nouus diuiſor

℞ 1200 † ℞ 1568 - 48 - ℞ 96 nouus diuidendus.

(℞ 1200 † ℞ 1568 - 48 - ℞ 96.
23

Denique ſi breuiter velis abſoluere diuiſionem abſq; tantis amphractibus, ſemper diuiſio valet dum ſupponitur diuiſor numero diuidendo: vt ſi diuidendus ſit ℞ 6 - 2 per ℞ 6 - per ℞ 5 † ℞ 3 quotiens erit ℞ 6 - 2 / ℞ 5 † ℞ 3.

§. 9. *Multiplicatio radicum vniuerſalium.*

Radix multiplicanda & radix multiplicatrix debent reduci ad ſua quadrata vel cubos ſecundum exigentiam ſigni radicalis, tùm facièda multiplicatio, vt dictum eſt in § 7. huius capitis: poſtremò, includenda omnia parentheſi, & præponendum producto ſignum radicale, vt ſi multiplicanda ſit ℞ (7 † ℞ 3) per 2. Quadratum numeri multiplicandi eſt 7 † ℞ 3. Quadratum verò

multiplicatoris eſt 4. Horum productus eſt 28 † ℞ 48 & proinde ſi hunc numerum includas parentheſi, eique præponas ſignum radicale, habebis ℞ (28 † ℞ 48) pro producto mu tiplicationis.

Similiter ſi multiplicandus eſſet hic numerus 7 - 1 R † ℞ (3 † 1 Q - 2 R) per 3 † 2 R productus foret 21 † 11 R - 2 Q † ℞ (27 - 3 Q † 18 R † 4 QQ † 4 C.)

§. 10. *Diuiſio radicum vniuerſalium.*

REducendus eſt numerus diuidendus & diuiſor ad quadrata, cubos, &c. Et facienda diuiſio, vt dictum fuit in §. 8, atque his peractis includendus quotiens parentheſi, præmiſſo eodem ſigno radicali : verbi cauſa, ſi oporteat diuidere ℞ (13 † ℞ 17) per ℞ 5. Quadrata eorum numerorum ſunt 13 † ℞ 17 & 5. Si autem diuidas 13 † ℞ 17 per 5 quotiens erit 2 [illegible] † ℞ $\frac{17}{25}$. Ergo ℞ (2 $\frac{3}{5}$ † ℞ $\frac{17}{25}$) erit quotiens diuiſionis propoſitæ.

§. 11. *Additio & ſubſtractio radicum vniuerſalium.*

PLurimi hic tradunt præcepta valde intricata in exemplis arte conquiſitis quæ vix vnquam operanti occurrunt. Modus breuiſſimus eſt radices vniuerſales addere per ſignum † & eas ſubtrahere per ſignum - vt ℞ (3 † ℞ 2 addita cum ℞ (℞ 5 † 6) exhibet ſummam ℞ (3 † ℞ 2) † ℞ (℞ 5 † 6) & hæc eadem prior radix ſubtracta ex poſteriori dat pro reſiduo ℞ (℞ 5 † 6) - ℞ (3 † ℞ 2.)

§. 12. *Extractio radicis ex binomiis & apotomis.*

1 CApe differentiam quadratorum vtriuſque partis binomij, 2. Radicem quadratam iſtius differentiæ adde & detrahe maiori parti. 3. Huius ſummæ & reſidui cape dimidium, 4. Iſtorum dimidiorum radices quadratas connecte per ſignum plus, ſi ſit binomium; & per ſignum - ſi ſit apotome, eritque abſoluta extractio radicis: exempli gratia, ſi vis extrahere radicem quadratam ex hoc binomio 6 † √ 20. Cape quadrata partium nempe 36 & 20. Horum quadratorum differentia eſt 16. Secundò huius differentiæ radix quadrata 4. addita & detracta maiori parti binomii quæ eſt 6. dat ſummam 10, & reſiduum 2. Tertiò ſummæ & reſidui dimidia ſunt 5 & 1. Quartò ſi horum numerorum radices quadratas iungas per ſignum †, habebis √ 5 † 1 pro radice quadrata binomii propoſiti 6 † √ 20. Vt patet quia √ 5 † 1 multiplicata per ſeipſam, producit 6 † √ 20.

√ 5 † 1
√ 5 † 1
————————
† √ 5 † 1
5 † √ 5
————————
6 † √ 20

Similiter, ſi ſit extrahenda radix quadrata de hac apotome $\frac{3}{2}$ - √ $\frac{5}{4}$. Differentia quadratorum vtriuſque partis eſt 1, cuius radix quadrata 1, maiori parti addita & detracta exhibet ſummam $\frac{5}{2}$ & reſiduum $\frac{1}{2}$. Horum dimidia ſunt $\frac{5}{4}$ & $\frac{1}{4}$. Illorum dimidiorum radi-

ces quadratas necte per ſignum - & habebis ℞ $\frac{5}{4}$ - $\frac{1}{2}$ pro radice quadrata apotomes propoſitæ, vt patet examen facienti.

℞ $\frac{5}{4}$ - $\frac{1}{2}$

℞ $\frac{5}{4}$ - $\frac{1}{2}$

- ℞ $\frac{5}{16}$ † $\frac{1}{4}$

$\frac{5}{4}$ - ℞ $\frac{5}{16}$

$\frac{3}{2}$ - ℞ $\frac{5}{4}$

Sit denique extrahēda radix de hoc binomio 6 † ℞ 24 & de hac apotome 6 - ℞ 24. Differentia quadratorum vtriuſque partis eſt 12, cuius ℞ eſt ℞ 12, quę additā & detracta maiori parti 6, exhibet ſummam 6 † ℞ 12. & reſiduum 6 - ℞ 12. Huius ſummæ & reſidui dimidia ſunt 3 † ℞ 3 & 3 - ℞ 3. Horum dimidiorum radices ſi connectas per ſignum †, habebis radicem quadratam binomiii propoſiti ℞ (3 † ℞ 3) † ℞ (3 - ℞ 3.) Si per ſignum - , habebis radicem quadratam apotomes ℞ (3 † ℞ 3) - ℞ (3 - ℞ 3) vt conſtabit probationem facienti.

Examen operationis pro binomio.

℞ (3 † ℞ 3) † ℞ (3 - ℞ 3)
℞ (3 † ℞ 3) † ℞ (3 - ℞ 3)

† ℞ 6 † 3 - ℞ 3
3 † ℞ 3 † ℞ 6

6 † ℞ 24

Examen operationis pro apotome.

℞ (3 † ℞ 3) - ℞ (3 - ℞ 3)
℞ (3 † ℞ 3) - ℞ (3 - ℞ 3)

- ℞ 6 † 3 - ℞ 3
3 † ℞ 3 - ℞ 6

6 - ℞ 24

CAPVT V.

POſt explicatas Algebræ præceptiones, neceſſarium plane eſt illarum vſum & vtilitatem explicare, ne labor noſter inanis plane eſſe videatur. Vt autem hac in parte, ſicut & in cæteris, ſeruetur aliquis ordo, ſoluemus primum quæſtiones per æquationem ſimplicem 2. per æquationem compoſitam. 3. per numeros ſurdos, 4. Geometricas quæſtiones proponemus. Quintò denique aliqua problemata per ſecundas radices enodabimus.

§. I. *Quæſtiones ſolutæ per æquationem ſimplicem.*

QVÆSTIO I.

DIxit quondam Alexander Epheſtioni ſe ipſo ſeniorem eſſe duobus annis: Clitus, qui tum aderat, addidit ſe habere amborum ætatem, Alexandri inquam, & Epheſtionis, & inſuper quatuor annos: quibus Calliſthenes, reuocatis (ait) mihi in memoriam parentem meum qui vixit 96 annis, præciſe triplo veſtrum ætatem habuiſſe. Quæritur quo ætatis ſuæ anno habuerint hoc colloquium Alexander, Epheſtio, & Clitus.

Pono pro annis Epheſtionis 1 R annorum, ergo Alexander habuit 1 R † 2. Igitur Clitus habebat 2 R † 6. Hi autem tres numeri ſimul additi debent iuxta quæſtionis tenorem æquari 96. Summa verò illorum eſt 4 R † 8. Et proinde eſt æquatio inter 4 R † 8 & 96. Tollantur ex vtraque parte æquationis 8. Ergo 4 R reſtabunt æquales 88. Igitur diuidendo alteram partem æquationis, nempe 88 per numerum maioris characteris coſſici, nimirum per 4. fiet 22 valor 1 R. Ergo Epheſtio natus erat tunc 22 annis, Alexander 24, & Clitus 50, qui omnes ſimul conficiunt annos 96.

QVÆSTIO II.

LEpus diſtat 100 paſſibus Geometricis à cane ipſum inſequente: canis autem velocius lepore currit duplo ſe... quæritur quot paſſus Geometricos confecerit lepus, dum apprehendetur à cane.

Pono pro iſtis paſſibus 1 R, ergo canis qui paſſus factos à lepore ſuperauerit centum paſſibus, fecerit 100 † 1 R, & quia canis velocius lepore currit duplo ſeſ-

qui, ſumo duos numeros eam inter ſe ſeruantes proportionem, quales ſunt 5 & 2. Et concludo talem eſſe rationem 100 † 1 R ad 1 R qualis eſt 5 ad 2. Quoniam ergo illi quatuor numeri ſunt proportionales, erit per 19 ſeptimi, productus ſub extremis 200 † 2 R æqualis producto ſub mediis 5 R. Ergo tollendo vtrobique 2 R, reſtabunt 200 æqualia 3 R. Igitur diuidendo 200 per 3 qui eſt numerus maioris characteris coſſici, habeo in quotiente 66 $\frac{2}{3}$ pro valore 1 R. Proindeque aio leporem dum à cane prehendetur, confeciſſe paſſus Geometricos 66 $\frac{2}{3}$. Canis autem confecerit 166 $\frac{2}{3}$ qui faciunt duplo ſeſqui plus quam 66 $\frac{2}{3}$.

QVÆSTIO III.

NArrat Vitruuius, l. 9. c. 3. Archimedem inueniſſe quantitatem argenti ab aurifice immixtam coronæ aureę, quam rex Hiero iuſſerat confici 100 libris ponderantem. Hic cum aduertiſſet tantùm aquę extra balnei ſolium effluere, quantum corporis in eo inſidebat, ſtatim prodit foras inclamans illud toties decantatum εὕρηκα, εὕρηκα, & curauit fieri duas maſſas, vnam ex auro, alteram ex argento, æqualis cum corona facta ponderis: tum implens aqua peluim minorem maiori aliqua pelue circumdatam, lentè immerſit tres illas maſſas metallicas ſigillatim, notauitque quantitatem aquæ qualibet vice effluentis, & inde concluſit aurificem libras argenti coronæ aureæ miſcuiſſe 16 $\frac{2}{3}$.

Quæritur quomodo id per Algebram poſſit inueniri? ſuppono maſſam auream 100 libras ponderantem expuliſſe extra vas 60 libras aquæ, maſſam argenteam æqualis ponderis expuliſſe 90 libras aquæ, & coronã expuliſſe 65 libras. Tum pono pro quantitate argenti in corona

rona mixti 1 R librarum, facioque duas regulas trium hoc modo. Si 100 libræ auri dant 60 libras aquæ; 100 - 1 R quantum dabunt? & reperio $\frac{6000 - 60 R}{100}$ pro quarto numero. Deinde inſtituo alteram regulam trium, ſi 100 libræ argenti dànt 90 libras aquæ; 1 R quantùm dabit? & inuenio $\frac{90 R}{100}$. Illæ autem libræ aquæ $\frac{6000 - 60 R}{100}$ & $\frac{90 R}{100}$ ſimul additæ, faciunt ſummam $\frac{6000 \dagger 30 R}{100}$ librarum aquæ; quæ debent æquari cum 65 libris expulſis à corona, vt conſideranti patebit. Proindeque ſi reducas illam æquationem (vt dictum eſt in capitis ſecundi §. 3.) deprehendes æquationem inter 500 & 30 R. Ergo diuidendo 500 per 30 numerum maioris characteris coſſici, habebis $16 \frac{1}{3}$ pro valore 1 R quæ ſupponebat pro quantitate argenti mixti. Igitur aurifex in corona 100 librarũ quæ debebat eſſe ex auro puro, miſcuerat libras argenti $16 \frac{1}{3}$, erantque tantùm in ea $83 \frac{1}{3}$ auri puri.

§. 2. *Quæſtiones ſolutæ per æquationem compoſitam.*

QVÆSTIO I.

Diuidere numerum datum in duos, quorum quadrata ſint data. Sit numerus 8 diuidendus in duos quorum quadrata ſint 34.

Pono vnum ex duobus eſſe 1 R, ergo alter erit 8 - 1 R. Horum quadrata ſunt 1 Q & 64 † 1 Q - 16 R, quæ ſimul addita faciunt ſummam 64 † 2 Q - 16 R. Ergo eſt æquatio inter 34 & 64 † 2 Q - 16 R. Additis igitur vtrobique 16 R, fiet æquatio inter 34 † 16 R & 64 † 2 Q

& vtrinque ſublatis 64 , erit quoque æquatio inter 16 R - 30 & 2 Q. Diuiſiſque omnibus per 2, numerum maioris characteris, erit 1 Q æquale 8 R - 15. Hinc itaque extrahenda radix quadrata, ſicut dictum eſt in §. 5. capitis ſecundi. Dimidium numeri radicum eſt 4, ex cuius quadrato 16, tollo numerum abſolutum, quia afficitur ſigno - & relinquitur 1, cuius radix quadrata 1, addita dimidio numeri radicum exhibet ſummam 5 pro valore radicis. Igitur vnus ex numeris quæſitis eſt 5, & quia ambo æquantur 8, ſi ex 8 tollas 5, reſtabit 3 alter numerus quæſitus.

QVÆSTIO II.

INuenire duos numeros quorum productus ſit 12. & differentia quadratorum 32.

Pono minorem ex illis numeris eſſe 1 R. Ergo quoniam productus debet eſſe 12, erit alter $\frac{12}{1R}$. Siquidem producto ſub duobus numeris diuiſo per vnũ ex illis duobus, exhibetur alter. Horum quadrata ſunt 1 Q, & $\frac{144}{1Q}$. Et quia 1 R ponitur eſſe minor illorum numerorum, erit 1 Q minus quadratum è duobus quadratis; & proinde tollendo 1 Q de $\frac{144}{1Q}$, reſiduum $\frac{144}{1Q}$ - 1 Q erit differentia quadratorum : & ita erit æquatio inter 32 & $\frac{144}{1Q}$ - 1 Q. Igitur addito 1 Q vtrobique habebis 32 † 1 Q æquari $\frac{144}{1Q}$. Ergo reducendo hanc æquationem, vt imperatum eſt in §. 3. cap. 2. reperies 1 QQ eſſe ęquale 144 - 32 Q. Et quoniam exponentes illorum numerorum ſeruant inter ſe in aliquo ſitu proportionem Arithmeticam, aduertendum 32 Q tenere locum radicum. Quare extrahenda radix quadrato-quadrata ex illo numero diminuto 144 - 32 Q, dimidium numeri radicum eſt 16, cuius quadratum 256 addi debet numero

abſoluto 144, & fit ſumma 400, cuius radix quadrata eſt 20. Ex qua ſi tollas dimidium numeri radicum propter ſignum - relinquitur 4 pro radice quadrata numeri diminuti, ſed quia propter characterem Q Q. debet erui radix quadrato quadrata, oportet iterùm ex numero 4 inuento extrahere radicem quadratam, & habetur 2 pro valore 1 R, quę ſupponebat pro minore numero quæſitorum. Iam autem multis modis potes reperire alterum, vel ponendo 1 R pro eo, inquirendoque aut ęquationem cum producto aut cum differentia quadratorum, vel diuidendo productum datum 12. per numerum inuentum 2, & quotiens erit 6 alter numerus quæſitus.

Potuit etiam hoc modo procedi. Ponatur 1 R pro maiore quæſitorum. Ergo eius quadratum eſt 1 Q, vnde ſi tollas differentiam quadratorum datam 32, habebitur minus quadratum 1 Q - 32. Igitur ℞ (1 Q - 32) erit minor numerus quæſitus per quem ſi multiplices maiorem 1 R, fiet productus illorum ℞ (1 QQ - 32 Q) ęqualis producto dato 12. Ergo eorum quadrata 1 QQ . 32 Q & 144 erunt etiam æqualia, & additis vtrobique 32 Q, erit æquatio inter 1 QQ & 144 † 32 Q. Quare ſumendo vt ſuprà dimidium numeri radicum, &c. fit 1 R, ſiue maior quęſitorum 6.

QVÆSTIO III.

DVo mercatores inita ſocietate poſuerunt ſimul ſummam 165 nummorum: verùm pecunia primi fuit expoſita 12 menſibus, pecunia verò ſecundi octo menſibus tantùm: contingit autem vt lucrentur dumtaxat 28 nummos, qui additi ſummæ primò poſitæ 165, conficiunt 193 nummos aureos, quos inter ſe ita diuidunt, vt primus accipiat 67 tùm pro pecunia ſua tùm pro lucro, ſecundus autem accipit 126. Quęritur quantùm quilibet mercator poſuit, & quantum lucratus eſt ſigillatim.

Pono pecuniam primi eſſe 1 R nummorum, ergo quoniam ſumma vtriuſque initio poſita fuit 165, erit pecunia ſecundi 165 - 1 R. Igitur ſi tollas 1 R quæ eſt poſitio primi ex ſumma 67 quam accipit, quæque compoſita erat ex poſitione & lucro, deprehendes lucrum primi eſſe 67 - 1 R. Similique diſcurſu reperies lucrum ſecundi fore 1 R - 39.

Nunc ſciendum, quid primus per 1 R pecuniæ ſuæ lucretur 8 menſibus, quod fiet per regulam trium hoc modo: ſi in 12 menſibus inuentum ſit lucrum 67 - 1 R, in 8 menſibus quantum erit lucrum? & quartus numerus erit $\frac{134 - 2\,R}{3}$ pro lucro primi in 8 menſibus. Tùm quæro quid lucretur ſecundus per alteram regulam trium, dicens: ſi 1 R lucretur $\frac{134 - 2\,R}{3}$ quid 165 - 1 R? & inuenio $\frac{22110 - 464\,R \dagger 2\,Q}{3\,R}$ pro quarto numero qui debet eſſe æqualis lucro ſecundi, quod iam deprehenſum eſt 1 R - 39. Et proinde erit æquatio inter $\frac{22110 - 464\,R \dagger 2\,Q}{3\,R}$ & 1 R - 39. igitur multiplicando 1 R - 39 per 3 R, habebis iterùm æquationem inter 22110 - 464 R † 2 Q & 3 Q - 117 R. Ergo tollendo vtrinque 2 Q & vtrobique addendo 117 R, deprehendes 1 Q æquari 22110 - 347 R, vnde eruenda eſt radix quadrata. Dimidium numeri radicum eſt $\frac{347}{2}$, cuius quadratum $\frac{120409}{4}$ additum cum numero abſoluto 22110, facit ſummam $\frac{208849}{4}$. Cuius radix quadrata eſt $\frac{457}{2}$ multata dimidio numeri radicum $\frac{347}{2}$ exhibet $\frac{110}{2}$ ſiue 55 pro valore 1 R, quæ ſupponebat pro pecunia primi.

Ergo ſi tollas 55 à ſumma amborum initio poſita 165, reſtabit pecunia ſecundi 110. Et quia primus tùm pro poſitione, tùm pro lucro ſumpſit 67 nummos, ſi ex 67

tollas 55, reſtabit 12 pro lucro primi. Igitur ſi ex lucro totali 28, tollas 12 deprehendes 16 eſſe lucrum ſecundi.

§. 3. *Quæſtiones ſolutæ per numeros ſurdos.*

QVÆSTIO I.

Diuidere numerum datum, verbi gratia 4 media & extrema ratione. Id eſt, taliter diuidere numerum 4 in duos, vt totus 4 ad maiorem partem habeat eamdem rationem, quam maior pars ad minorem.

Pono maiorem partem eſſe 1 R. Ergo minor, erit 4 - 1 R. Igitur eſt eadem proportio 4 ad 1 R, quæ 1 R ad 4 - 1 R. Et proinde quadratum medii æquabitur producto ſub extremis: quadratum autem medii eſt 1 Q. Productus verò ſub extremis eſt 16 - 4 R. Igitur eſt æquatio inter 1 Q & 16 - 4 R. Quare oportet inde extrahere radicem, ſumendo dimidium numeri radicum nempe 2, cuius quadratum 4 addendum eſt numero abſoluto 16, & fit ſumma 20. Cuius radix quadrata ℞ 20 multata dimidio numeri radicum 2, exhibet reſiduum ℞ 20 - 2, pro valore 1 R. Id eſt, pro maiore parte, quapropter ſi ex 4 tollas ℞ 20 - 2. habebis 6 - ℞ 20 pro minore parte, vt examen facienti patebit.

	℞ 20 - 2	℞ 20 - 2	6 - ℞ 20
Examen operationis	6 - R 20	℞ 20 - 2	4
	ſumma 4.	- ℞ 80 + 4	24 - ℞ 320
		20 - ℞ 80	
		24 - ℞ 320	

QVÆSTIO II.

Diuidere numerum datum, puta 5 in duas partes, quarum quadrata habeant datam proportionem, verbi gratia 2 ad 3.

Ponatur minor numerus 1 R, ergo maior erit 5 - 1 R. Horum quadrata ſunt 1 Q. Et 25 + 1 Q - 10 R. Igitur eſt 1 Q ad 25 + 1 Q - 10 R, vt 2 ad 3. Et proinde productus ſub extremis 3 Q, æquabitur producto ſub mediis 50 + 2 Q - 20 R. Per 19. ſeptimi. Ergo ſi tolles vtrobique 2 Q, reſtabit 1 Q ęquale 50 - 20 R. Inde igitur ſic eruo radicem quadratam: dimidium numeri radicum eſt 10, cuius quadratum 100 additum numero abſoluto 50, exhibet 150, cuius radix quadrata ℞ 150 multata dimidio numeri radicum 10, exhibet ℞ 150 - 10 pro minore parte. Quare ſi illam ſuſtuleris de numero totali diuidendo 5, reſiduum 15 ℞ 150 erit maior numerus quæſitus. Vt experienti conſtabit

Examen operationis		
15 - ℞ 150	15 - ℞ 150	℞ 150 - 10
℞ 150 - 10	15 - ℞ 150	℞ 150 - 10
ſumma 5.	- ℞ 33750 + 150	- ℞ 15000 + 100
	225 - ℞ 33750	150 - ℞ 15000
	375 - ℞ 135000	250 - ℞ 60000

225 - ℞ 60000 ad 375 - ℞ 13500 vt ad 3.

$\dfrac{3}{750 - ℞\ 540000}$ $\dfrac{2}{750 - ℞\ 540000}$

QVÆSTIO III.

Diuidere numerum datum, puta 6, in tres numeros continuè proportionales, taliter vt quadrata extre-

morum habeant proportionem datam ad quadratum medii. Hæc autem proportio non debet eſſe minor quam dupla, vt ſtatim patebit conſideranti. Sit ergo data ratio quadratorum ab extremis ad quadratum medii tripla.

Pono 1 R pro numero medio. Ergo ſumma extremorum erit 6 - 1 R. Quia verò ex tribus numeris proportionalibus, quadratum ſummæ extremorum æquatur quadratis extremorum & duplo medii quadrato. Tollo ex quadrato ſummæ extremarũ quod eſt 36 + 1 Q - 12 R, duplum medii quadratum nempe 2 Q, & reſiduum 36 - 1 Q - 12 R eſt æquale quadratis extremorum. Igitur cum quadrata illa debeant eſſe tripla quadrati medii, erit æquatio inter 36 - 1 Q 12 R & 3 Q. Quare addendo vtrobique 1 Q, erit iterum æquatio inter 36 - 12 R & 4 Q. Proindeque diuidendo omnia per 4 numerum maioris characteris coſſici, fit 1 Q æquale 9 - 3 R. Supereſt ergo vt inde extrahamus radicem quadratam hoc modo. Dimidium numeri radicum eſt $\frac{3}{2}$ cuius quadratum $\frac{9}{4}$ additum numero abſoluto 9, exhibet $\frac{45}{4}$, cuius radix quadrata multata dimidio numeri radicum, dat ℞ $\frac{45}{4}$ - $\frac{3}{2}$ pro valore 1 R, quæ ſupponebat pro medio: ergo ſi ℞ $\frac{45}{4}$ - $\frac{3}{2}$ tollas ex numero diuidendo 6, reſtabit ſumma extremorum $\frac{15}{2}$ - ℞ $\frac{45}{4}$.

Vt autem ipſos extremos diſtinguas pone 1 R pro vno extremo. Igitur alter extremus erit $\frac{5}{2}$ - ℞ $\frac{45}{4}$ - 1 R ergo productus ſub extremis $\frac{15 R}{2}$ - ℞ $\frac{45 Q}{4}$ - 1 Q æquabitur quadrato medii ſuprà inuenti ℞ $\frac{45}{4}$ - $\frac{3}{2}$. Quod quadratum eſt $\frac{27}{2}$ - ℞ $\frac{405}{4}$. Ergo eſt æquatio inter $\frac{27}{2}$ - ℞ $\frac{405}{4}$ & $\frac{15 R}{2}$ - ℞ $\frac{45 Q}{4}$ - 1 Q & poſt debitam reductio-

nem erit 1 Q æquale $\frac{15 R}{2}$ - ℞ $\frac{45 Q}{4}$ † ℞ $\frac{405}{4}$ - $\frac{27}{2}$. Et pr-
inde reſtat eruenda radix ex hoc numero poſteriori $\frac{15 R}{2}$ - ℞ $\frac{45 Q}{4}$ † ℞ $\frac{405}{4}$ - $\frac{27}{2}$. Quod ita perficietur aduerten-
do particulas omnes adfectas charactere coſſico ſubire vicem radicum; quales ſunt hic in præſenti caſu $\frac{5 R}{2}$ - ℞ $\frac{45 Q}{4}$. Sumo igitur dimidium numeri radicum, videlicet $\frac{15}{4}$ - ℞ $\frac{45}{16}$. Cuius dimidii quadratum $\frac{135}{8}$ - ℞ $\frac{9125}{64}$ auctum priore particula numeri abſoluti ℞ $\frac{405}{4}$ propter ſignum †, & multatum poſteriore $\frac{27}{2}$ propter ſignum -, exhibet $\frac{27}{8}$ - ℞ $\frac{405}{64}$. Ex qua apotome extrahitur radix quadrata per §. 12. capitis quinti, eſtque ℞ $\frac{45}{16}$ - $\frac{3}{4}$ quæ addita & detracta dimidio numeri radicum $\frac{15}{4}$ - ℞ $\frac{45}{16}$ (propterea quod numeri diminuti in quibus abſolutus adficitur ſigno - habent duplicem radicem vt adnotatum eſt in §. 5. cap. 2.) exhibet ſigillatim duos extremos quæſitos 3. Et $\frac{9}{2}$ - ℞ $\frac{45}{4}$. Quare tres numeri quæſiti ſunt 3 | ℞ $\frac{45}{4}$ - $\frac{3}{2}$ | $\frac{9}{2}$ - ℞ $\frac{45}{4}$. Qui conficiunt numerum 6, & ſunt continuè proportionales & quadrata extrema tripla ſunt quadrati medii. Vt examen facienti manifeſtum erit.

$$\begin{array}{c} 3 \\ \text{℞}\,\frac{45}{4} - \frac{3}{2} \end{array} \quad \text{vt } 3 \text{ ad } \text{℞}\,\frac{45}{4} - \frac{3}{2} \text{ ità } \text{℞}\,\frac{45}{4} - \frac{3}{2} \text{ ad } \frac{9}{2} - \text{℞}\,\frac{45}{4}$$

$$\frac{9}{2} - \text{R}\,\frac{45}{4}$$

numerorum ſumma 6.

$$\text{℞}\,\frac{45}{4} - \frac{3}{2}$$

$$- \text{℞}\,\frac{405}{16} + \frac{9}{4}$$

$$\frac{45}{4} - \text{℞}\,\frac{495}{16}$$

$$\begin{array}{c} 3 \\ \hline \frac{27}{2} - \text{℞}\,\frac{405}{4} \end{array}$$

quadratum medii $\frac{27}{2} - \text{℞}\,\frac{405}{4}$ triplum eſt huius $\frac{81}{2} - \text{℞}\,\frac{3645}{4}$

quadratorum ab extremis ſumma. $\frac{81}{2} - \text{℞}\,\frac{16\cdot5}{4}$

§. 4. *Quæſtiones Geometricæ ſolutæ per Algebram.*

QVÆSTIO I.

Est ager quiſpiam quadrangulus cuius latera ſunt ad angulos rectos, & in proportione tripla: quadrata autem duorum laterum continentium angulum rectum ſunt quintupla ſummæ laterum, quæruntur latera, diameter & ſuperficies agri.

Pono 1 R pro minore latere. Ergo cùm latera ſint in proportione tripla, alterum erit 3 R; eorum quadrata ſunt 1 Q & 9 Q quæ ſimul addita faciunt 10 Q. Ergo cum ſumma quadratorum ſit quintupla ſummæ laterum, multiplicando ſummam laterum 4 R per 5, habebis 20 R æquales 10 Q. Igitur quoniam duo illi numeri ſunt collaterales, diuidendo 20 per 10, fiet quotiens 2 pro valore 1 R, quæ ſupponebat pro minore latere. Ergo maius erit 6. Ergo multiplicando vnum latus per aliud, ſuperficies erit 12. & diameter ℞ 40.

QVÆSTIO II.

EST triangulum æquilaterum, cuius ſuperficies eſt ℞ 243. Quæritur latus & perpendicularis.

Pono 1 R pro dimidio lateris, & quia perpendicularis demiſſa ex vno angulo in latus oppoſitum, ſemper illud ſecat bifariam, ſi ex quadrato totius lateris quod eſt 4 Q, tollas quadratum dimidii lateris, nempe 1 Q, reſtabit 3 Q pro quadrato perpendicularis, & proinde ipſa perpendicularis erit ℞ 3 Q, quæ multiplicata per dimidium latus 1 R, exhibet ſuperficiem trianguli ℞ 3 QQ, ergo erit æquatio inter ℞ 3 QQ & ℞ 243. Proindeque eorum numerorum quadrata 3 QQ & 243, erunt quoque æqualia. Quare diuidendo 243 per 3 numerum maioris characteris, erit etiam æquatio inter 1 QQ & 81. Igitur radix quadrato-quadrata 81, nempe 3 erit valor vnius 1 R, quæ ſupponebat pro dimidio latere. Ergo latus eſt 6. & perpendicularis ℞ 27.

QVÆSTIO III.

EST ſemicirculus cuius diameter ſecta eſt media & extrema ratione, in puncto ex quo erigitur linea perpendiculariter ad peripheriam, & ex interſectione illius perpendicularis & peripheriæ ducuntur ad extremitates diametri duæ lineæ, quarum minor eſt ℞ 20 - 2. quæritur quantitas diametri, partium eius, & prædictæ perpendicularis. Vt ſoluatur hæc quæſtio, ſupponendum eſt maiorem partem diametri fore æqualem lineæ datæ ℞ 20 - 2. Vt facile demonſtrari poteſt. Hoc igitur præſuppoſito.

Pono 1 R pro minori parte diametri, ergo cùm maior pars ſit ℞ 20 - 2, erit tota diameter ℞ 20 - 2 † 1 R. Et proinde ſi hanc totam diametrum ℞ 20 - 2 † 1 R multiplices per 1 R, habebis ℞ 20 Q - 2 R † 1 Q æqua-

lia quadrato maioris partis, ſiue, quod idem eſt quadrato numeri dati. Quadratum autem numeri dati ℞ 20 - 2, eſt 24 - ℞ 320. Et proinde eſt æquatio inter 24 - ℞ 320 & ℞ 20 Q - 2 R + 1 Q. Et proinde addendo vtrobique 2 R, & tollendo vtrinque ℞ 20 Q. Erit etiam ęquatio inter 1 Q, & 24 - ℞ 320 + 2 R - ℞ 20 Q. vnde eruenda eſt radix quadrata, adnotando numeros affectos charactere coſſico ſubire vices numeri radicum, quod iam notauimus in quęſt. 3. §. 3. Sumo igitur dimidium numeri radicum nempe 1 - ℞ 5, cuius quadratum 6 - ℞ 20 nectendum eſt cum numero abſoluto 24 - ℞ 320, & fit ſumma 30 - ℞ 500. ex qua oportet extrahere radicem, vt dixi in paragrapho vltimo, cap. 4. Hæc radix 5 - ℞ 5. Quæ addita dimidio numeri radicum 1 - ℞ 5, exhibet 6 - ℞ 20 pro valore 1 R quæ ſuppoſita eſt minor pars diametri.

Hanc ergo ſi addideris maiori, habebis 4 pro tota diametro. Si vero maiorem partem ℞ 20 - 2 ducas in minorem 6 - ℞ 20, fiet quadratum perpendicularis ℞ 1280 - 32 & ita, ipſa perpendicularis erit ℞ (℞ 1280 - 32) quod facile probari poteſt, quia quadratum ipſius perpendicularis iunctum cum quadrato minoris partis diametri, efficiunt quadratum maioris partis.

§. 5. *Quæſtiones ſolutæ per ſecundas radices.*

QVÆSTIO I.

TRes homines habent pecuniam, primus dicit ſecundo, ſi dares mihi dimidium pecuniæ tuæ, haberem 100 aureos. Secundus dicit tertio, ſi dares mihi trientem tuæ pecuniæ, haberem quoque 100 aureos. Tertius denique ait primo, ſi dares mihi quadrantem pecunię tuę, haberem 100 aureos. Quæritur quantum quiſquis habeat.

Pono 1 R nummorum pro pecunia primi, 1 A pro pecunia ſecundi, & 1 B pro pecunia tertii. Ergo primus qui habet 1 R cum dimidio ſecundi, habebit 1 R † $\frac{1}{2}$ A æqualia 100. Et tollendo vtrobique 1 R, erit æquatio inter $\frac{1}{2}$ A & 100 - 1 R, & diuiſa vtraque æquationis parte per $\frac{1}{2}$, erit 1 A æquale 200 - 2 R. Incipio igitur iterùm operationem, & in locum 1 A ſubſtituo pro ſecundo numero, id quod inuentum eſt æquale 1 A, nempe 200 - 2 R. Cum ergo ſecundus cum triente tertii debeat habere 100, erit æquatio inter 200 - 2 R † $\frac{1}{3}$ B & 100. Igitur additis vtrobique 2 R, & vtrinque ſublatis 200, erit æquatio inter $\frac{1}{3}$ B & 2 R - 100. Et diuiſa vtraque æquationis parte per $\frac{1}{3}$, erit 1 B æquale 6 R - 300. Iterùm ergo redintegro operationem, & in locum 1 B ſubſtituo 6 R - 300, qui numerus additus cum $\frac{1}{4}$ primi facit $\frac{25\ R}{4}$ - 300 æqualia 100. Ergo additis vtrobique 300, eſt æquatio inter 400 & $\frac{25\ R}{4}$. Et proinde ſi diuidas 400 per $\frac{25}{4}$. Numerum maioris characteris, habebis 64 pro valore 1 R. Ergo ſecundus qui habebat 200 - 2 R, habebit 200 - 128, id eſt 72. Et tertius qui habebat 6 R - 300 habebit 384 - 300, id eſt 84. Hi tres numeri ſatisfaciunt quæſtioni.

QVÆSTIO II.

INuenire tres numeros Arithmeticè proportionales, itaut primo ductoin 1. ſecundo in 2. tertio in 3, fiant 62. Et itaut horum numerorum quadrata ſimul iuncta efficiant ſummam 275.

Pono tres illlos numeros eſſe 1 R, 1 A, & 1 B. Igitur quoniam ſunt Arithmeticè proportionales, ſumma extremorum 1 R † 1 B erit dupla medii 1 A: Ergo 1 R † 1 B æquabitur 2 A. Et diuiſa vtraque æquationis parte per 2, fit 1 A æquale $\frac{1R + 1B}{2}$. Incipio ergo iterùm operationem, & loco 1 A pono $\frac{1R + 1B}{2}$. Igitur, quoniam primo ducto in 1, ſecundo in 2, & tertio in 3. fiunt 62, multiplico 1 R in 1, & fit 1 R, item multiplico $\frac{1R + 1B}{2}$ in 2, & fit 1 R † 1 B, item multiplico 1 B in 3, & fit 3 B. Horum trium productorum ſumma eſt 2 R † 4 B æqualis 62, & detractis vtrinque 2 R, reſtant 4 B æqualia 62 - 2 R. Et diuiſa vtraque æquationis parte per 4, fit 1 B æquale $\frac{31 - 1R}{2}$. Igitur quoniam inuenimus ſuprà ſecundum numerum æqualem $\frac{1R + 1B}{2}$, erit ille idem ſecundus reductus ad primas radices $\frac{31 + 1R}{4}$. Quare tres numeri quæſiti ſic ſtabunt in radicibus primis 1 R | $\frac{31 + 1R}{4}$ | $\frac{31 - 1R}{2}$ horum quadrata ſunt 1 Q | $\frac{961 + 1Q + 62R}{16}$ | $\frac{961 + 1Q - 62R}{4}$ horum quadratorum ſumma eſt $\frac{4805 + 21Q - 186R}{16}$ quæ proinde æquatur numero dato 275. Igitur multiplicando vtrumque terminum æquationis per 16, habebis iterum æquationem inter 4805 † 21 Q - 186 R & 4400. Ergo additis vtrobique 186 R, & vtrinque detractis 4805, fiunt 21 Q æqualia 186 R 405. Quibus diuiſis per 21 numerum maioris characteris, habetur 1 Q æquale $\frac{186R - 405}{21}$. Vnde ſic eruitur radix quadrata: dimidium numeri radicum eſt $\frac{93}{21}$ ex cuius quadrato $\frac{8649}{441}$ ſi tollas numerum abſolutum $\frac{405}{21}$, reſtat $\frac{144}{441}$. Cuius radix quadrata $\frac{12}{21}$ addita dimidio numeri radicum

$\frac{93}{21}$ fit 5 pro valore 1 R quæ ſuppoſita erat primus numerus. Ergo ſecundus numerus qui inuentus eſt $\frac{31 + 1\,R}{4}$ erit $\frac{31+5}{4}$, id eſt, 9. Et tertius qui fuit inuentus, $\frac{31 - 1\,R}{2}$ erit $\frac{31-5}{2}$, id eſt 13. Et ſatisfaciunt quæſtioni.

QVÆSTIO III.

INuenire tres numeros, itaut quadratum primi additum plano ſub primo in ſecundum faciat ſummam 48: illo verò eodem quadrato ſublato ex plano ſub primo in tertium, fiat reſiduum 32. Et itaut quadrata primi & tertii ad quadratum ſecundi habeat rationem 5 ad 2.

Pono pro tribus numeris quæſitis 1 R, 1 A & 1 B, quadratum primi eſt 1 Q, planum ſub primo in ſecundum eſt 1 R A. Ergo 1 Q + 1 R A æquatur 48. Igitur ſi vtrinque demas 1 Q, erit 1 R A æquale 48 - 1 Q & diuiſa vtraque æquationis parte per 1 R, habebis 1 A æquale $\frac{48 - 1\,Q}{1\,R}$. Similiterque deprehendes 1 B æquari $\frac{32 + 1\,Q}{1\,R}$. Vnde quoniam ſecundæ radices reductæ ſunt ad primas, incipienda eſt iterùm operatio ponendo pro primo 1 R, pro ſecundo $\frac{48 - 1\,Q}{1\,R}$ & pro tertio $\frac{32 + 1\,Q}{1\,R}$. Horum trium quadrata ſunt 1 Q | $\frac{2304 + 1\,QQ - 96\,Q}{1\,Q}$ | & $\frac{1024 + 1\,QQ + 64\,Q}{1\,Q}$ quadrata extremorum ſimul addita faciũt $\frac{1024 + 2\,QQ + 64\,Q}{1\,Q}$ igitur cum quadrata primi & tertii ad quadratum medii debeant habere proportionem 5 ad 2; erit vt 5 ad 2 ita $\frac{1024 + 2\,QQ + 64\,Q}{1\,Q}$ ad $\frac{2304 + 1\,QQ - 96\,Q}{1\,Q}$. Et proinde per 19 ſeptimi, productus ſub extremis $\frac{11520 + 5\,QQ - 480\,Q}{1\,Q}$ æquatur producto ſub mediis $\frac{2048 + 4\,QQ + 128\,Q}{1\,Q}$ Igitur

quia illæ duæ fractiones ſunt æquales habentque eumdem denominatorem, eorum numeratores erunt æquales, hoc eſt, erit æquatio inter 11520 † 5 QQ - 480 Q & 2048 † 4 QQ † 128 Q. quare additis vtrobique 480 Q erit etiam æquatio inter 11520 † 5 QQ & 2048 † 4 QQ † 608 Q. Et detractis vtrobique 4 QQ & 11520, erit quoque æquatio inter 1 QQ & 608 Q - 9472. Hinc ergo ſic eruo radicem quadrato-quadratam. Dimidium numeri radicum eſt 304. ex cuius quadrato 92416 tollo numerum abſolutum 9472. Reſiduum eſt 82944, cuius radix quadrata 288 ſublata ex dimidio numeri radicum 304 (quia numeri diminuti in quibus abſolutus afficitur ſigno - habent duas radices, vt monuimus in §. 5. cap. 2.) exhibet 16 pro reſiduo: ex quo iterùm eruenda eſt radix quadrata & habetur 4 pro valore 1 R. Proindeque ſecundus qui inuentus eſt $\frac{48 - 1Q}{1R}$, erit 8. Et tertius, quem inuenimus $\frac{12 \dagger 1Q}{1R}$, eſt 16. Atque hi tres numeri 4. 8. 12 ſatisfaciunt quæſtioni.

F I N I S.

ERRATA priuſquam legatur opus, corrigenda.

IN Epiſtola pag.1.lin.1.Imperij, lege,Imperij ſtatus.p.2.l.9. eaculos,l.calcu-
los. p.5.l.11 ſe,l.ſibi. p.9.inuertendi ſunt in prima figura numeri &qui primus
eſt ponendus vltimus,relictis in ſuo ordine literis. p.10.l.20.medius,l.medij &.
p.16 l.15. vt E,l. vt F. p.16.l.28.quadrato A,l.quadrato A C. p.20.l.5.ſub medio
in aggregatum quadratorum ab extremis, l.ſub quadrato medii in aggregatum
extremorum. p.21.l.7 ex 3 in quadrata A & C.l.ex quadrato B in A & C. p.25.
l.9.pro 16, l.1 Q p.27.l.19.C D,l.C B. p.28.l.24.C,l.F. p.30.l.21.à ſumma, l.&
ſumma. p.34.l.15. differentiæ,l.differentia. p.36.l.6.ſequentis,l.ſegmentis. p.44.
l.21. extremarum, l.omnium. p 46. l.28. ſemicirculus, l.ſemicirculo. p.55.l.12.
B E,l.B F. p.57. l.19. hoc eſt quadratum, l.hoc eſt quadrata. p.62. l.20. IGC, l.
IGH. p.65. pro litera E in circulo, l.F. p.74. l.15. ſinguli, l.ſinguli 9.6.4. p.81.
illæ , l. ille. p.81. l.vlt.1 Q 20 R, l. 1 Q † 20 R. p. 83. l. penult.2 R - 10 R, l.
2 Q - 10 R. p.87.in figura deeſt litera C in linea BD. p.94.l.25.pro numeratore
fractionis,l.125-80R. p.98.l.7.BC ad,l.BE ad. p.102.l.18.ſint,l.ſit. p.115.l.penul.
quadratam,l. quadratum. p.117. l.1. proportione,l.proportionis. p.119. l.4.AE,
l.AC. p.120. l.5. de eſt ſuperfluum. p.123.l.20. eſt redundat. p.124.l.31.data,l.ſi
data. p.125.l.27. in E,l.in F. p.130.l.14.medij,l.mediis. p 133.l.10.pro 1 ℞,l.1 R.
p.135. l.penult. DF,l.DE. p.137.l.22.FH,l.FG. ibid.ad figuram deeſt litera I in
linea DE. p.141.l.29. ſi,l.ſit. p.145 l.9. æquale, l.æqualis. p.147.l.18. BF. l.BG.
ibid.l.21.&23.BFC,l.BGC.p.153.in figura litera C & D inuicē permutarunt ſitū.
p.157.l.3.in numeratore prioris fractionis 1Q-4, l.1Q-2.ibid. l.4. ſic,l.ſi. p.158.
l.25.eidē,l.idem. ibid.l.32. AC,l.BC. p.160.l 9. in numeratore prioris fractionis
1†1R, l. 2†1R. ibid.l.22.tollæ,l.tolle. p.161.in figura deeſt litera in duobus locis
ante & poſt punctum H. p.163. l.27.FG,l.EG. p.164 l.11.ſit,l.ſit. p.167.l.9.ſin-
gulorum, l. ſingularum. p.175.l.14. tertiam,l.quadratum tertiæ. p.183.l.25.igitur
duplum,l.igitur.p.207.l.9.ad quadratum BE,l.ad quadratum DE.p. 208. l.pen.
34.&,l.34.ex. p.210.l.6.æquales,l.æqualis,p.218.l.13.eadem,l.eodem.ibid.l.24.
ſub,l.ſub extremis.p.219.l.13.ad 1R,l.ad 15. p.223.l.13.faciunt,l.faciunt ſūmam.
p.224. l.5. productus, l.productus ſub. p.228.in duabus poſterioribus lineis ſe-
cundam quartam,l.ſecundum quartum. p 231 l.3.quadrata, l.quadrato. ibid. l.
11.hoc,l.hoc eſt. p. 236.l.24. differentiæ,l.differentia. p.241. l.17.DH, l. GH.
p.248.l.16.vero redundat. p.254.l.16,DG,l.EG. p.255.l.4.DKH,l.BKH.p.257.
l.11.ſumma,l.ſummæ. p.26 .in figura deeſt litera D ad extremitatem diametri.
p.261.l.34. duarum, l.duarum mediarum. p.262. l.17. A G, l. H G. p.264.l.21.
GEF,l.GFE p.266.in figura L,l.I. ibid.l.18 IG,l.IH. p.267.l.19.cernitur, l.e-
ruitur. p.271.l.5.FIB,l.FKB. p.273.l 22.ſunt,l.ſint. ibid. l.24.ſecundæ, l.ſecun-
da. p.284.l.32.&,l.ad. p.285.l.26.BE,l DE. p 290. l.10.aggregato,l.aggregatū.
p.291.l 5.priores,l.prioris. p.296.l 28.ex triplo,l.& triplo. p.297.l.13.producto,
l.productum p.298. in figura loco BD,l. AB. & loco A,l.D. p.303.l.1 triplo,l.
tripla. p.318.l.pen.EN,l.FN. p.324.l.8. ſecundæ,l.ſummæ. p.330.l.15.2 | ℞5 - 1,
l.2 | ℞5 † 1. ibid.l.27.facis,l.facit. p.338 l.10.tertiæ,l.quartæ. p.343.l.3.conuertan-
tur,l.connectantur. p.344.l.2.AM,l.AHM. p.346.in figura LF,l.EF.p.359.l.10.
quintæ,l.quartæ. p.360.l.7.ſumma,l.ſumma 51. p.361.l.10.quartæ, l. quartæ,ita
prima ad quintam. p.376 l.1.quadrata,l.quadrato. p.380.l.2. imparibus,l pari-
bus. p.398.l.4.æquali,l.æquari. ibid.l.pen.1Q200, l.1Q-200. p.403. l.4. æqua-
tur,l.æquetur. p.404 l.22.23.31.DH,l.DG. p.407 l.8.quadratum CB, l.quadra-
tum CD. p.413.l.4 C in,l.CD in. p.416.l.23.-, l.†. p 418 l.27. quadratorum, l.
quadratum. p.430.in figura deeſt litera D.inter B&E. p.431. l.20 eorum, l.ea-
rum. p.435. l.21. conuertendæ,l.connectendæ. p.437. l.30 ſemicirculos,l.ſemi-
circulo. p.438.l.12.CB,l.CD. p.448. l.24.&, l.eſt. p.450. l.7.8 11 12.&. p.452.
l.11 & 458 l. 25.&,l.ex. p.451.numerorum,l.numerum.p.451 in ſchemate R,l.2R.
p.463.l.12 &13 adferrus adfertum,l.adfectus adfectum. p.468.l 18.& 469. l.6, &
l.ex. p.469. l 13.particulares, l.particulas. p.471. l.3. quum, l.quam. p.472.l.4.
℞6 - per ℞5 † ℞3, l. per ℞5 † ℞3. p.478. l.19. prodit, l. prodiit.

BIBLIOTECA NAZ. VITT. EMANUELE ROMA

liber Primus continet graves 62 | [illegible]re 35
secundus 55 | [illegible] 123.
Tertius 53 | [illegible] 33
170 | [illegible] 91